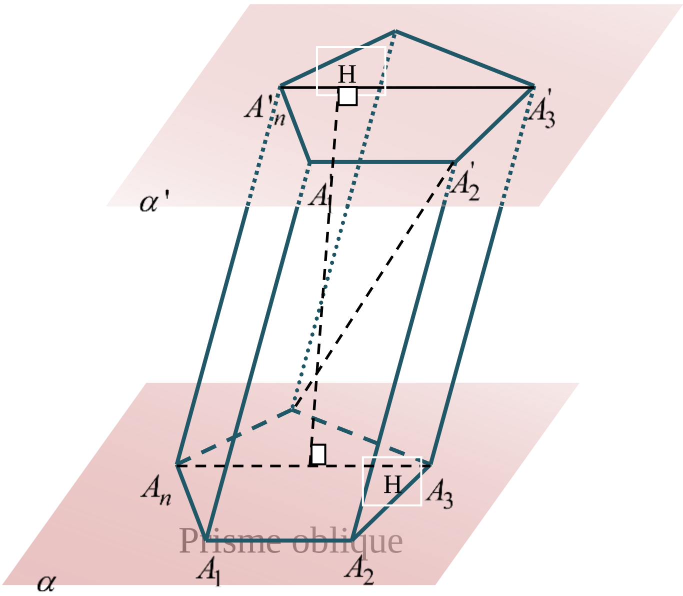
Leçon 38 Solide

I. Le prisme

1. Définition

- Un prisme est un solide dont les deux faces sont les polygones parallèles appelées « ***bases*** ». Elles sont superposables : $A_1A_2A_3\ldots A_n = A_1^{'}A_2^{'}A_3^{'}\ldots A_n^{'}$;
- Les autres faces sont les parallélogrammes. Ce sont les « *faces latérales* » : $A_1A_2A_2^{'}A_1^{'}$, $A_2A_3A_3^{'}A_2^{'}, \ldots.$;
- Le segment $[A_1A_1^{'}]$ est appelé l'arête latéral du prisme : $A_1A_1^{'} = A_2A_2^{'} = A_3A_3^{'} = \ldots$
- La « *hauteur* » du prisme est le segment perpendiculaire à deux bases du prisme $[HH']$;
- $[A_4A_2^{'}]$ est la diagonale du prisme ;
- A_1A_2 côté de base.



Prisme oblique

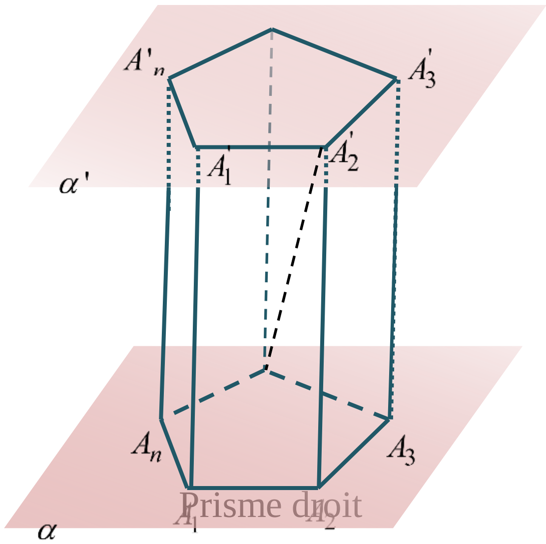
$$A_1A_2A_3\ldots A_n = A_1^{'}A_2^{'}A_3^{'}\ldots A_n^{'}, \quad (\alpha)//(\alpha')$$
$$A_1A_1^{'} = A_2A_2^{'} = A_3A_3^{'} = \ldots = A_nA_n^{'}$$
$$A_1A_1^{'} // A_2A_2^{'} // A_3A_3^{'} // \ldots // A_nA_n^{'}.$$

Prisme droit

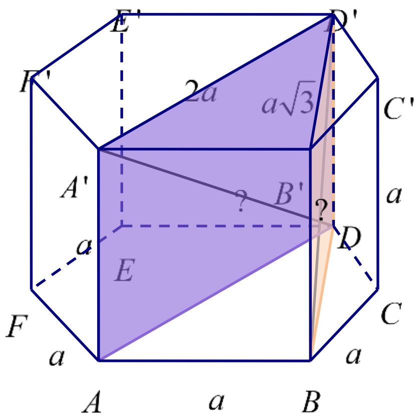
- Un prisme droit est un prisme dont les arêtes sont perpendiculaires à la base.
- Sa hauteur est son arête

Prisme régulier

- Un prisme régulier est un prisme dont les bases sont les polygones réguliers.



