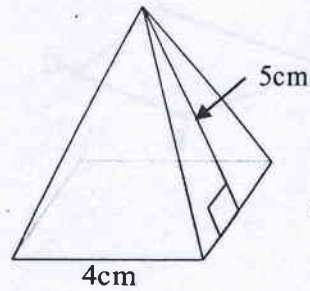
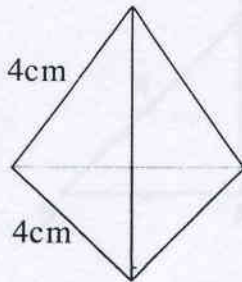


## Chapitre III : Aires et volumes

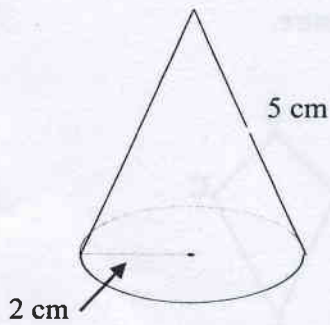
### Leçon 11: Aires de pyramides, de cônes.

#### Activités

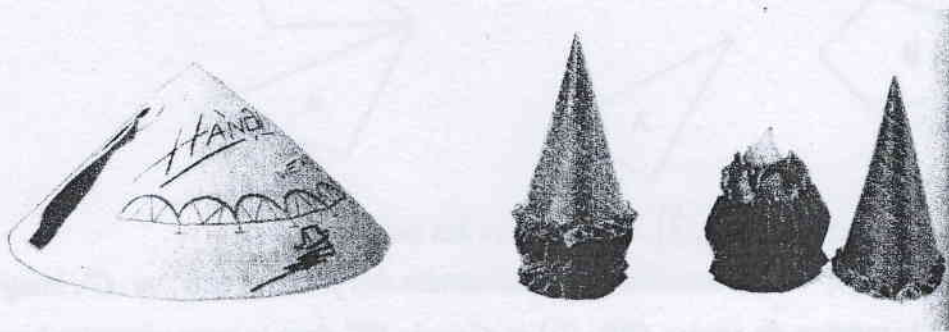
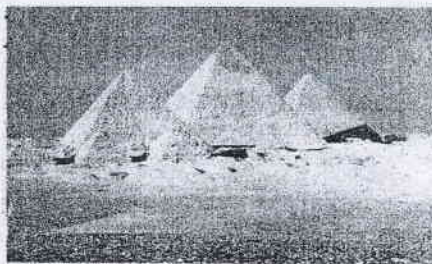
1. Dessiner en vraie grandeur un patron de chaque figure représentée en perspective ci-dessous. Laisser apparents les traits de construction.
2.
  - a. Toutes les arêtes mesurent 4 cm.
  - b. la base est un carré



- c. la base est un disque



#### Le cours



## 1. Les pyramides

### a. Pyramide de sommet S.

Définition.

Une pyramide de sommet S est un solide dont :

- Une face est un polygone appelé *base* ;
- Toutes les *faces latérales* sont des triangles qui ont un sommet commun : le *sommet* S de la pyramide.

La hauteur d'une pyramide de sommet S est le segment  $[SH]$  porté par la perpendiculaire en H au plan de la base.

*La longueur SH est aussi appelée hauteur de cette pyramide.*

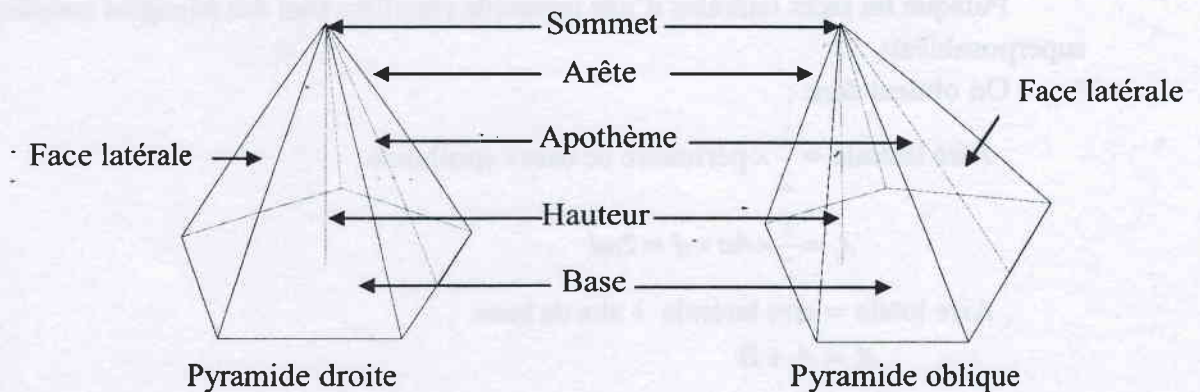
### b. Pyramide régulière de sommet S

Définition

Une pyramide de sommet S est dite régulière lorsque :

