

Leçon 7 : Le plus petit commun multiple (ppcm) et le plus grand commun diviseur (pgcd)

1. Activités

Activité 1

1. Compléter le tableau suivant.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	6								30

2. Comment s'obtiennent les nombres de la deuxième ligne ?
3. Ecrire les entiers naturels de 1 à 42 puis crocher les multiples de 4
4. Donner six multiples de 4.
5. Donner quatre différents multiples consécutifs de 4.
Que constatez-vous?

Activité 2

1. Entourer les multiples de 7 des nombres suivants
21; 25; 28; 29; 35; 37; 42; 45; 48; 63; 91; 93; 140; 143.
2. Donner six multiples de 7.
3. Compléter les phrases suivantes
 - Si un entier naturel a est un multiple de 7, alors on a : $a = 7 \times \dots$
 - Si un entier naturel a n'est pas multiple de 7,
alors on a : $a = 7 \times \dots + \dots$

↑
entier naturel inférieur à 7

En général

Soient a et b deux entiers naturels, on a :

a est un multiple de b s'il existe un naturel q tel que $a = bq + r$ où $r = 0$

c'est-à-dire $a \div b = q$.

On dit que a est divisible par b .

2. Essentiel

1. Multiples des entiers naturels

Les multiples d'un entier naturel a sont le produit de a par les entiers naturels $1, 2, 3, \dots$

Exemples : L'ensemble de multiples de 3 est $3\mathbb{N} = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$

L'ensemble de multiples de 4 est $4\mathbb{N} = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$

a. Multiple commun

On appelle multiple commun à deux nombres ou plusieurs nombres naturels tout nombre multiple de chacun d'eux.

b. plus petit commun multiple (ppcm)

Le plus petit des multiples communs à deux nombres a et b s'appelle leur plus petit commun multiple et se note $\text{ppcm}(a,b)$

Exemple 1 : Calculer le plus petit commun multiple de 3 et 4.

On a : • l'ensemble de multiples de 3 est :

$$3N = \{3, 6, 9, \underline{12}, 15, 18, 21, 24, 27, \dots\}$$

• l'ensemble de multiples de 4 est :

$$4N = \{4, 8, \underline{12}, 16, 20, 24, 28, 32, 36, \dots\}$$

• l'ensemble de multiples de 3 et 4 est :

$$12N = \{12, 24, 36, 48, 60, \dots\}$$

Donc le plus petit commun multiple de 3 et 4 est 12 et on écrit :

$$\text{ppcm}(3,4) = 12$$

Exemple 2 : Calculer le plus petit commun multiple de 6 et 8.

On a : • l'ensemble de multiples de 6 est

$$6N = \{6, 12, 18, \underline{24}, 30, 36, 42, 48, \dots\}$$

• l'ensemble de multiples de 8 est :

$$8N = \{8, 16, \underline{24}, 32, 40, 48, 56, 64, \dots\}$$

• l'ensemble de multiples de 6 et 8 est :

$$24N = \{\underline{24}, 30, 48, 72, 96, \dots\}$$

Donc le plus petit commun multiple de 6 et 8 est 24 et on écrit :

$$\text{ppcm}(6,8) = 24$$

2. Diviseurs des entiers naturels

Soient a et b deux entiers naturels. Si a est divisible par b alors b est diviseur de a .

Exemple : 36 est divisible par 4 donc 4 est diviseur de 36

Méthode pour trouver les diviseurs d'un entier naturel

Exemple 1: Trouer les diviseurs de 36

$$\text{On a : } 12 = 1 \times 12$$

$$12 = 2 \times 6$$

$$12 = 3 \times 4$$

On arrête le calcul lorsque l'on trouve le même.

Donc les diviseurs de 12 sont : 1, 2, 3, 4, 6 et 12.

Et l'ensemble des diviseurs de 12 est $\{1, 2, 3, 4, 6 \text{ et } 12\}$

Exemple 2: Trouver les diviseurs de 18

$$\text{On a : } 18 = 1 \times 18$$

$$18 = 2 \times 9$$

$$18 = 3 \times 6$$

Donc les diviseurs de 18 sont : 1, 2, 3, 6, 9 et 18.

