Leçon 34 Barycentre de trois ou quatre points

1. **Barycentre de trois points**

Théorème

Soit (A,α), (B,β) et (C,γ) trois points podérés tells que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

- Il existe un point G unique tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Ce point G est appelé barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ)

- Pour tout point M du plan, on a :

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

Et aussi : $\overrightarrow{MG}=\dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\left(\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}\right)$

2. **Coordonnées du barycentre**

Dans le plan rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, considérons les points $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$, $C(x_C;y_C)$ et $G(x_G,y_G)$, où G est le barycentre de (A,α),(B,β) et (C,γ). En choisissant $M=O$, on obtient :

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Soit, en passant aux coordonnées : $\begin{cases} x_G=\dfrac{\alpha\, x_A+\beta\, x_B+\gamma\, x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \\ y_G=\dfrac{\alpha\, y_A+\beta\, y_B+\gamma\, y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\end{cases}$

Exemple : Soit les points $A(-3;0)$, $B(0;-2)$ et $C(3;0)$. Calculer les coordonnées de G, barycentre de $(A,-2)$, $(B,1)$ et $(C,2)$.

Solution

Soit $G(x_G,y_G)$ barycentre de $(A,-2)$, $(B,1)$ et $(C,2)$, on a :

$$x_G=\frac{(-2)\times(-3)+1\times 0+2\times 3}{-2+1+1}=12;\quad y_G=\frac{(-2)\times 0+1\times(-2)+2\times 0}{-2+1+1}=-2$$

On obtient donc : $G(12;-2)$.

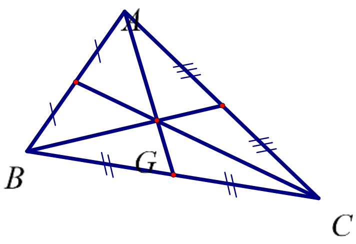
3. **Centre de gravité d'un triangle (Isobarycentre)**

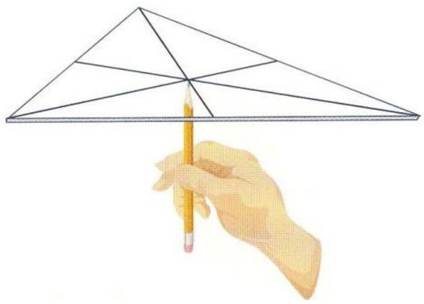
L'isobarycentre des points A, B et C est le barycentre des points $(A,1)$, $(B,1)$ et $(C,1)$ (ou encore de A, B et C affectés du même coefficient non nul).

On a : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ou $\alpha\overrightarrow{GA}+\alpha\overrightarrow{GB}+\alpha\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, $\alpha\neq 0$

Théorème

L'isobarycentre des sommets d'un triangle est le centre de gravité du triangle.





Exemple 1: Soit G le centre de gravité du triangle ABC. G_1 est le barycentre de $(A,1)$, $(B,2)$ et $(C,3)$, G_2 est le barycentre de $(A,2)$, $(B,3)$ et $(C,1)$ et G_3 est le barycentre de $(A,3)$, $(B,1)$ et $(C,2)$.

Montrer que G est le centre de gravité du triangle $G_1G_2G_3$.

Solution

On va montrer que : $\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GG_2}+\overrightarrow{GG_3}=\vec{0}$

D'après le problème on a :

. $G_1 = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_1A}+2\overrightarrow{G_1B}+3\overrightarrow{G_1C}=\vec{0}$

$$\overrightarrow{G_1G}+\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{G_1G}+2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{G_1G}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$6\overrightarrow{G_1G}+\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GG_1}=\frac{\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}}{6} \qquad (1)$$

. $G_2 = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{G_2A}+3\overrightarrow{G_2B}+\overrightarrow{G_1C}=\vec{0}$

$$2\overrightarrow{G_2G}+2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{G_2G}+3\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{G_2G}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$6\overrightarrow{G_2G}+2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GG_2}=\frac{2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}}{6} \qquad (2)$$

. $G_3 = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{G_3A}+\overrightarrow{G_3B}+2\overrightarrow{G_3C}=\vec{0}$

$$3\overrightarrow{G_3G}+3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{G_3G}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{G_3G}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$6\overrightarrow{G_3G}+3\overrightarrow{GA}+1\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GG_3}=\frac{3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}}{6} \qquad (3)$$

D'après (1), (2) et (3), on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{GG_1}=\dfrac{\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}}{6} \\ \overrightarrow{GG_2}=\dfrac{2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}}{6} \\ \overrightarrow{GG_3}=\dfrac{3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}}{6} \end{cases}$$

On additionne membre à membre, on obtient :

$\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GG_2}+\overrightarrow{GG_3}=\dfrac{6\overrightarrow{GA}+6\overrightarrow{GB}+6\overrightarrow{GC}}{6}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ car G est le centre de gravité du triangle ABC.