Exemple : Soit un prisme droit d'arête a.



. La section $AA'D'D$ est un rectangle de longueur $A'D' = 2a$ et de largeur $AA' = a$.

Cette section a pour diagonal :

$$A'D = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = \sqrt{5a^2} = a\sqrt{5}$$

. La section $BB'D'D$ est un rectangle de longueur $B'D' = a\sqrt{3}$ et de largeur $BB' = a$.

Cette section a pour diagonal :

$$BD' = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + a^2} = \sqrt{4a^2} = 2a$$

2. Aire d'un prisme

Aire latérale

L'aire latérale A_L d'un prisme droit est la somme des aires de ses faces latérales, est égale au produit du périmètre p de base par la hauteur h du prisme.

- $\text{Aire laterale} = (\text{périmètre de base}) \times \text{hauteur}$

$$A_l = p \times h$$

Aire totale

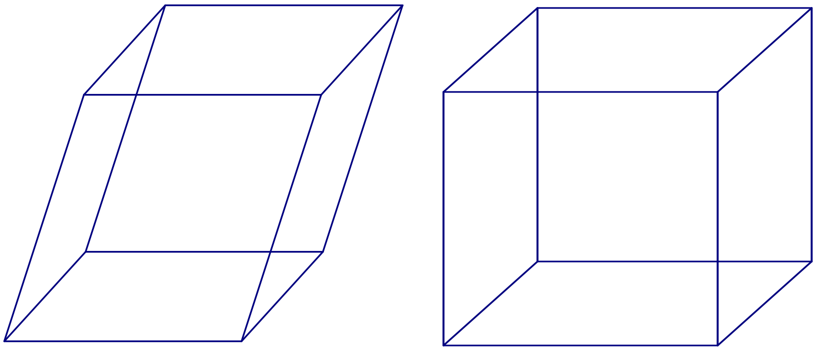
L'aire totale A_T d'un prisme droit est la somme d'aire latérale et celle de deux bases.

- $\text{Aire totale} = 2 \times (\text{aire de base}) + (\text{aire latérale})$

$$A_t = 2 \times B + A_l$$

Le pavé droit

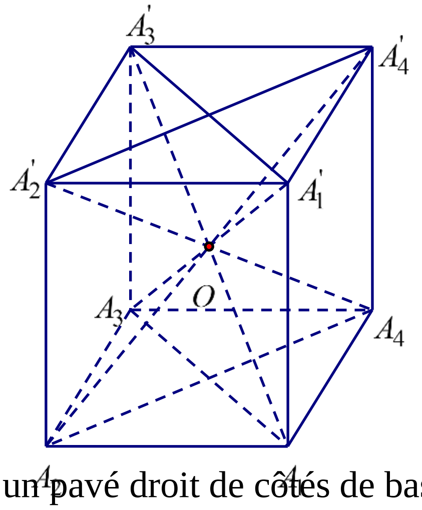
Un pavé est un prisme dont les bases sont les parallélogrammes.



Pavé oblique pavé droit

Théorème

Les diagonales d'un pavé se coupent en leur milieu O.
On dit que O est son centre de symétrie.



Exemple : Soit un pavé droit de côtés de bases $3cm$ et $5cm$. Une diagonale de base égale $4cm$. Calculer la longueur de la diagonale longue sachant que la diagonale large et la base forment un angle de 60°.

Solution

$ABCD$ est un parallélogramme. On suppose que $AD = BC = 3cm$, $AB = DC = 5cm$, $BD = B_1D_1 = 4\,cm$ et $B\hat{D}_1B_1 = 60^\bullet$.

Donc $AC > BD$ et $A_1C > BD_1$.

On calcule A_1C.

. Dans le triangle A_1AC rectangle en A : $A_1C^2 = AC^2 + A_1A^2$ ....(1)

Comme $A_1A = B_1B$

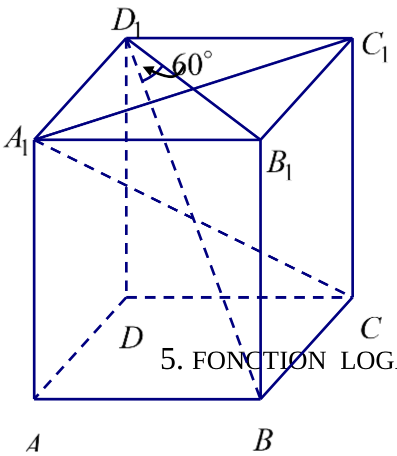
. Dans le triangle D_1B_1B rectangle en B_1, on a :

