CELLULE BILINGUE

PHYSIQUE

Niveau : L3

Année scolaire 2017-2018

Traducteur : Dr. Bounseng BOUNTHONG

Mobile : 02029822860
Email : bounsengbo@gmail.com

Table des matières

Chapitre II : Oscillateurs mécaniques

Leçon 3 : Oscillateur harmonique

1. Notion d'oscillateur harmonique

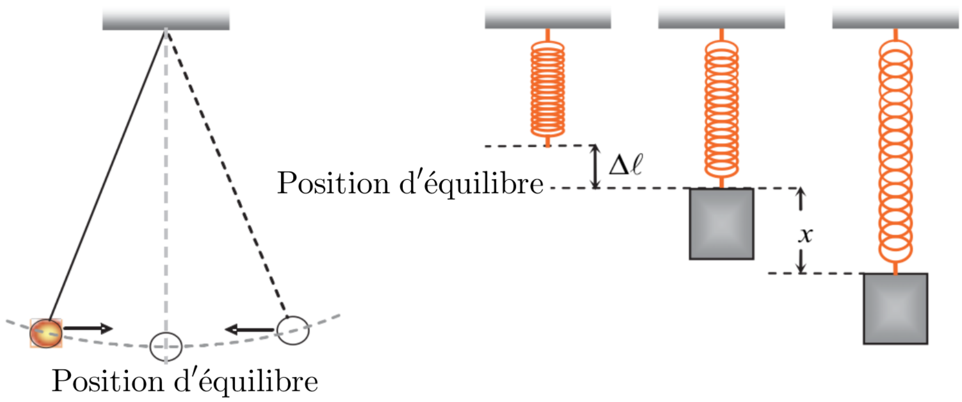
Dans la nature il y a plusieurs mouvement ressemble à une oscillation ou mouvement périodique. Ces mouvements sont oscillées autour un point d'équilibre par exemple : le mouvement d'un pendule, le mouvement d'un objet qui accroche sur un ressort, la vibration d'une corde ou le mouvement des molécules d'un solide, ...

Les oscillations des objets se composent deux types soit **oscillation dans un champ statique**, le champ des forces dépend que leurs positions, il ne dépend pas du temps : champ des forces sur le ressort, champ des forces du pesanteur, champ des forces de torsion sur la tige, ... soit **oscillation dans un champ qui varie en fonction du temps** : oscillation d'un électron libre dans un circuit alternatif, un objet flotte à la surface de l'eau et se déplace sur le rythme d'une vague. Dans ce chapitre on se limite sur l'étude seulement une oscillation dans un champs statique.

2. Équation d'oscillateur harmonique

2.1. Équation de déplacement

Un mouvement d'oscillation est un mouvement qui tourne autour la position équilibre, illustré dans la figure ci-dessous, une oscillation d'un pendule ou une oscillation d'une masse suspendue à un ressort et en supposant que ces mouvement ne perdent pas d'énergie.



Selon la figure ci-dessus, le mouvement d'un pendule ou le mouvement d'une masse suspendue à un ressort, l'expérience nous montre qu'un objet oscillera lorsqu'il se déplace de la position d'équilibre avec un force de rappel : $F = -kx = ma$ ou

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$
$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{3.1}$$

Cette dernière équation est une équation différentielle homogène du seconde ordre. La solution de cette équation donne :

$$x(t) = A\sin(\omega t + \theta_0) \quad ou \quad x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0) \tag{3.2}$$

où x le déplacement exprimer en mètre (m), A l'amplitude (ou le déplacement maximal $x_{\max} = A$) en (m), ω la pulsation (ou vitesse angulaire) en (rad/s), $(\omega t + \theta_0)$ la phase et θ_0 la phase initial. L'équation (3.2) est appelée **équation de déplacement d'un oscillateur harmonique simple**.

À l'instant initial $t = 0$ et si $\theta_0 = 0$, l'équation (3.2) devient :

$$x(t) = A\sin\omega t \quad ou \quad x(t) = A\cos\omega t \tag{3.3}$$

Si l'objet commence à se déplacer d'un point équilibre, le déplacement initial est nul $(x(0) = 0)$, si il commence à se déplacer d'un point quelconque, l'amplitude et le déplacement initial est le même $(x(0) = x_{\max} = A)$. La relation entre la pulsation, la fréquence et la période est :

$$\omega = 2\pi f, \quad f = \frac{1}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

où T la période (ou durée néccessaire pour une oscillation d'un tour complet) en seconde (s) ; f est la fréquence d'oscillation en hert (Hz) : 1 Hz= 1 tr/s. les multiples de hertz sont :

$$1\text{kHz} = 10^3 \text{ Hz}$$
$$1\text{MHz} = 10^6 \text{ Hz}$$

2.2. Vitesse d'une oscillation

La vitesse d'un objet en mouvement oscillateur harmonique est la variation du déplacement en fonction du temps. Donc, selon l'équation (3.2), la vitesse d'un oscillateur harmonique est :

$$v(t) = x'(t) = \omega A\cos(\omega t + \theta_0) \tag{3.4}$$

Prenons le carré des deux membres de l'équation (3.4), on obtient :

$$\begin{aligned} v^2 &= \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \theta_0) \\ &= \omega^2 A^2 \left[1 - \sin^2(\omega t + \theta_0)\right] \\ &= \omega^2 A^2 \left[1 - \frac{x^2}{A^2}\right] \\ &= \omega^2 (A^2 - x^2) \end{aligned}$$
$$\Rightarrow v(t) = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2(t)} \tag{3.5}$$

Le signe (+) signifie que l'objet s'approche la position équilibre et le signe (-) signifie que l'objet s'éloigne la position équilibre.