On obtient donc $\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GG_2}+\overrightarrow{GG_3}=\vec{0}$.

On a bien donc G est le centre de gravité du triangle $G_1G_2G_3$.

Exemple : Étant donné un triangle ABC. Construire le barycentre G des points pondérés $(A,2)$, $(B,1)$ et $(C,1)$.

Solution

Le point G est tel que $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

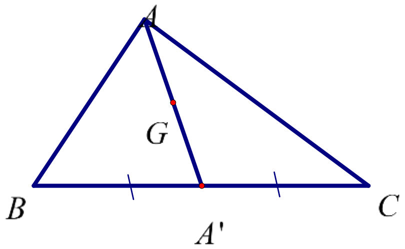
Soit A' le milieu de $[BC]$, on a :

$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\left(\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'B}\right)+\left(\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'C}\right)=2\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}=2\overrightarrow{GA'}$

Comme $\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$, on obtient donc $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GA'}=\vec{0}$

Ou $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA'}=\vec{0}$.

Donc G est milieu de $[AA']$.



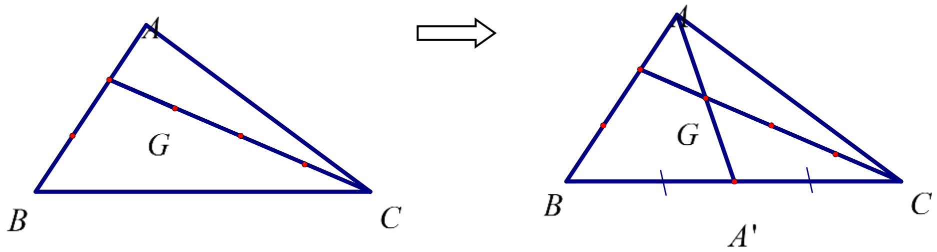
Remarque

Il suffit d'introduire le barycentre I de $(A,2)$ et $(B,1)$.

Nous avons alors :

$2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB}=3\overrightarrow{GI}$ car $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

puis $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Donc G est le barycentre de $(I,3)$ et $(C,1)$



4. Barycentre de quatre points

Exemple : Soit quatre points pondérés $(A,1)$, $(B,-1)$, $(C,2)$ et $(D,3)$. Il s'agit de montrer qu'il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}+3\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ et d'en donner une construction.

Solution

- Nous avons :

$$\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}+3\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GA}-\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)+2\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}\right)+3\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD}\right)=\vec{0}$$

$$=5\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AD}=\vec{0}$$

soit $5\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{5}\left(-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AD}\right)$

Cette dernière relation définit un point du plan et un seul.

- Construction du point G

On a : $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{BA}$

Soit I barycentre de $(C,2)$, $(D,3)$.

On a : $2\overrightarrow{IC} + 3\overrightarrow{ID} = \vec{0}$

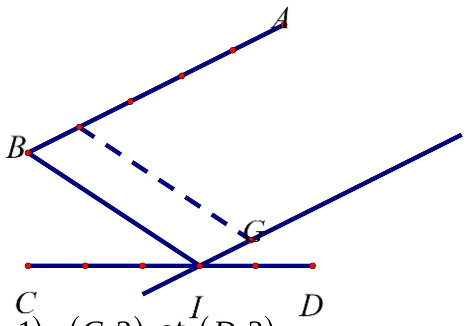
soit $2\overrightarrow{GC} + 3\overrightarrow{GD} = 2\left(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IC}\right) + 3\left(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{ID}\right) = 5\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{IC} + 3\overrightarrow{ID} = 5\overrightarrow{GI}$

On a donc : $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} + 3\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{BA} + 5\overrightarrow{GI} = \vec{0}$

Le point G est alors défini par $5\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{IG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BA}$

Méthode de construction

- sur le segment $[CD]$, placer le point I tel que $2\overrightarrow{IC} + 3\overrightarrow{ID} = \vec{0}$
- partager le segment $[AB]$ en 5 parties égales
- tracer la droite (AI)
- passant par I, tracer une parallèle à (AB)
- placer le point G tel que $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BA}$.



Ce point G est le barycentre des points $(A,1)$, $(B,-1)$, $(C,2)$ et $(D,3)$.