Et l'ensemble des diviseurs de 18 est $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

Exemple 3 : Trouver tous les diviseurs de 36

$$\text{On a : } 36 = 1 \times 36$$

$$36 = 2 \times 18$$

$$36 = 3 \times 12$$

$$36 = 4 \times 9$$

$$36 = 6 \times 6$$

Donc les diviseurs de 36 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

Et l'ensemble des diviseurs de 36 est $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

Théorèmes

- 1) Tout diviseur de a est diviseur de tous les multiples de a .
- 2) Tout multiple de a est divisible par tous les diviseurs de a .

Exemple : Les multiples de 6 sont : 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, ...
et diviseurs de 6 sont : 1, 2, 3 et 6.

On a : tous les multiples de 6 sont : 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, ...
sont divisibles par les diviseurs de 6 : 1, 2, 3 et 6.

Propriétés

- Tout entier naturel n est divisible par 1 et par n lui-même. Donc le plus petit diviseur de n est 1 et le plus grand diviseur de n est lui-même.
- Si b est un diviseur de n alors $1 \leq b \leq n$, on a donc le nombre des diviseurs de n est calculable (fini).

a. Diviseur commun

On appelle diviseur commun à deux nombres ou plusieurs n nombres naturels tout nombre qui divise chacun d'eux.

b. Plus grand commun diviseur (pgcd)

Le plus grand des diviseurs communs à deux nombres a et b s'appelle leur plus grand commun diviseur et se note pgcd.

Exemple 1 :

On a :

- L'ensemble des diviseurs de 12 est $\{1, 2, 3, 4, \underline{6}, 12\}$
- L'ensemble des diviseurs de 18 est $\{1, 2, 3, \underline{6}, 9, 18\}$

Les diviseurs communs de 12 et 18 sont 1, 2, 3 et 6. 6 est le plus grand. 6 est appelé le plus grand commun diviseur de 12 et 18

On écrit $\text{pgcd}(12,18) = 6$

Exemple 2 : Trouver le plus grand commun diviseur de 24, 36 et 48.

On a :

- L'ensemble de diviseurs de 24 est $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, \underline{12}, 24\}$
- L'ensemble de diviseurs de 36 est $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, \underline{12}, 18, 36\}$
- L'ensemble de diviseurs de 48 est $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, \underline{12}, 16, 24, 48\}$

Les diviseurs communs de 24, 36 et 48 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12. 12 est le plus grand. Donc $\text{pgcd}(24,36,48) = 12$

Théorème 1

Soient a, b et c trois entiers naturels.

Si $\text{pgcd}(a,b) = t$ alors $\text{pgcd}(a,b,c) = \text{pgcd}(t,c)$

Théorème 2

Soient a et b deux entiers naturels tel que $b < a$ et r le reste de la division euclidienne de a par b .

- Si $r = 0$ alors $\text{pgcd}(a,b) = b$
- Si $r \neq 0$ alors $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(b,r)$

Méthode pour trouver les diviseurs de deux ou plusieurs entiers naturels

Règle

Pour trouver le pgcd de deux nombres: on divise

- Le plus grand par le plus petit;
- Le plus petit par le reste;
- Le premier reste par le second et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne un reste nul.
- Le pgcd est le dernier diviseur utilisé

Pour le calcul du pgcd de plusieurs nombres, on peut remplacer deux entre eux par leur pgcd.

Exemple 1: Trouver $\text{pgcd}(12,18)$

On a

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \hline 6 & 6 \\ & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 12 & 6 \\ \hline 0 & 6 \\ & 0 \end{array}$$

donc $\text{pgcd}(12,18) = 6$

Exemple 2: Trouver pgcd (24,32,48)

- On calcule pgcd (24,32)

On a

$$\begin{array}{r|l} 32 & 24 \\ 8 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 24 & 8 \\ 0 & 3 \end{array}$$

$$\text{pgcd}(24, 32) = 8$$

- On calcule pgcd (8,48)

On a

$$\begin{array}{r|l} 48 & 8 \\ 0 & 6 \end{array}$$

$$\text{pgcd}(8, 48) = 8. \text{ Donc } \text{pgcd}(24, 32, 48) = 8$$

3. Nombres premiers

1. Nombres premiers

Un nombre premier est un entier naturel qui n'est divisible que par lui-même et par 1.