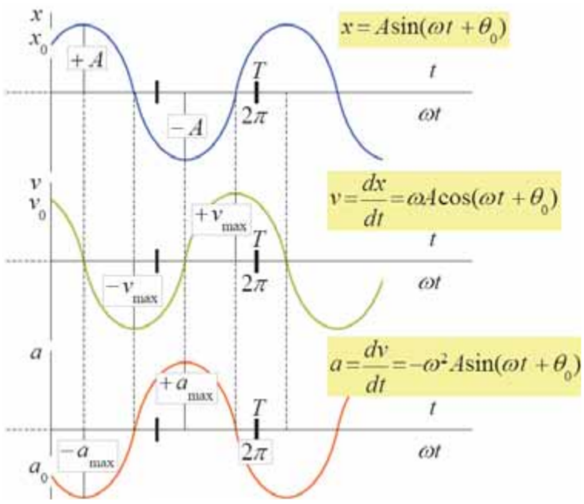
2.3. Accélération d'une oscillation

Une accélération d'un oscillateur harmonique est la variation de la vitesse en fonction du temps, la dérivée de l'équation (3.4) est :

$$a(t) = v'(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \theta_0) \tag{3.6}$$

$$a(t) = -\omega^2 x(t) \tag{3.7}$$

L'équation (3.7) nous montre que l'accélération est proportionnelle au déplacement, le signe (-) signifie que le sens de l'accélération est toujours opposé au sens du déplacement. Le sens du vecteur accélération est toujours tend vers la position d'équilibre. Les courbes représentatives du déplacement, de la vitesse et de l'accélération sont présentées sur la figure suivante.



Exemple 1 : Un objet assimilable à un point matériel oscille horizontalement, à l'instant $t = 0$, le déplacement est $x(0) = 0.5$ cm et la vitesse initiale est nulle. Si l'objet oscille à une fréquence de 0.25 Hz. Déterminer la période, la pulsation, l'amplitude, une équation de déplacement en fonction du temps, une équation de la vitesse en fonction du temps, l'accélération maximale, le déplacement et la vitesse à l'instant $t = 2$ s.

Solution : La période : $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.25} = 4$ s ;
La pulsation : $\omega = 2\pi f = 2(\pi)(0.25) = 1.57$ rad/s ;
L'amplitude : supposons qu'une équation de déplacement est

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0); \quad v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \theta_0)$$

à l'instant $t = 0$ s, $x(0) = 0.5$ cm, $v(0) = 0$ m/s

$$0.5 = A\cos(\theta_0); \quad 0 = -\omega A \sin(\theta_0)$$

un seul cas possible $\sin(\theta_0) = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0$ et on a $\cos(\theta_0) = 1$, donc, $A = 0.5$ cm ;

L'équation de déplacement en fonction du temps est

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t+\theta_0) \\ &= 0.5\cos(1.57t) \ \ [\text{cm}] \end{aligned}$$

L'équation de la vitesse en fonction du temps est

$$\begin{aligned} v(t) &= -\omega A\sin(\omega t+\theta_0) \\ &= -0.785\sin(1.57t) \ \ [\text{cm/s}] \end{aligned}$$

L'accélération maximale :

$$\begin{aligned} a_{\max} &= \omega^2 A \\ &= (1.57)^2(0.5) \\ &= 1.23 \ \ [\text{cm/s}^2] \end{aligned}$$

À l'instant $t = 2$ s

$$\begin{aligned} x(2) &= 0.5\cos(1.57(2)) \\ &= -0.5 \ \ cm \\ v(2) &= -0.785\sin(1.57(2)) \\ &= 0 \ \ [\text{cm/s}] \end{aligned}$$

3. Énergie mécanique d'un oscillateur harmonique

Un oscillateur harmonique est un mouvement mécanique. Donc, l'énergie mécanique (E) d'un oscillateur harmonique est la somme de l'énergie cinétique (E_c) et l'énergie potentielle (E_p).

$$E = E_c + E_p \tag{3.8}$$

3.1. Énergie cinétique

Supposons qu'à l'instant t un objet de masse m oscille à une vitesse d'équation :

$$v(t) = -\omega A\sin(\omega t+\theta_0)$$

L'énergie cinétique de cet objet est :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2(\omega t+\theta_0) \tag{3.9}$$

Si le système d'oscillation est un ressort de raideur $k = m\omega^2$, l'énergie cinétique d'une masse suspendue à un ressort est :

$$E_c = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\theta_0) \tag{3.10}$$

3.2. Énergie potentielle

L'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique d'une masse m est égale à l'énergie potentielle élastique du ressort

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

Supposons que l'allongement du ressort par rapport à la référence (point d'équilibre) est $x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0)$, l'énergie potentielle de l'objet est :

$$E_p = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \theta_0) \tag{3.11}$$

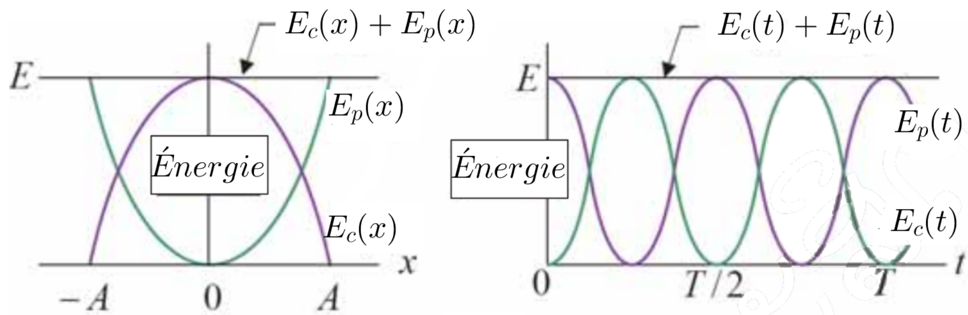
L'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique est :

$$\begin{aligned} E &= E_c + E_p \\ &= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \theta_0) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \theta_0) \\ &= \frac{1}{2}kA^2\left[\sin^2(\omega t + \theta_0) + \cos^2(\omega t + \theta_0)\right] \\ &= \frac{1}{2}kA^2 = \text{const.} \end{aligned}$$

Sachant que $k = m\omega^2$, l'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique est constante.

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \text{const.} \tag{3.12}$$

La figure ci-dessous est la courbe de représentative des variations de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en fonction de déplacement et du temps.



Exemple 2 : Un objet de masse 25 g est accroché à une des extrémitées d'un ressort et l'autre extrémité du ressort est fixé au mur et placé sur un banc à coussin. Si l'objet se déplace sans frottement selon l'équation $x(t) = 15\sin(10t + \frac{\pi}{4})$ [cm]

a) Quelle est son amplitude, sa pulsation, sa fréquence, sa période et la phase initiale de l'oscillation ?

b) Quelle est la force maximale appliquée sur le corps ?

c) Quelle est l'énergie mécanique du corps et la constante de raideur du ressort ?