$$\frac{B_1B}{B_1D_1} = \tan 60^\bullet \Rightarrow BB_1 = B_1D_1 \tan 60^\bullet$$

$$AA_1 = BB_1 = B_1D_1 \tan 60^\bullet = 4\sqrt{3}$$

. Dans le parallélogramme $ABCD$, on a :

$$BD^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2AB^2$$

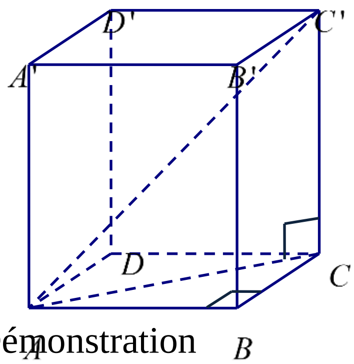


$4^2+AC^2=2\times3^2+2\times5^2$
$AC^2=68-16-48=52$
$AC=\sqrt{52}$
. reporter $AC=\sqrt{52}$ et $AA_1=4\sqrt{3}$ dans (1), on obtient donc :
$A_1C^2=AC^2+A_1A^2=\left(\sqrt{52}\right)^2+\left(4\sqrt{3}\right)^2=52+48=100$
Donc $A_1C=\sqrt{100}=10cm$

Remarque

- Un pavé droit dont la base est un rectangle est appelé un parallélépipède ;
- Un pavé droit dont la base est un carré est appelé un cube ;
- Trois arêtes issues d'un sommet sont appelées les dimensions.

Théorème
Dans un parallélépipède le carré d'une diagonale est égal à la somme du carré de ces trois dimensions.



$$AC'^2=CC'^2+AB^2+BC^2$$

Démonstration

. Dans le triangle ABC rectangle en B : $AC^2=AB^2+BC^2$
. Dans le triangle ACC' rectangle en C : $AC'^2=AC^2+C'C^2$
Donc $AC'^2=\left(AB^2+BC^2\right)+C'C^2=AB^2+BC^2+C'C^2$

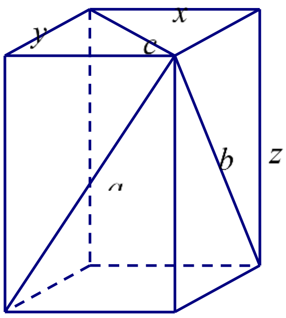
Exemple : Soit un parallélépipède de trois diagonales de trois faces latérales issues de même sommet sont égales respectivement a,b,c. Calculer les dimensions de ce parallélépipède.

Solution

Soit x,y,z trois dimensions de ce parallélépipède.

On a :

$$\begin{cases} x^2+y^2=c^2 & (1)\\ y^2+z^2=b^2 & (2)\\ x^2+z^2=a^2 & (3)\end{cases}$$



. $(1)+(2)-(3)$, on obtient :
$2y^2=b^2+c^2-a^2$
$y=\sqrt{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}}$

. $(1)+(3)-(2)$, on obtient : $2x^2 = a^2+c^2-b^2 \Rightarrow y = \sqrt{\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2}}$

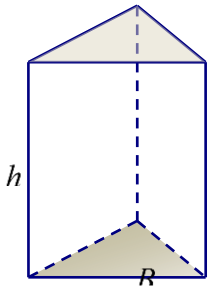
. $(2)+(3)-(1)$, on obtient : $2z^2 = a^2+b^2-c^2 \Rightarrow z = \sqrt{\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2}}$

3. Volume d'un prisme

Le volume d'un prisme droit d'aire de base B et de hauteur h a pour volume :

- $\text{Volume} = \text{aire de base} \times \text{hauteur}$

$$V = B \times h$$



Corollaire

Le volume d'un prisme oblique de hauteur h est calculé par :

- $\text{Volume} = \text{aire de la section principale} \times \text{arete latérale}$

Exemple 1 : Soit un prisme de hauteur $9cm$. Sa base est un pentagone de côté $2cm$. Calculer son volume.