Exercices

1. Étant donné un parallélogramme $ABCD$, on désigne par I le milieu de $[AD]$ et par J le symétrique de D par rapport à C.
   Montrer que I est le barycentre de $(A,2)$, $(b,-1)$, $(C,1)$ et que J est le barycentre de $(A,-1)$, $(b,1)$ et $(C,1)$.
2. Tracer un quadrilatère $ABCD$ tel que le barycentre J de $(A,2)$ et $(B,3)$ est aussi le barycentre de $(C,1)$ et $(D,4)$.
   a. Calculer, pour tout point M du plan : $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-4\overrightarrow{MD}$
   b. En déduire D est le barycentre de $(A,2)$, $(B,3)$ et $(C,-1)$.
   c. Montrer que A est le barycentre de B, C et D avec des coefficients que l'on calculera.
3. Le plan étant muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(2,7)$ et $B(3,3)$.
   Calculer les coordonnées de :
   a. G_1 barycentre de $(A,2)$ et $(B,3)$
   b) G_2 isobarycentre de O, A et B
   c) G_3 barycentre de $(O,2)$, $(A,-1)$ et $(B,3)$
4. On considère un triangle ABC et l'on désigne par G le barycentre de $(A,1)$, $(B,4)$ et $(C,-3)$.
   a. Construire le barycentre I de $(B,4)$ et $(C,-3)$.
   b. Montrer que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GI}=\vec{0}$ et e déduire la position de G sur (AI).
5. On désigne par G le centre de gravité d'un triangle ABC, par A' le milieu de $[BC]$ et par L le barycentre $(A,-1)$, $(B,2)$ et $(C,2)$.
   a. Montrer que $4\overrightarrow{LA'}=\overrightarrow{LA}$. Construire L.
   b. Prouver que L et G sont symétriques par rapport à A'.
6. Soit G le barycentre de $(A,1)$, $(B,-1)$, $(C,2)$ et $(D,3)$.
   a. Soit J le barycentre de $(A,1)$, $(C,2)$ et K le barycentre de $(B,-1)$ et $(D,3)$.
   - Montrer que $3\overrightarrow{GJ}+2\overrightarrow{GK}=\vec{0}$.
   - Construire les points J, K et G
   b. Construire le barycentre L de $(A,1)$, $(B,-1)$ et $(C,2)$.
   - montrer que $2\overrightarrow{GL}+3\overrightarrow{GD}=\vec{0}$
   - En déduire une nouvelle construction de G.
7. Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O. Montrer que O est isobarycentre des sommets A, B, C et D.

8. Les points A, B, I et C tels que I est le milieu de $[AB]$ et C est le symétrique de A par rapport à B. Soit α et β deux réels tels que $\alpha+\beta\neq 0$.

   a. Vérifier que l'on peut définir les barycentres de :
   - (A,α), (B,β)
   - $(A,\alpha-\beta)$, $(I,2\beta)$
   - $\left(A,\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)$, $\left(C,\dfrac{\beta}{2}\right)$

   b. Faire la construction lorsque :
   - $\alpha=1$, $\beta=2$
   - $\alpha=-1$, $\beta=4$

9. Étant donné un triangle ABC, on considère le point I défini par
$5\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$.
Montrer que I est le barycentre de $(B,2)$ et $(C,2)$.

10. Tracer un quadrilatère $ABCD$, les milieux I et J de $[AB]$ et $[AD]$, et les points P et Q symétriques de B et D par rapport à C. Soit G le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,-2)$, $(D,1)$.

    a. Montrer que I et J sont les milieux respectifs de $[QG]$ et $[PG]$.

    b. Soit g le centre de gravité du triangle ABD.
    Montrer que G, C et g sont alignés, après avoir établi l'égalité : $3\overrightarrow{Gg}=2\overrightarrow{GC}$
    .

11. Placer dans un repère les points $A(1;2)$, $B(-3,4)$ et $C(-2,5)$. Soit G le barycentre de $(A,3)$, $(B,2)$ et $(C,-4)$. La droite (BG) passe-t-elle par l'origine du repère ?

12. Dans chacun des cas suivants, effectuer des constructions G le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ).

a. $\alpha=\beta=1$, $\gamma=2$	b. $\alpha=-2$, $\beta=-4$, $\gamma=-1$
c. $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=4$	d. $\alpha=\gamma=1$, $\beta=0$
e. $\alpha=-2$, $\beta=-3$, $\gamma=\dfrac{1}{2}$	f. $\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\beta=\dfrac{1}{3}$, $\gamma=\dfrac{1}{4}$

13. Deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont pour isobarycentre G et G'.

    a. Montrer que $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$

    b. En déduire que ABC et $A'B'C'$ ont même centre de gravité si, et seulement si, $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$.