Les nombres premiers de 1 à 10 sont : 2, 3, 5 et 7.

Exemples : 13 est premier car ses diviseurs sont 1 et 13

5 est premier car ses diviseurs sont 1 et 5

4 n'est pas premier car il admet pour diviseurs 1, 2 et 4

12 n'est pas premier car il admet pour diviseurs 1, 2, 3, 4, 6 et 12.

2. Les nombres premiers de 1 à 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On écrit les entiers naturels de 1 à 100. On supprime 1 et tous les multiples de 2, 3, 5, 7 et 11.

Les restes sont les nombres premiers :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

Propriété

Tout entier naturel non premier admet au moins un diviseur premier

Exemple: 3551 est non premier

Son plus petit diviseur autre que 1 est 53 (53 est premier)

3. Reconnaître un nombre premier

Pour reconnaître si un nombre entier naturel est premier:

- On le divise par les nombres premiers successifs.
- Si aucune division ne se fait exactement, on arrête les divisions lorsque le quotient obtenu est égal ou inférieur au diviseur. Ce nombre est premier.

Autrement dit que

Pour reconnaître si un nombre entier naturel A est premier:

- On le divise par les nombres premiers successifs.
- Si aucune division ne donne un reste nul jusqu'au le nombre premier p et $p^2 > A$. Alors A est premier

Exemple: 97 n'est pas divisible par 2, 3, 5 (règle de divisibilité)

On divise 97 par 7, 11:

$$\begin{array}{r|l} 97 & 7 \\ \hline 6 & 13 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 97 & 11 \\ \hline 9 & 8 \end{array}$$

d'où $11^2 = 121$ et $121 > 97$

Donc 97 est un nombre premier

4. Décomposition d'un entier naturel en facteurs premiers

Tout entier naturel non premier peut se décomposer en un produit de facteurs premiers. Chaque terme du produit est appelé *facteur premier*.

Exemple: $15 = 3 \times 5$

$$21 = 3 \times 7$$

$$315 = 15 \times 21 = 3 \times 5 \times 7 \times 3 = 3^2 \times 5 \times 7$$

$$36 = 4 \times 9 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$$

Disposition pratique

On divise successivement ce nombre par le nombre premier le plus petit dont le reste est nul.

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 0 & 5 \\ 0 & 1 \end{array}$$

$$15 = 3 \times 5$$

$$\begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ 0 & 7 \\ 0 & 1 \end{array}$$

$$21 = 3 \times 7$$

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 0 & 18 \\ 0 & 9 \\ 0 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{array}$$

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

$$\begin{array}{r|l} 315 & 3 \\ 015 & 105 \\ 0 & 15 \\ 0 & 5 \\ 0 & 7 \\ 0 & 7 \\ 0 & 1 \end{array}$$

$$315 = 3^2 \times 5 \times 7$$

5. Utilisation des facteurs premiers

Règle:

- 1) Le plus petit commun multiple (ppcm)

Le plus petit commun multiple (ppcm) de deux ou plusieurs entiers naturels décomposés en facteurs premiers s'obtient en faisant le produit de tous les facteurs différents par les facteurs communs, chacun d'eux étant affecté de son plus grand exposant.

- 2) Le plus grand commun diviseur (pgcd)

Le plus grand commun diviseur (pgcd) de deux ou plusieurs entiers naturels décomposés en facteurs premiers s'obtient en faisant le produit des facteurs communs, chacun d'eux étant affecté de son plus petit exposant.