Solution

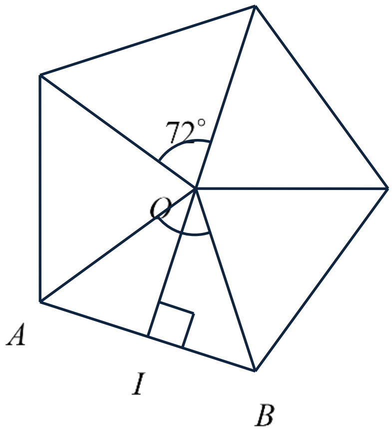
Son aire de base :

$$B = 5\Delta_{AOB} = \frac{5}{2} AB \times OI$$

$$AB = 2cm$$

$$\frac{OI}{AI} = \tan\frac{\hat{O}}{2} \Rightarrow OI = \frac{AI}{\tan\frac{\hat{O}}{2}}$$

$$OI = \frac{1}{\tan 36^\circ} \approx \frac{1}{073} \approx 1{,}38$$



Donc $B \approx \frac{5}{2} \times 2cm \times 1{,}38cm \approx 6{,}9cm^2$

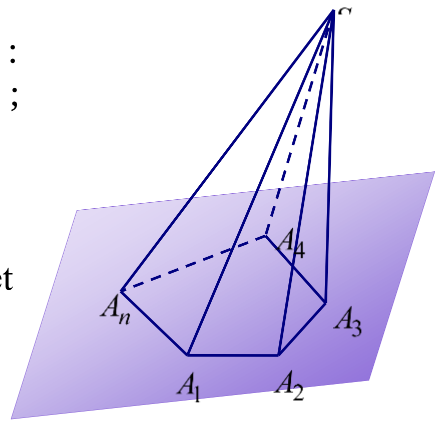
Et le volume est: $V = Bh \approx 6{,}9cm^2 \times 9cm \approx 62{,}1cm^3$.

II. Pyramide

1. Définition

Une pyramide de sommet S est un solide dont :

- Une face est un polygone appelé ***base*** ;
- Toutes les ***faces latérales*** sont des triangles qui ont un sommet commun : le ***sommet*** **S** de la pyramide.
- La hauteur d'une pyramide de sommet S est le segment $[SH]$ porté par la perpendiculaire en H au plan de la base.



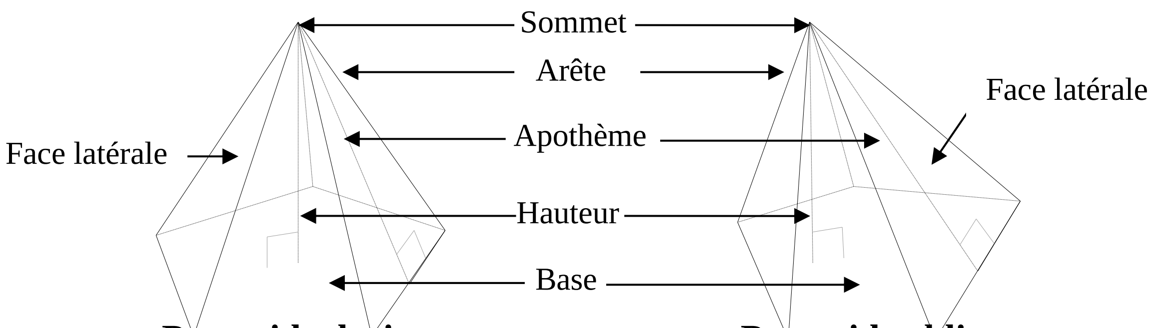
Pyramide régulière de sommet S.

Définition :

Une pyramide de sommet S est dite régulière lorsque :

- sa base est un polygone régulier : triangle équilatéral, carré, …
- sa hauteur passe par le centre de ce polygone.
- les faces latérales d'une pyramide régulière sont des triangles isocèles superposables.
- la hauteur de la face latérale est appelée l'apothème.

Exemple : Pyramide à base pentagone



Pyramide droite **Pyramide oblique**

Exemple : Soit une pyramide régulière de hauteur $13cm$. Sa base est un rectangle de dimensions $6cm$ et $8cm$. Quelle est sa hauteur.

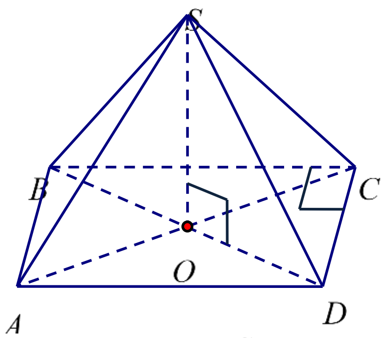
Solution

Le triangle SOA est rectangle en O :

Donc $SO=\sqrt{SA^2-OA^2}$

$OA=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+8^2}=5cm$

Et $SO=\sqrt{13^2-5^2}=12cm$.