- sa base est un polygone régulier : triangle équilatéral, carré, ...
- sa hauteur passe par le centre de ce polygone.
  - les faces latérales d'une pyramide régulière sont des triangles isocèles superposables.
  -

Exemple : Pyramide à base pentagone



### b. Aire d'une pyramide

. L'aire latérale

L'aire latérale d'une pyramide est la somme des aires de toutes les faces latérales.

. L'aire totale

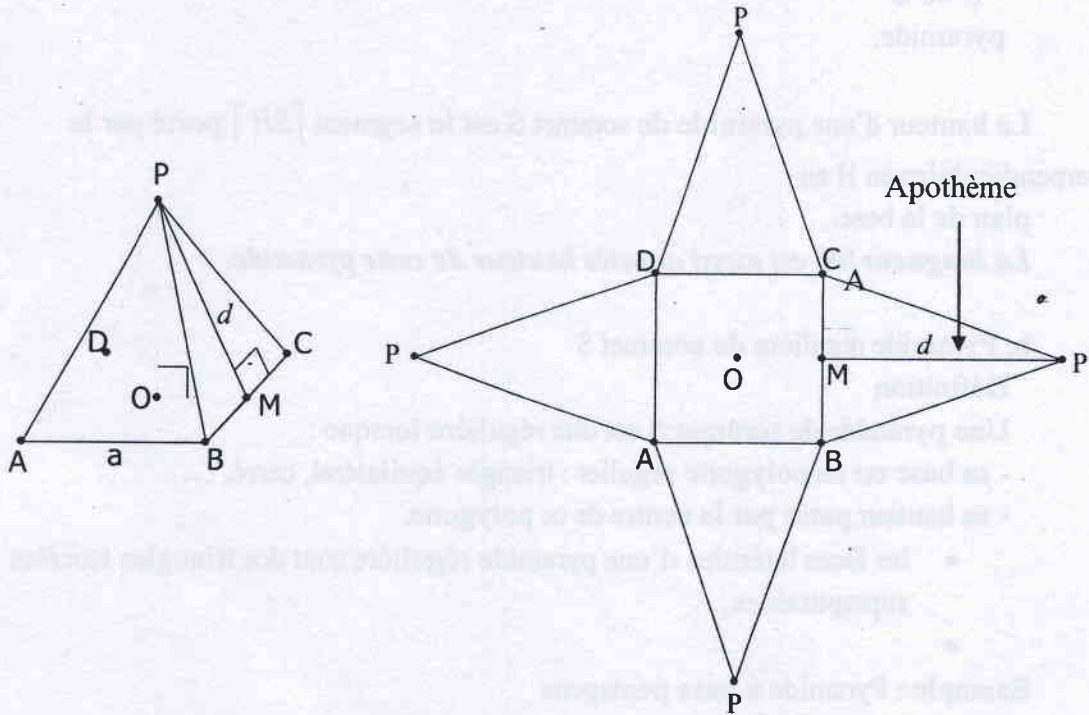
L'aire totale d'une pyramide est la somme de l'aire latérale et de l'aire de la base.

$$\text{Aire totale} = \text{aires latérales} + \text{aire de base}$$

$$A_t = A_l + B$$

$A_t$  : aire totale  
 $A_l$  : aire latérale  
 $B$  : aire de la base

Exemple 1: La figure ci-dessous représente une pyramide régulière de base le carré de côté  $a$  et d'apothème  $d$ . Calculer son aire latérale et son aire totale.



Puisque les faces latérales d'une pyramide régulière sont des triangles isocèles superposables.