Exemple 1: Calculer ppcm (315,108) et pgcd (315,108)

$$\text{On a : } 315 = 3^2 \times 5 \times 7$$

$$108 = 2^2 \times 3^3$$

$$\text{Donc ppcm (315,108) = } 5 \times 7 \times 2^2 \times 3^3 = 3780$$

$$\text{pgcd (315,108) = } 3^2 = 9$$

Exemple 2: Calculer ppcm (30, 36, 48) et pgcd (30, 36, 48)

$$\text{On a : } 30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$36 = 4 \times 9 = 2^2 \times 3^2$$

$$48 = 16 \times 3 = 2^4 \times 3$$

$$\text{Donc ppcm (30, 36, 48) = } 5 \times 3^2 \times 2^4 = 5 \times 9 \times 16 = 720$$

$$\text{pgcd (30, 36, 48) = } 2 \times 3 = 6$$

6. Nombres premiers entre-eux

On appelle nombres premiers entre-eux deux entiers naturels qui n'admettent comme diviseur commun que le nombre 1.

- Soit a et b deux entiers naturels,

On peut dire que a et b sont premiers entre-eux lorsque leur plus grand commun diviseur est égal à 1, c'est-à-dire $\text{pgcd}(a,b) = 1$

Exemple:

36 et 25 sont deux nombres premiers entre-eux car $\text{pgcd}(36, 25) = 1$

8 et 13 sont deux nombres premiers entre-eux car $\text{pgcd}(8, 13) = 1$

Exercices

1. Parmi les nombres suivants, lesquels sont des nombres premiers ? Vérifiez votre réponse.
43; 47; 49; 63; 67; 75; 79; 87; 89; 97; 98; 113; 117; 217; 377; 1379; 4373.

2. a) Donner tous les nombres premiers de 1 à 30
b) Décomposer les nombres suivants en facteurs premiers:
84; 121; 250; 294; 180; 249; 864; 2520; 7920; 8000; 5740;
36×42; 72×77; 108×75; 84×25×121; 36×27×142; 65×49×24.

3. a) Donner 10 premiers multiples communs de 6; 8 et 10.
b) Donner 10 premiers multiples communs et le plus petit multiple de 6 et 8.
c) Donner 10 premiers multiples communs et le plus petit multiple de 6 et 10.
d) Donner 10 premiers multiples communs et le plus petit multiple de 10 et 8.
e) Donner 5 premiers multiples communs et le plus petit multiple de 6; 8 et 10.

4. a) Donner 10 premiers multiples communs de 5; 7 et 15.
b) Donner 10 premiers multiples communs et le plus petit multiple de 5 et 15.
c) Donner 10 premiers multiples communs et le plus petit multiple de 5 et 7.
d) Donner 10 premiers multiples communs et le plus petit multiple de 15 et 7.
e) Donner 5 premiers multiples communs et le plus petit multiple de 5; 7 et 15.

5. Calculer

ppcm (36, 42);	ppcm (120, 96);	ppcm (18, 22);
ppcm (82, 52);	ppcm (250, 150);	ppcm (254, 672);
ppcm (720, 900);	ppcm (14, 26, 32)	ppcm (15, 75, 36);
ppcm (84, 62, 56, 42).		