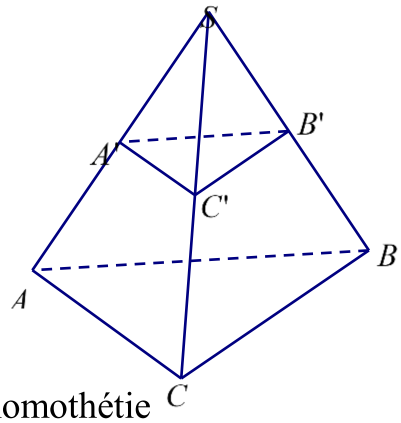
Théorème

La section de la pyramide par un plan passant par les arêtes et parallèle à sa base est la base de la petite pyramide semblable à la pyramide initiale.

On a : $\frac{SA'}{SA}=k$

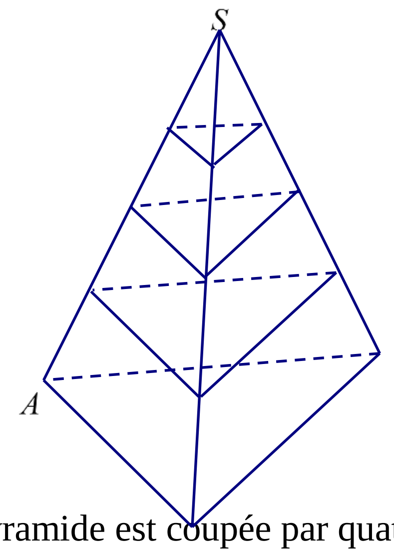
$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=k^2$

$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=k^3$, k est le coefficient de l'homothétie



Exemple : Une pyramide régulière est coupée par quatre plans équidistants. Quelle

est l'aire de chaque section telle que son aire de base est de $400cm^2$?
Solution



Cette pyramide est coupée par quatre plans équidistants.
On a donc quatre pyramides semblables.
Donc

. $\frac{B_1}{B} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow B_1 = \frac{1}{16} \times B = \frac{1}{16} \times 400 = 25cm^2$

. $\frac{B_2}{B} = \left(\frac{2}{4}\right)^2 \Rightarrow B_2 = \frac{1}{4} \times B = \frac{1}{4} \times 400 = 100cm^2$

. $\frac{B_3}{B} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow B_3 = \frac{9}{16} \times B = \frac{9}{16} \times 400 = 225cm^2$

2. **Aire d'une pyramide**

. L'aire latérale

L'aire latérale d'une pyramide est la somme des aires de toutes les faces latérales.

. L'aire totale

L'aire totale d'une pyramide est la somme de l'aire latérale et de l'aire de la base.

$$\text{Aire totale} = \text{aires latérales} + \text{aire de base}$$

$$S_t = S_l + B$$

S_t : aire totale

S_l : aire latérale

B : aire de la base

Théorème

L'aire latérale d'une pyramide droite est égale à la moitié du produit du périmètre de base et l'apothème.

$S_l = pd$, p : demi périmètre de base

d : apothème (hauteur de la face latérale)

3. **Volume d'une pyramide**

Le volume V d'une pyramide est égal au tiers du produit de l'aire B de sa base par sa hauteur h.

$$\text{Volume de pyramide} = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

$$V = \frac{1}{3} \mathrm{B}\, h, \quad \text{B : aire de la base}$$

h : hauteur

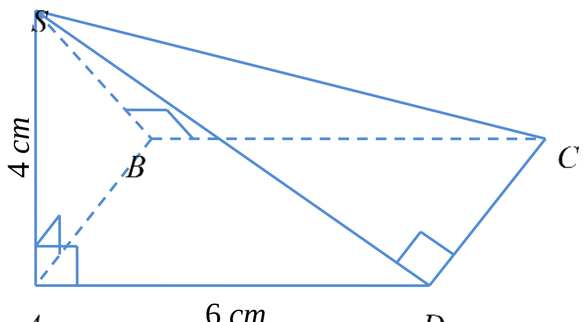
Exemple 1 : Soit une pyramide $S.ABCD$ à base carré de côté $6cm$. $SA = 4cm$ et perpendiculaire à la base. Calculer :

a. SB, SD, SC.

b. Son aire latérale et son aire totale

c. Son volume.

Solution



a. Le triangle SAB est rectangle en A :

$$SB^2 = SA^2 + AB^2 = 4^2 + 6^2 = 52 \Rightarrow SB = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \approx 7,21$$

Donc $SB \approx 7,21cm$.

. Le triangle SAD est rectangle en A :

$$SD^2 = SA^2 + AD^2 = 4^2 + 6^2 = 52 \Rightarrow SB = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \approx 7,21$$

Donc $SD \approx 7,21cm$.