Solution :

a) Une équation générale de déplacement est $x(t) = A\sin(\omega t + \theta_0)$, en comparant cette équation avec celle du problème on a :
$A = 15$ cm, $\omega = 10\pi$ rad/s,

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega}{2\pi} \\ &= \frac{10\pi}{2\pi} \\ &= 5 \text{ Hz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{f} \\ &= \frac{1}{5} \\ &= 0.2 \text{ s} \end{aligned}$$

et $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ rad.

b) La force maximale est $F_{\max} = ma_{\max}$ où $a_{\max} = -\omega^2 A$

$$\begin{aligned} F_{\max} &= -m\omega^2 A \\ &= -0.025(10\pi)^2(0.15) \\ &= -3.697 \text{ N} \end{aligned}$$

c) L'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \\ &= \frac{1}{2}(0.025)(10\pi)^2(0.15)^2 \\ &= 0.2773 \text{ J} \end{aligned}$$

La constante de raideur du ressort est

$$\begin{aligned} k &= m\omega^2 \\ &= 0.025(10\pi)^2 \\ &= 24.65 \text{ N/m} \end{aligned}$$

Exercices

1. Qu'est-ce q'un oscillateur harmonique ? donner quelques exemple.
2. Un objet est en mouvement oscillatoire harmonique, une équation de déplacement est $x = A\sin\omega t$. Donner une équation de la vitesse, l'accélération, la force, l'énergie cinétique, l'énergie potentielle de cette oscillation en fonction du temps.
3. Un point matériel est en mouvement oscillatoire harmonique sinusoïdale de période de 2 s et l'amplitude de 3 cm. À l'instant $t = 0$, l'objet passe la position d'équilibre. Déterminer une équation de déplacement et de la vitesse en fonction du temps et calculer ces valeurs à l'instante $t = 2$ s.

4. Un objet de masse 100 g est en mouvement oscillatoire harmonique de fréquence 50 Hz et l'amplitude de 1 m, la phase initiale est nulle.
   a) Calculer la pulsation de l'oscillation ;
   b) Donner une équation de déplacement ;
   c) Donner une équation de la vitesse en fonction du temps ;
   d) Donner une équation de l'accélération en fonction du temps ;
   e) Calculer le déplacement à l'instant 0.01 s ;
   f) Calculer l'accélération maximale ;
   g) Calculer l'énergie mécanique en fonction du temps.
5. Une masse de 4.5 kg accroche à un ressort de constante de raideur 7200 N/m et place horizontalement. Si on tire à 8 cm du point d'équilibre puis laisser la masse oscille sans frottement
   a) Donner une équation de déplacement de la masse ;
   b) Quelle est l'énergie mécanique de l'oscillant ?
   c) À quelle position l'énergie cinétique est égale à l'énergie potentielle ?
   d) À la position de c) quelle est sa vitesse ?
   e) Quelle est sa période de l'oscillant ?
6. Un objet est en mouvement oscillatoire harmonique de l'amplitude 10 cm, de fréquence 50 Hz. L'origine est le point d'équilibre. À l'instant $t = 0$ l'abscise de l'objet est 5 cm. Quelle est l'équation de déplacement de cet objet ?

   a) $x(t) = 5\sin(50\pi t + \frac{\pi}{3})$ b) $x(t) = 10\sin(100\pi t + \frac{\pi}{2})$
   c) $x(t) = 10\sin(10\pi t + \frac{\pi}{6})$ d) $x(t) = 10\sin(100\pi t + \frac{\pi}{6})$
7. Une extrémité d'un ressort est fixé au mur et repose sur un plan horizontal, l'autre extrémité accroche une masse de 10 g. Si la masse oscille sans frottement à une période de 4 s, de l'amplitude 10 cm. L'origine de date est au point d'équilibre. Quelle est la force d'attraction du réssort ?

   ☐ $-\frac{\pi^2}{4000}\sin\frac{\pi t}{2}$ N ☐ $\frac{\pi^2}{400}\sin\frac{\pi t}{2}$ N ☐ $-\frac{\pi^2}{4000}\sin\frac{\pi t}{4}$ N ☐ $\frac{\pi^2}{4000}\sin\frac{\pi t}{2}$ N
8. La phase initiale d'un oscilateur harmonique est nulle, à la position 2.4 cm, la vitesse de l'objet est 3 cm/s et à la position 2.8 cm, sa vitesse est 2 cm/s. Quelle est l'amplitude de l'oscillation ?

   ☐ $A = 3.1$ cm ☐ $A = 4.1$ cm ☐ $A = 5.1$ cm ☐ $A = 6.1$ cm
9. Un pendule de masse 50 g est attaché par un fil de masse négligeable, est oscillé à un angle maximal $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ rad par rapport à l'axe vertical qui passe la position équilibre. Si l'accélération de la pesanteur est $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$, quelle est la tenstion du fil à la position $\alpha = \frac{\pi}{6}$ rad ?

   ☐ $T = 0.45$ N ☐ $T = 0.59$ N ☐ $T = 0.79$ N ☐ $T = 0.95$ N

10. La position en fonction du temps d'un mobile est donnée par

$$x(t) = 10 \sin 10\pi t \ \text{ cm}$$

Si cet objet se déplace à une vitesse $v = 80\pi \ \text{ cm/s}$. Quelle est la position de cet objet par rapport au point d'équilibre ?

☐ $x = \pm 4$ cm ☐ $x = \pm 6$ cm ☐ $x = \pm 7$ cm ☐ $x = \pm 8$ cm

11. Un objet est en mouvement oscillatoire harmonique à une période $T = 2$ s, la phase initiale est nulle ($\theta_0 = 0$). À l'instant $t = 0$, la position initiale est nulle ($x(0) = 0$). Lorsque l'objet passe la première fois la position $x = \frac{A}{2}$ (où A est l'amplitude), quelle est la durée ?