6. Donner l'ensemble de diviseurs des nombres suivants:
72; 48; 26; 84; 69; 60; 120; 136; 212; 96; 56; 108.
- a) Donner l'ensemble de diviseurs de 64; 36 et 42.
 - b) Donner les diviseurs communs et le plus grand commun diviseur de 64 et 36.
 - c) Donner les diviseurs communs et le plus grand commun diviseur de 64 et 42.
 - d) Donner les diviseurs communs et le plus grand commun diviseur de 42 et 36.
 - e) Donner les diviseurs communs et le plus grand commun diviseur de 64; 42 et 36.
8. a) Donner les diviseurs de 24; 56; 82 et 60.
- b) Donner les diviseurs communs et le plus grand commun diviseur de 82 et 60.
 - c) Donner les diviseurs communs et le plus grand commun diviseur de 24 et 56.
 - d) Donner les diviseurs communs et le plus grand commun diviseur 24; 82 et 56.
 - a) Donner les diviseurs communs et le plus grand commun diviseur de 60; 82 et 56.
 - b) Donner les diviseurs communs et le plus grand commun diviseur de 24; 60; 82 et 56.
9. Trouver le plus grand commun diviseur des nombres suivants:
- a) 168 et 360;
 - b) 336 et 462;
 - c) 252 et 684;
 - d) 120 et 242;
 - e) 693 et 945;
 - f) 68; 92 et 72;
 - g) 36; 60; et 80;
 - h) 380; 425 et 500.
10. Parmi les nombres suivants, lesquels sont des nombres premiers entre-eux?
- a) 171 et 91;
 - b) 75 et 80;
 - c) 16 et 81;
 - d) 218 et 162;
 - e) 21 et 18;
 - f) 75 et 28;
 - g) 43 et 36;
 - h) 15 et 32;
 - i) 327 et 127;
 - j) 291 et 117.

11. a) Calculer le ppcm (576, 360) et pgcd (576, 360)
 b) Calculer 576×360 et trouver le produit
 ppcm (576, 360) \times pgcd (576, 360) et comparer.
12. a) Montrer que 99 et 140 sont premiers entre-eux.
 b) Calculer ppcm (99, 140) et pgcd (99, 140).
 c) Comparer ppcm (99, 140) et 99×140 .
 d) Comparer ppcm (a, b) et $a \times b$ tel que a et b sont premiers entre-eux.
13. a) Montrer que 375 est diviseur de 6375.
 b) Calculer ppcm (375, 6375) et pgcd (375, 6375).
 c) Que peut-on dire de ppcm et pgcd de deux nombres qui sont divisibles l'un et l'autre ?
14. On veut planter des arbres autour d'un jardin triangulaire de cote
 144 m; 180 m et 240m.
 Il y a un arbre a chaque sommet et la distance entre deux plants est e égale à
 5 m, 6 m, 7 m, 8 m, 9 m et 10 m.
 Caculer le nombre d'arbres que l'on doit planter.
15. Un ouvrier a touche son salaire trois mois successifs 462 000 kips,
 528 000 kips et 594 000 kips
 a) Calculer son salaire par jour s'il a gagné 20000 kips a 30000 kips par jour.
 b) Calculer son jour de travail par mois.
16. On veut carreler une chambre rectangulaire de 360 cm de long et
 225.cm de large.
 On utilise des carreaux de cotes 10 cm à 25 cm.
 a) Calculer le cote du carreau pour poser un nombre de carreaux sans
 découper.
 b) Calculer le nombre de carreaux nécessaire.
17. a) Calculer les nombres compris entre 500 et 1000 qui sont multiples
 communs de 6; 8 et 10.
 c) De quel nombre sont-ils multiples les nombres obtenus ?
 Que peut-on dire de ces nombres avec 6; 8 et 10 ?

18. Dy a une la collection 45 timbres de 300 kips et 36 timbres de 500 kips. Il veut les coller dans un cahier de 9 pages à condition que chaque page comporte le même nombre de timbres et de la même série.
- Calculer le pgcd de 45 et 36
 - Combien y a-t-il de timbres dans chaque page ?
 - Combien y a-t-il de pages pour les timbres de 300 kips ?
Et pour les timbres de 500 kips ?
19. On veut faire les bouquets de roses de trois couleurs. On dispose de 120 roses rouges, 80 roses blanches et 60 roses jaunes.
- Quel est le plus grand nombre de bouquets possibles pour que chaque bouquet comporte le même nombre de roses de chaque couleur et qu'il n'en reste aucune ?
 - Combien y a-t-il de roses de chaque couleur dans chaque bouquet ?
20. On a 216 crayons rouges et 152 crayons jaunes qu'on doit ranger dans des trousse.
- Combien y a-t-il de crayons dans chaque trousse pour qu'elles comportent le même nombre de crayons de la même couleur ?
 - Combien y a-t-il de trousse de rouges et de trousse de jaunes ?