. Le triangle SBC est rectangle en B :

$$SC^2 = SB^2 + BC^2 = 52 + 6^2 = 89 \Rightarrow SB = \sqrt{89} \approx 9,43$$

Donc $SC \approx 9,43cm$.

b. . $S_l = S_{SAB} + S_{SAD} + S_{SBC} + S_{SCD}$

$$S_l = \frac{1}{2} SA \times AB + \frac{1}{2} SA \times AD + \frac{1}{2} SB \times BC + \frac{1}{2} SD \times CD$$

$$S_l = \frac{1}{2}(4 \times 6 + 4 \times 6 + 7,21 \times 6 + 7,21 \times 6) = 67,26cm^2$$

. $S_l = S_l + B$

$$S_l = 67,26 + 6^2 = 67,26 + 36 = 103,26cm^2$$

c. $V = \frac{1}{3} B \times SA$

$$V = \frac{1}{3} \times 36cm^2 \times 4cm = 48cm^3.$$

Exemple 2 : Soit une pyramide régulière à base hexagone d'arête 2. Quelle est son aire totale telle que l'angle entre l'arête et la base est de 60° ?

Solution

D'après la formule $S_t = S_l + B$

. On a la formule $S_l = pd$

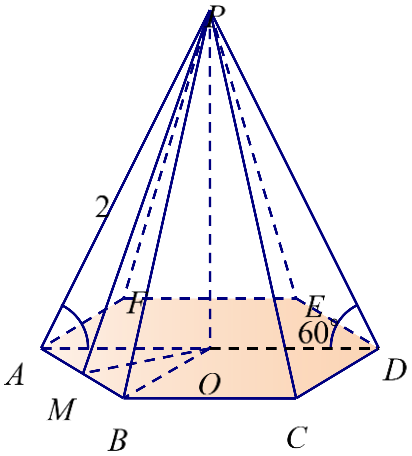
Tels que $p = 3AB = 3OA$, $d = PM$

Le triangle POA est rectangle en O :

$$\frac{OA}{PA} = \cos 60^\circ \Rightarrow OA = PA \times \cos 60^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

Donc $p = 3AB = 3OA = 3$

. On calcule $d = PM$



Le triangle PMA est rectangle en M :

$$PM^2 = PA^2 - AM^2 = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

Donc $d = PM = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$

$$S_l = pd = 3 \times \frac{\sqrt{15}}{2} = \frac{3\sqrt{15}}{2}$$

. On calcule l'aire de la base B

On a $B = 6 \times \dfrac{1}{2} \times OA \times OM$

$$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc $B = 6 \times \dfrac{1}{2} \times 1 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

On obtient donc l'aire totale :

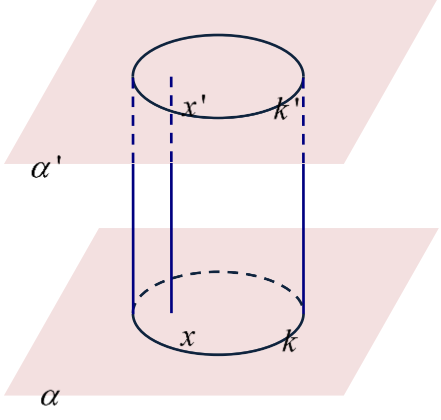
$$S_t = S_l + B = \frac{3\sqrt{15}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\left(\sqrt{15} + \sqrt{3}\right)$$

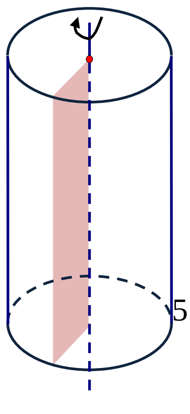
III. Cylindre

1. Définition :

Un cylindre de révolution est un solide qui a :

- deux disque de même rayon pour plans parallèles α et α' ; on les appelle les bases ;
- une surface latérale qui peut être déroulée en un rectangle.
- la hauteur d'un cylindre de révolution est la longueur du segment qui joint les centres des bases.





Remarque
- La section du cylindre par le plan passant par l'axe est un rectangle.
- Le plan passant par la génératrice, perpendiculaire à la génératrice et au plan passant par l'axe est appelé le plan tangent au cylindre.

Exemple : La section du cylindre par le plan passant par l'axe est un carré d'aire Q. Calculer l'aire de la base de ce cylindre.

Solution

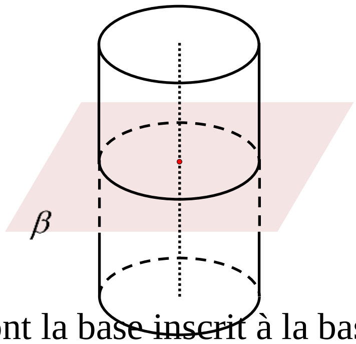
$\sqrt{Q}$ le côté du carré est le diamètre de la base du cylindre.