☐ $t = \frac{1}{6}$ s ☐ $t = \frac{1}{4}$ s ☐ $t = \frac{1}{2}$ s ☐ $t = 1s$ s

Leçon 4 : Différentes types d'oscillations

Dans la leçon précédente, on a étudié un mouvement oscillatoire harmonique d'un masse-ressort et d'un pendule simple. En réalité, il y a plusieurs systèmes sont en mouvement oscillateur harmonique, leurs natures sont différentes mais tous des systèmes oscillant ont les mêmes propriétés :

- Le système doit avoir une position équilibre
- Lorsque le système se déplace de la position d'équilibre, il existe une force ou un moment d'une force attirer le système vers la position d'équilibre.
- La force attraction ou le moment attraction est proportionnelle à l'allongement ou l'angle de rotation

$$\frac{F}{x} = D \tag{4.1}$$

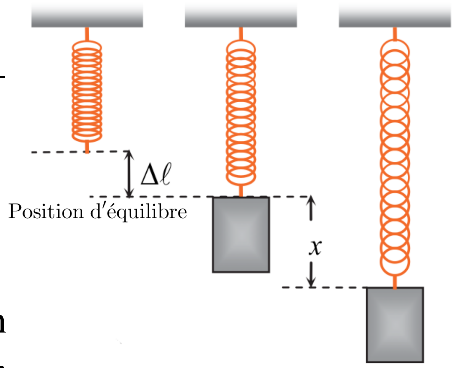
  où D le coefficient de rapport de E sur x, c'est le coefficient réel du système
- Tous des systèmes oscillant, la pulsation, la fréquence et la période sont calculées par

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}, \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \tag{4.2}$$

1. Oscillation d'un pendule élastique (ressort horizontal ou vertical)

Considérons le schéma-cicontre

- la position d'équilibre du système est la position où la somme des forces est nulle.
- la force attractive est la force élastique du ressort :



$$F = kx \Rightarrow \frac{F}{x} = k$$

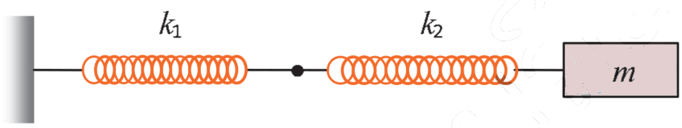
Si on compare avec l'équation (4.1) et on constate que $D = k$. Donc, la vitesse angulaire, la fréquence et la période du système d'oscillant sont :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{4.3}$$

Cette dernière équation est valable pour un ressort. Si on branche avec deux ou plusieurs ressort en série ou en parallèle, on doit calculer la constante de raideur totale k.

- **Système des ressorts en séris**

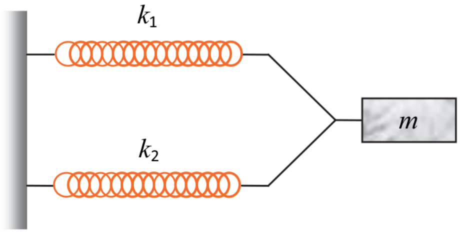
  Si on branche deux ou plusieurs ressorts en séris puis accrochent avec une masse m voir le schéma suivant :



k_1 et k_2 sont respectivement les constantes de raideur du ressort 1 et 2. La constante de raideur totale du syatème est :

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \tag{4.4}$$

- **Systme des ressorts en parallèles**
  Si on branche deux ou plusieurs ressorts en parallèles puis accrochent avec une masse m voir le schéma suivant :



k_1 et k_2 sont respectivement les constantes de raideur du ressort 1 et 2. La constante de raideur totale du syatème est :

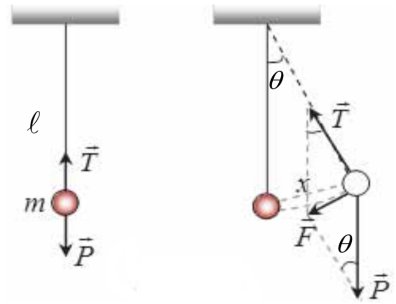
$$k = k_1 + k_2 \tag{4.5}$$

2. Oscillation d'un pendule simple

Un pendule simple est un système oscillant qui se compose une masse m est attachée à une des extrémités d'un fil de longueur l de masse négligeable. La masse de l'objet est négligeable si on compare avec la longueur du fil.

- À la position équilibre, les forces appliquent sur la masse m sont la tension $\vec{T}$ et son poids $\vec{P}$ telle que

$$\vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$$



- À la position x où la masse a un angle θ avec sa position équilibre, $\vec{T} + \vec{P} \neq \vec{0}$. Soit $\vec{F}$ le vecteur composé de $\vec{T}$ et $\vec{P}$, c'est la force qui attire la masse vers la position équilibre.

$$\frac{F}{x} = \frac{mg\sin\theta}{x} = \frac{mg\frac{x}{l}}{x} = \frac{mg}{l}$$

Si θ est très petit alors $\sin\theta \approx \frac{x}{l}$. Dans ce cas : $D = \frac{mg}{l}$.

Donc, la vitesse angulaire, la fréquence et la période de l'oscillation sont :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{4.6}$$

où g est l'accélération de la pesanteur, dans le cas où la masse m se déplace dans un milieu avec une accélération $\vec{a}$ et oscillant à un angle très petit, la période du système d'oscillant est

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{|\vec{g} + \vec{a}|}} \tag{4.7}$$

$|\vec{g}+\vec{a}|$ est le module du vecteur composé des accélérations du système oscillant.

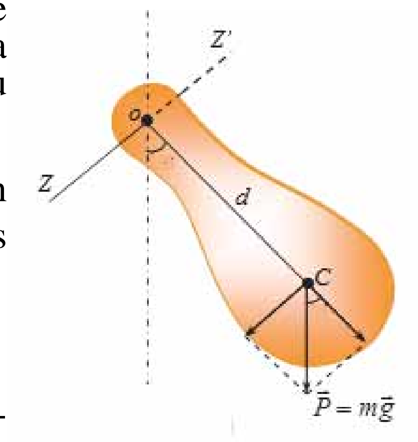
3. Oscillation d'un pendule pesant

En général, les objets qui peuvent osciller librement autour un point fixe sont appelées pendules. Si la dimension de l'objet est plus petite que la longueur du fil, dans ce cas on dit pendule simple, si la dimension de l'objet est grande, on dit pendule physique (ou pendule pesant composé).