On obtient donc :

Aire latérale =  $\frac{1}{2} \times \text{périmètre de base} \times \text{apothème}$

$$A_l = \frac{1}{2} \times 4a \times d = 2ad$$

Aire totale = aire latérale + aire de base

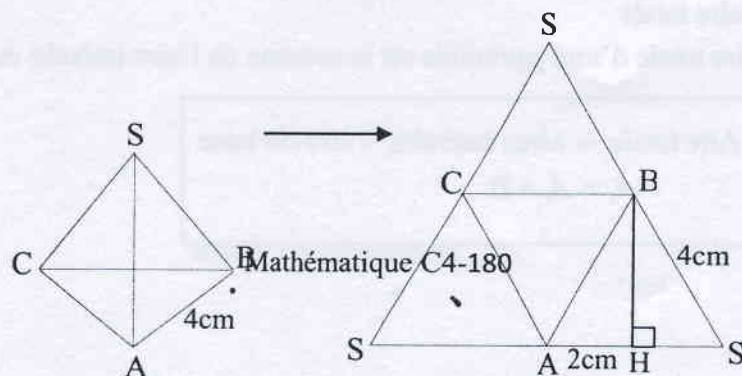
$$A_t = A_l + B$$

$$A_t = 2ad + a^2$$

Exemple 2 : La figure ci-dessous représente une pyramide régulière à base triangulaire (tétraèdre régulier) dont toutes les arêtes mesurent 4cm.

Calculer son aire latérale et son aire totale.

Solution :





Puisque toutes les faces de cette pyramide sont des triangles équilatéraux superposables.

On obtient donc :

$$\cdot \text{Aire latérale} = 3 \times A_{\Delta ABS} \text{ où } A_{\Delta ABS} = \frac{1}{2} \times AS \times BH$$

$$A_l = 3 \times \frac{1}{2} \times AS \times BH \text{ où } BH = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$$

$$A_l = 3 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\cdot \text{Aire totale} = 4 \times A_{\Delta ABS}$$

$$A_t = 4 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

## 2. Les cônes

### a. Un cône de sommet S

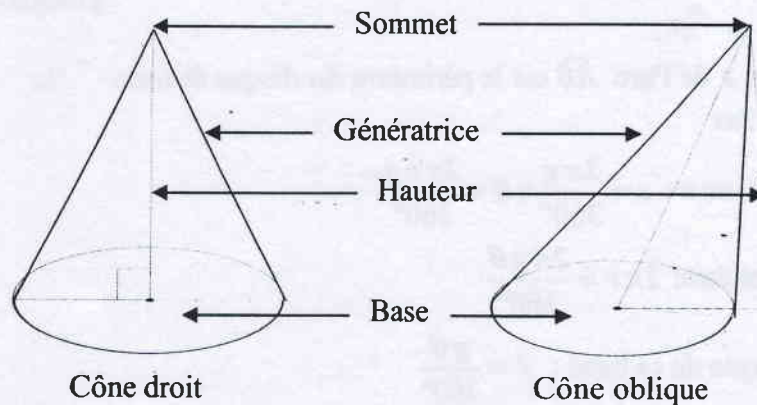
Un cône de sommet S est un solide limité par des droites concourantes au sommet S et une base.

La hauteur est la distance entre la base et le sommet.

### b. Un cône de révolution

Un cône de révolution a pour sommet S et pour base, un disque de centre O. La hauteur de ce cône est le segment  $[SO]$  (ou la longueur SO).

Le segment  $[SO]$  est perpendiculaire au plan de la base.



### c. Aire d'un cône de révolution

L'aire latérale d'un cône de révolution est égale à la moitié du produit du périmètre de base par la longueur d'une génératrice.

$$\text{Aire latérale d'un cône} = \frac{1}{2} \times \text{périmètre de base} \times \text{génératrice}$$

$$A_l = \frac{1}{2} \times p \times g$$

$$A_l = \frac{1}{2} \times (2\pi r) \times g = \pi r g$$

r : rayon de base

g : génératrice

. L'aire totale d'un cône de révolution est égale à la somme d'aire latérale et d'aire de base.

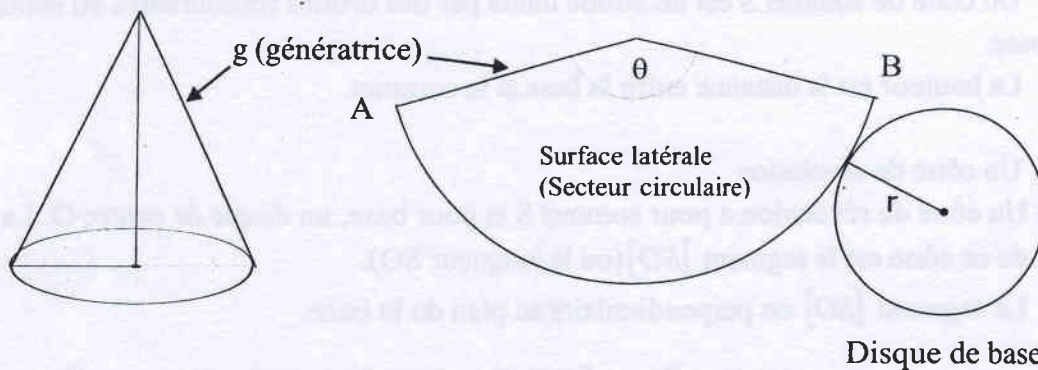
Aire totale d'un cône = aire latérale + aire de base