D'après la formule $B=\pi R^2$,

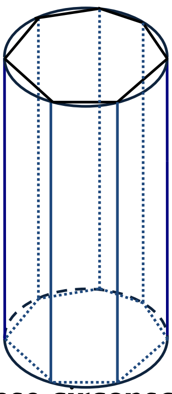
on obtient donc $B=\pi\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right)^2=\frac{\pi Q}{4}$.

Théorème

- La section du cylindre perpendiculaire à l'axe est un disque superposable à sa base.

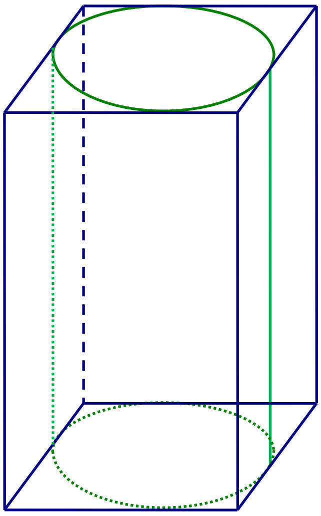


- Le prisme dont la base inscrit à la base du cylindre est appelé prisme inscrit au cylindre.



.

- Le prisme dont la base circonscrit à la base du cylindre est appelé prisme circonscrit au cylindre.



2. Aire et volume

Soit le cylindre de hauteur h et de rayon de base r.

On a :

. Aire de base : $B = \pi r^2$

. Aire latérale : $S_l = 2\pi r h$

. Aire totale : $S_t = 2B + S_l = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r+h)$

. Volume : $V = Bh = \pi r^2 h$

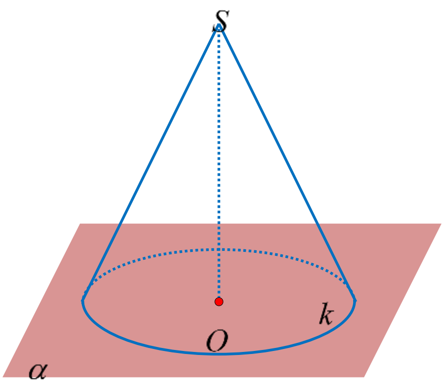
IV. Cône

1. Définition

a. Un cône de sommet S.

Un cône de sommet S est un solide limité par des droites concourantes au sommet S et une base.

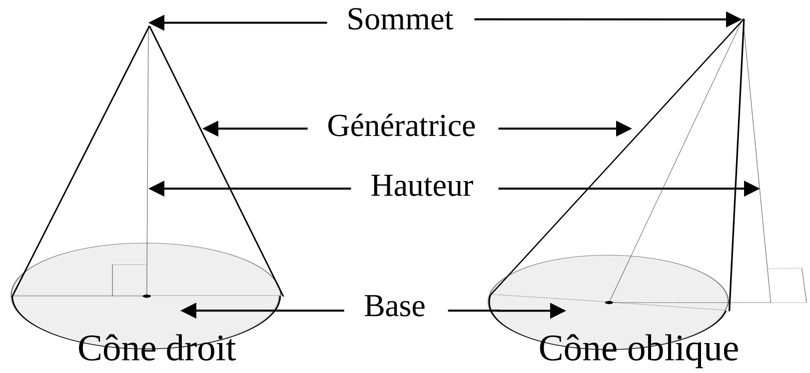
La hauteur est la distance entre la base et le sommet.



b. Un cône de révolution

Un cône de révolution a pour sommet S et pour base, un disque de centre O. La hauteur de ce cône est le segment $[SO]$ (ou la longueur SO).

Le segment $[SO]$ est perpendiculaire au plan de la base.



Remarque

La section du cône passant par l'axe est un triangle isocèle ou équilatéral.

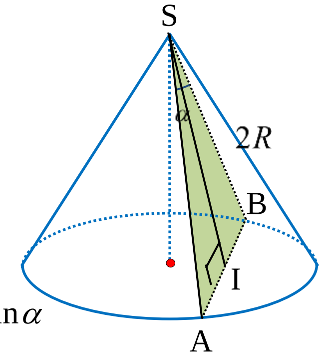
Exemple : Soit le cône de rayon de base R. Quelle est l'aire de la section passant par deux génératrices d'angle α sachant que la section passant par l'axe est un triangle équilatérale.