- La position équilibre est la position où le centre de masse C d'objet de masse m sur la droite verticale passant par O. Le moment du poids $\vec{P}$ est nul.
- Écartons l'objet de la position équilibre à un angle θ, le moment de son poids $\vec{P}$ n'est pas nul et tire l'objet vers la position équilibre.

$$\tau_{\vec{P}} = (-mg\sin\theta)d$$

dans ce cas l'angle de rotation θ est le déplacement



si θ est très petit alors $\sin\theta \approx \theta$,

$$I_o\varepsilon = -mgd\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I_o}\theta = 0$$

On reconnaît ici l'équation différentielle d'un pendule simple de pulsation propre, de fréquence et de période :

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_o}}; \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgd}{I_o}}; \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{mgd}} \tag{4.8}$$

On retrouve bien sûr le cas particulier du pendule simple où toute la masse est concentrée en C

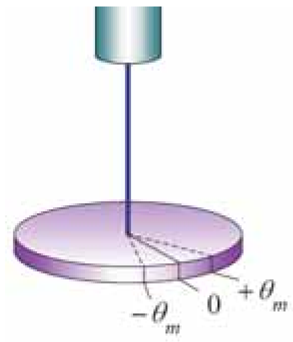
$$I_o = md^2, \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{d}}$$

Pour une barre rectiligne homogène de masse m, de longueur L, fixée en l'une de ses extrémités on obtient

$$I_o = \frac{1}{3}mL^2, \qquad d = \frac{L}{2}; \qquad \omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$$

4. Oscillation d'un pendule de torsion

Un pendule de torsion est un système oscillant, il se compose un disque et un fil d'acier passant par le centre du disque et perpendiculaire à ce disque voir le schéma ci-après.



- La position équilibre du système est la position où la force de torsion totale est nulle (ou la position du disque n'a pas encore de tourner)
- Lorsque le disque est tourné à un angle θ, l'axe central est appliqué à une torsion pour tirer le système vers la position équilibre. Dans ce cas le déplacement est l'angle θ
- Dans la mesure réelle, si θ est petit, la force de torsion est proportionnelle au déplacement θ.

$$\frac{\tau}{\theta} = D^*$$

  où D^* est le coefficient élastique de torsion. Dans ce cas : $D = D^*$
- Selon la valeur de D^*, la pulsation, la fréquence et la période d'oscillation du disque sont données par :

$$\omega = \sqrt{\frac{D^*}{m}}; \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D^*}{m}}; \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D^*}} \tag{4.9}$$

5. Oscillation amortie

Le pendule élastique comme le pendule pesant, se comporte comme un oscillateur harmonique à la condition de négliger tout frottement. Il oscille alors théoriquement sans jamais s'arrêter. En réalité, la masse se déplace dans un fluide (en général l'air) où il existe toujours des forces de frottement de type visqueux. L'oscillateur est alors amorti et fini par s'arrêter.

La présence de frottements implique une dissipation d'énergie sous forme de chaleur ; on observe alors soit des oscillations dont l'amplitude diminue au cours du temps, soit un retour à l'équilibre sans oscillation. On parle alors d'amortissement. Si les oscillations ne sont pas trop rapides, la force de frottement est proportionnelle à la vitesse : $f = -bv$. b est la constante d'amortissement. L'oscillateur harmonique simple amorti est une équation différentielle dont la construction provient d'un oscillateur harmonique simple où l'on ajoute une force de frottement f. En appliquant la deuxième loi de Newton, on a une équation différentielle de la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

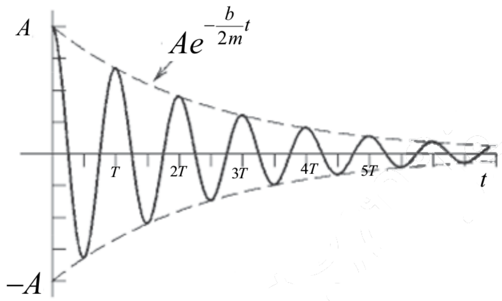
Donc, l'équation de déplacement d'oscillation amortie dans le régime sinusoïdal est :

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\sin(\omega t + \phi) \tag{4.10}$$

La pulsation amortie, la fréquence amortie et la période amortie sont données par :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{b}{2m})^2}; \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{b}{2m})^2}; \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\frac{k}{m} - (\frac{b}{2m})^2}} \tag{4.11}$$

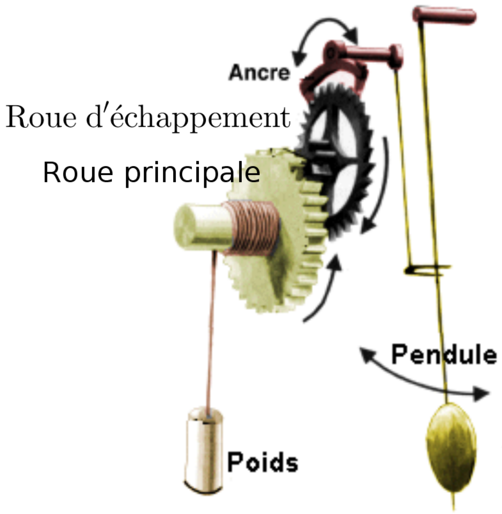
On constate que l'amplitude est diminuée exponentiellement en fonction du temps. En réalité, tous des oscillations libres sont amorties, la courbe représentative de l'ascillation amortie est présentée dans la figure ci-dessous.



6. Oscillation forcée libre

Pour éviter un oscillateur harmonique libre devient un oscillation amortie, on essaie de remplacer l'énergie dissipée due au frottement de manière que la période d'oscillation ne change pas. Cette oscillation est appelée oscillation forcée. Par exemple : l'oscillation d'une horloge à pendule. Une horloge à pendule se compose une masse, une roue principale, une roue d'échappement, un ancre et un pendule.

Le principe de fonctionnement de toute horloge mécanique repose sur la combinaison des trois fonctions suivantes :



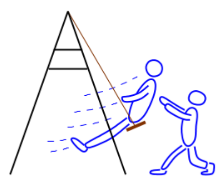
a) Une source d'énergie qui permet d'entretenir le mouvement de rotation (ici un poids moteur). Le système d'échappement à ancre, couplé au pendule, permet de cadencer la libération de l'énergie.

b) Un régulateur : Un pendule (ou balancier) donne une référence de temps précise et invariable ;

c) Un affichage : des graduations et des aiguilles donnent accès à l'information.