$$A_t = \frac{1}{2} \times p \times g + \mathcal{B}$$

$$A_t = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g+r)$$

Patron d'un cône :

Le patron d'un cône est formé d'un disque (pour la base) et d'un secteur circulaire d'angle au centre  $\theta$  (pour la surface latérale).



- La longueur  $s$  de l'arc  $\widehat{AB}$  est le périmètre du disque de base.

$$s = 2\pi r$$

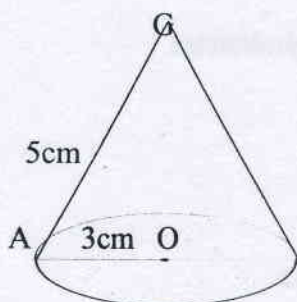
- D'autre part, on a :  $s = \frac{2\pi g}{360^\circ} \times \theta = \frac{2\pi r g}{360^\circ}$

$$\text{On obtient donc } 2\pi r = \frac{2\pi g \theta}{360^\circ}$$

$$\text{d'où le rayon de sa base : } r = \frac{g \theta}{360^\circ}$$

Exemple 1 : Soit un cône de 5cm de génératrice et de 3cm de rayon de la base. Calculer son aire latérale et son aire totale.

Solution :



On a :

$$A_l = \pi r g$$

$$= \pi \times 3 \times 5 = 15\pi \text{ cm}^2$$

$$A_t = 15 \times 3,14 = 47,10 \text{ cm}^2$$

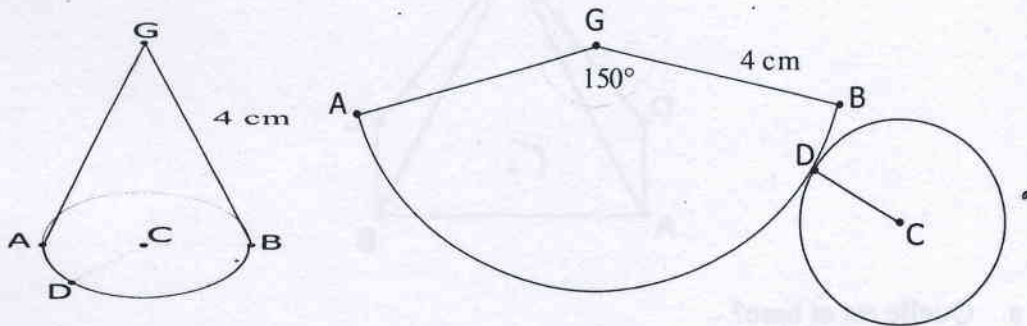
$$A_t = A_l + B$$

$$A_l = 15\pi + \pi r^2$$

$$= 15\pi + 3^2\pi = 24\pi \text{ cm}^2$$

$$A_t = 24 \times 3,14 = 75,36 \text{ cm}^2$$

Exemple 2 : Soit un cône de 4cm de génératrice. Son patron est formé d'un disque et d'un secteur circulaire d'angle  $\theta = 150^\circ$ . Calculer son aire latérale et son aire totale.



Solution :

On calcule le rayon de sa base :

$$r = \frac{g\theta}{360^\circ} = \frac{4 \times 150^\circ}{360^\circ} = \frac{4 \times 15}{36} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \text{ d'où } r = \frac{5}{3} \text{ cm}$$

On obtient donc :

$$\text{Son aire latérale : } A_l = \pi r g = 3,14 \times \frac{5}{3} \times 4 = \frac{3,14 \times 5 \times 4}{3} = 20,93 \text{ cm}^2$$

$$\text{Son aire de base : } B = \pi r^2 = 3,14 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2 = 3,14 \left(\frac{25}{9}\right) = 8,72 \text{ cm}^2$$

• Son aire totale :

$$A_t = A_l + B$$

$$A_t = 20,93 \text{ cm}^2 + 8,72 \text{ cm}^2 = 29,65 \text{ cm}^2$$