Solution

. La section passant par l'axe est un triangle équilatérale. Donc le diamètre de la base et la génératrice sont égaux : $2R = g$

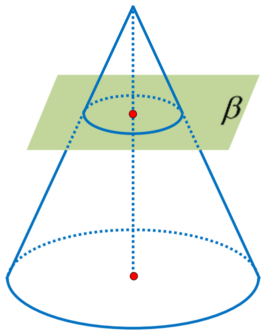
. L'aire demandée est calculée par :

$$S = \frac{1}{2} SA \times SB \times \sin\alpha = \frac{1}{2} \times 2R \times 2R \sin\alpha = 2R^2 \sin\alpha$$



Théorème

- La section du cône perpendiculaire à l'axe est un cercle dont le centre situé à l'axe.

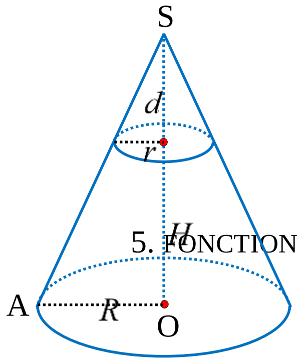


Exemple : Soit le cône de rayon de base R et de hauteur H. Calculer l'aire de la section parallèle à la base de distance d de son sommet.

Solution

Dans le triangle rectangle SOA, on a :

$$\frac{r}{R} = \frac{d}{H} \Rightarrow r = \frac{Rd}{H}$$



On obtient donc : $S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{Rd}{H} \right)^2$

2. **Aire et volume**

Soit le cône de hauteur h et de rayon de base r.

On a :

. Aire de base : $B = \pi r^2$

. Aire latérale : $S_l = \pi r g$

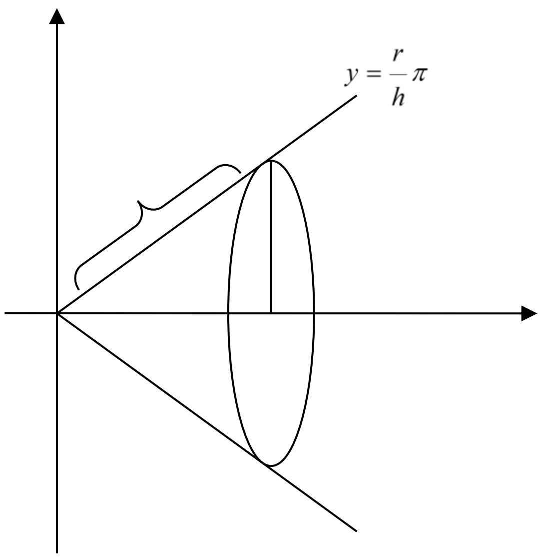
. Aire totale : $S_t = B + S_l = \pi r^2 + \pi r g = \pi r (r + g)$

. Volume : $V = \frac{1}{3} B h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

Démonstration

. Aire latérale : $S_l = \pi r g$

On a :



$$S_l = 2\pi \int_0^h \frac{r}{h} \cdot x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h} \right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \frac{r}{h} \cdot \frac{h^2}{2} \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}}$$

$$= \pi r h \sqrt{\frac{h^2 + r^2}{h^2}}$$

$$= \pi r \sqrt{h^2 + r^2}, \quad \sqrt{h^2 + r^2} = g$$

$$S_l = \pi r g$$

. Volume : $V = \frac{1}{3} B h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{h}} x \right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$= \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Exercices

1. Soit le prisme à base triangulaire de côté $10cm$, $17\ cm$ et $21\ cm$. Calculer l'aire de la section passant par la hauteur minimale de la base sachant que la hauteur de ce prisme est de $18cm$.
2. Soit le prisme oblique d'arête $15cm$. Calculer la hauteur de ce prisme sachant que son arête et sa base forment un angle de 30°.
3. Soit le prisme à base hexagone régulier de côté a. Calculer l'aire de la section passant par la diagonale de ce prisme sachant que la face latérale est un carré.
4. Soit le prisme régulier à base hexagone de côté a. Calculer l'aire de la section passant par deux côtés opposés de deux bases.
5. Soit le prisme régulier à base carré d'aire $144cm^2$. Calculer la diagonale de ce prisme sachant que sa auteur est de $14cm$.
6. Soit le prisme régulier à base carré de côté $15cm$. Calculer la distance minimale du côté de la base à la diagonale de ce prisme sachant que sa hauteur est de $20cm$.
7. Calculer la hauteur du prisme régulier à base carré sachant que son aire latérale est de $32cm^2$ et son aire totale est de $40cm^2$.