7. Oscillation forcée-résonance

Pour permettre un système d'oscillation harmonique à ne pas amortie, on doit appliquer une force extérieure au système périodiquement, par exemple la situation où une personne sur une balançoire est poussée périodiquement par une seconde personne (dans ce cas, même si l'excitation extérieure est bien périodique, elle n'aurait toutefois pas la forme d'une fonction harmonique !).



Appliquons une force extérieure $F = F_0 \sin \omega_0 t$ au système d'oscillant. Au départ, l'amplitude n'est pas stable, après appliqué la force, l'amplitude de plus en plus augmente et finalement l'amplitude sera stable, la pulsation forcée ω sera égale à la pulsation de la force extérieure ω_0. L'équation différentielle du système est

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin \omega_0 t$$

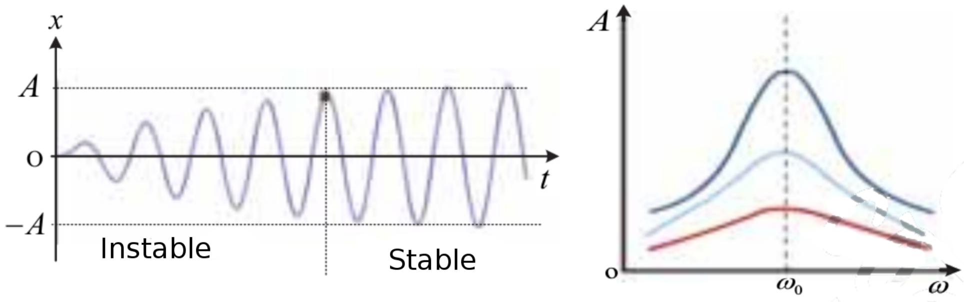
Une des solutions de cette équation est

$$x(t) = A\sin(\omega t - \phi) \tag{4.12}$$

Cette dernière équation est l'équation de déplacement d'oscillation forcée avec :

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(\frac{b\omega}{m})^2}}; \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

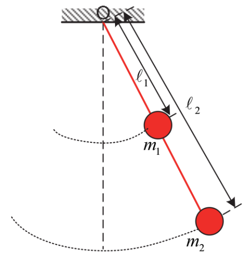
On constate que l'amplitude de l'oscillation forcée dépend la pulsation de la force extérieure et cette amplitude est maximale si $\omega = \omega_0$. Dans ce cas on dit **une oscillation forcée résonance** voir la figure ci-dessous.



Exercices

1. Un pendule simple a une longueur l, lorsqu'on ramène à la Lune, sa période est un tier de la période sur la Terre. Quelle est l'accélération de pesanteur de la Lune par rapport à celle de la Terre ?
2. Un pendule simple a une longueur l_1, oscille à une période $T_1 = 1.5$ s, un autre pendule de longueur l_2 oscille à une période de $T_2 = 2$ s. Quelle est la période T du pendule de longueur $l = l_1 + l_2$. Sachant que les deux pendules oscillent dans le même milieu.
3. Une masse de 0.5 kg est attachée à un ressort de masse négligeable de raideur 1250 N/m. Laisse cet objet osciller à une vitesse maximale $v_{\max} = 2$ m/s. Calculer l'amplitude de cette oscillation.
4. Une sphère de masse m est attachée à un ressort de raideur k_1, sa période est $T_1 = 0.3$ s. Si attachons cette sphère avec un ressort de raideur k_2, sa période est $T_2 = 0.4$ s. Calculer la période T d'oscillation de la sphère lorsqu'on l'attache avec un système du ressort k_1 et k_2 en série.
5. Lorsqu'on accroche une masse de 1 kg avec un ressort sa fréquence est 125 Hz. Si on accroche une autre masse m_2 sur le même ressort, sa fréquence est 243 Hz. Calculer la masse m_2.
6. Un objet de masse 5 kg est attachée à une extrémité d'un ressort de raideur 125 N/m, puis laisse osciller à une amplitude de 10 cm. Calculer
   a) la fréquence, la vitesse maximale et l'accélération maximale ;
   b) la vitesse et l'accélération, lorsque le déplacement est 5 cm.
7. Un ressort de masse négligeable, de longueur initiale 20 cm et l'allongement 0.1 cm par une force appliquée 1 N. Lorsqu'on accroche une masse de 1 kg puis fait tourner autour l'axe central avec un angle $\frac{\pi}{3}$ rad et à une vitesse constante. Calculer la longueur totale du ressort et la fréquence de rotation.

8. Accrochons une masse M sur un ressort, le ressort oscille à une fréquence de 5 Hz, si on rajoute une masse de 38 g, il oscille à une fréquence de 4.5 Hz. Déterminer la masse M et la constante de raideur du ressort (prend $\pi^2 = 10$).
9. Soit une équation d'oscillateur harmonique : $6\frac{d^2x}{dt^2} + 72x = 0$. Déterminer la période et la fréquence d'oscilation.
10. Un solide de masse 1.5 kg peut tourner autour l'axe horizontal par son poids. La période du mouvement est de $T = 1.4$ s ; la distance du centre de rotation au centre de masse est de 10 cm. Si on prend $g = 10m/s^2$, déterminer le moment d'inertie de ce solide.
11. Une pendule oscille autour un axe fixe avec le centre de retation O. Une tige de masse négligeable attachée par deux masses respectivement m_1 et m_2 avec la distance au centre O, l_1 et l_2 voir la figure ci-après. Exprimer la vitesse du mouvement en fonction de g, m_1, m_2, l_1 et l_2.



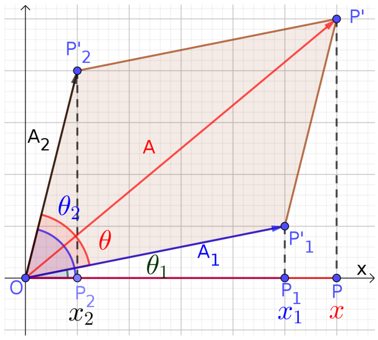
Leçon 5 : Superposition des oscillateurs harmoniques

1. Superposition de deux oscillateurs harmoniques de même direction et de même fréquence

Lorsque deux oscillateurs harmoniques de même direction et de même fréquence se superposent dans un milieu, leur résultante est toujours une onde harmonique de même fréquence, dont l'amplitude varie d'un point à l'autre du milieu.

En effet, Soient deux mouvements oscillatoires harmoniques :

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \theta_1)$$
$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \theta_2)$$



La résultante de superposition est la somme algébrique de deux oscillateurs harmoniques de x_1 et x_2.

$$x = x_1 + x_2$$
$$= A_1 \sin(\omega t + \theta_1) + A_2 \sin(\omega t + \theta)$$

On peut reécrire cette expression sous la forme :

$$x = A \sin(\omega t + \theta)$$

Par conséquent : La somme de deux vibrations de même fréquence et de même direction est encore une vibration harmonique de même fréquence, mais déphasée d'un angle θ et d'une amplitude A.

Selon la figure ci-dessus et en appliquant la règle du parallélograme, on a :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

On obtient aussi le déphasage :

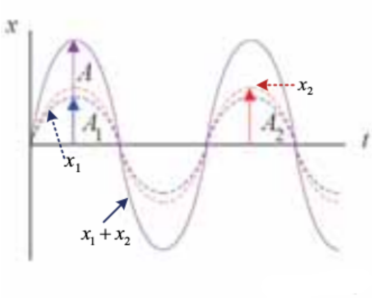
$$\tan\theta = \frac{A_1 \sin\theta_1 + A_2 \sin\theta_2}{A_1 \cos\theta_1 + A_2 \cos\theta_2}$$

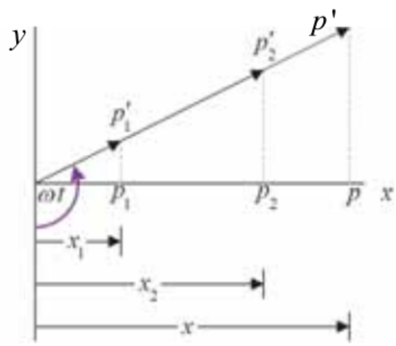
La valeur de l'amplitude A et du déphasage θ sont fonctions des amplitudes A_1 et A_2 et des phases θ_1 et θ_2.

Si les amplitudes A_1 et A_2 sont fixées, l'amplitude résultante ne dépend que du déphasage relatif $\theta = \theta_2 - \theta_1$.

Cas particuliers :

1) les deux vibrations sont en phase : $\theta_2 - \theta_1 = 0$ ou $2k\pi$ (où k entier quelconque)





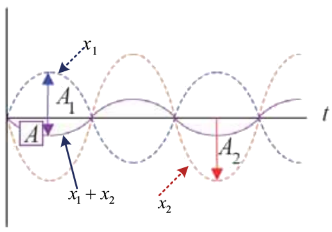
La vibration résultante est aussi en phase ($\theta = \theta_1 = \theta_2$) et son amplitude se réduit à :

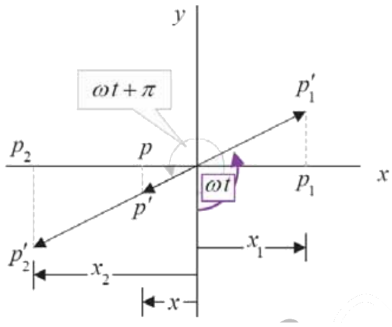
$$\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(1) \\ &= (A_1 + A_2)^2 \\ \Rightarrow A &= A_1 + A_2 \end{aligned}$$

Lorsque les vibrations (ondes) sont en phase, l'amplitude résultante est la somme des amplitudes.

2) les deux vibrations sont en opposition de phase : $\theta_2 - \theta_1 = \pi$ ou $(2\text{k} + 1)\pi$ (où k entier quelconque)
Comme $\cos(\theta_2 - \theta_1) = -1$, la vibration résultante est en phase avec l'une des vibrations (ondes) et en opposition avec l'autre, et l'amplitude résultante est telle que :

$$\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(-1) \\ &= (A_1 - A_2)^2 \\ \Rightarrow A &= |A_1 - A_2| \end{aligned}$$





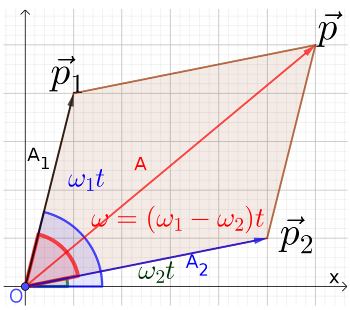
Lorsque les vibrations (ondes) sont en opposition de phase, l'amplitude résultante est la différence des amplitudes.

2. Superposition des oscillateurs harmoniques de même direction, mais avec vitesse angulaire différentes

Soient deux mouvement oscillatoires harmoniques avec les phases initiales nulles $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Les équation du déplacement sont donnés par :

$$x_1 = A_1 \sin \omega_1 t \qquad x_2 = A_2 \sin \omega_2 t \qquad \Rightarrow x = x_1 + x_2$$

On note $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ les vecteurs associés respectivement à chacun des deux déplacements, le résultant est $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$
Il tourne à une vitesse angulaire comprise entre ω_1 et ω_2 mais son amplitude varie au cours du temps, elle est maximale lorsque p_1 et p_2 sont colinéaires de de même sens. Supposons $f_1 > f_2$. Le vecteur $\vec{p}_1$ tourne plus vite que le vecteur $\vec{p}_2$. Sa vitesse angulaire par rapport à la direction de $\vec{p}_2$ est $\omega = \omega_1 - \omega_2$.
L'amplitude totale est calculée par :



$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\omega_1 - \omega_2)t}$$

Si $(\omega_1 - \omega_2)t = 2k\pi \;\; \Rightarrow A = A_1 + A_2$
Si $(\omega_1 - \omega_2)t = (2k+1)\pi \;\; \Rightarrow A = |A_1 - A_2|$
On se place dans le cas où les deux oscillations ont même amplitude $A_1 = A_2$, (sinon le calcul n'est pas possible). On utilise les formules de trigonométrie.

$$x = x_1 + x_2 = A_1(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t)$$

en utilisant la relation bien connue de tous : $\sin p + \sin q = 2\cos(\frac{p-q}{2})\sin(\frac{p+q}{2})$, on trouve

$$x = 2A_1\cos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2})t\sin(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2})t$$

Soient $\omega_m = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ moyenne des pulsations et $\omega_{mod} = \frac{\omega_1-\omega_2}{2}$ demi-différence des pulsations (ou modulation). On a

$$\begin{aligned} x &= 2A_1\cos\omega_{mod}t\sin\omega_m t \\ &= A_{mod}\sin\omega_m t \end{aligned}$$

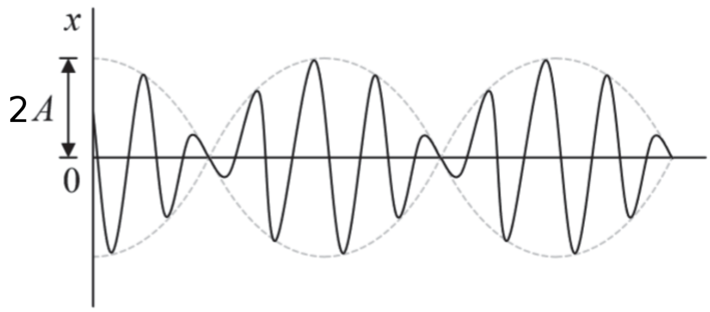
La fonction $\sin\omega_m t$ est modulée en ampltude par la fonction :

$$\begin{aligned} A_{mod} &= 2A_1\cos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2})t \\ &= A_1\sqrt{2[1+\cos(\omega_1 - \omega_2)t]} \end{aligned}$$

cette relation représente l'amplitude de la superposition des deux ondes, le mouvement est oscillateur harmonique de pulsation légèrement différente, donc, il produit un phénomène de battement.
la fréquence des battements :

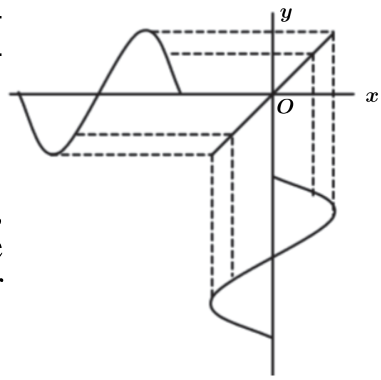
$$\begin{aligned} f_b &= |f_1 - f_2| \\ &= |\frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2\pi}| \end{aligned}$$

la variation de l'amplitude ($A = 2A_1\cos\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t$) est de 0 à $2A$.



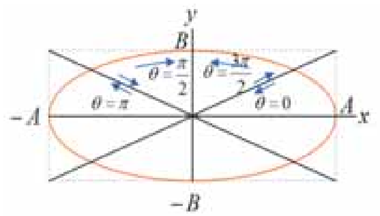
3. Superposition des oscillateurs harmoniques de direction perpendiculaire, avec la même vitesse angulaire

Supposons qu'une particule peut se déplacer par une oscillation harmonique dans deux directions perpendiculaires, c'est-à-dire que dans la direction (ox) l'équation du déplacement est donnée par :
$x = A\sin(\omega t + \theta_x)$ et dans la direction (oy) :
$y = B\sin(\omega t + \theta_y)$.
Pour exciter le mouvement dans des deux directions, le mouvement de la particule est la superposition de deux oscillateurs harmoniques x et y. Pour simplifier d'analyse on pose $\theta_x = 0$ et $\theta_y = \theta$, on a :



$$x = Asin\omega t \quad \text{et} \quad \mathrm{y} = \mathrm{B}\sin(\omega \mathrm{t} + \theta)$$

- si $\theta = 0$, $y = B\sin\omega t$, on a la relation : $y = \frac{B}{A}x$
- si $\theta = \pi$, $y = -B\sin\omega t$, on a la relation $y = -\frac{B}{A}x$
  Dans les deux cas, la forme est toujours une droite avec une distance de



$$\begin{aligned} r = \sqrt{x^2+y^2} &= \sqrt{x^2+x^2\frac{B^2}{A^2}} \\ &= \frac{x}{A}\sqrt{A^2+B^2} \\ &= \sqrt{A^2+B^2}\sin\omega t \end{aligned}$$

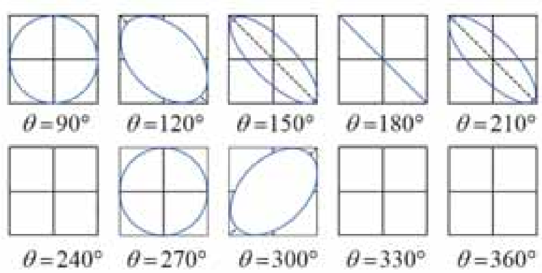
C'est une équation de l'oscillateur harmonique simple de l'amplitude :

$$\sqrt{A^2+B^2}$$

- si $\theta = \frac{\pi}{2}$, $y = B\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = B\cos\omega t$, on a la relation

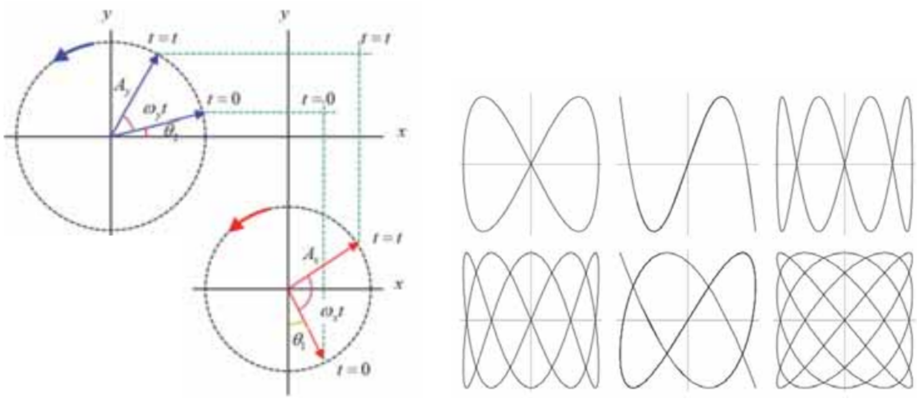
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

c'est l'équation d'une ellipse.
Lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $x = A\sin\omega t$ signifie que $\sin\omega t = 1$. Donc, en $x = A$, la vitesse $v_y = \frac{dy}{dt} = -B\omega\sin\omega t = -B\omega$, on trouve que sa vitesse est parallèle à l'axe y, la direction du mouvement de la particule est descendre vers le bas et avec un sens de l'aiguille du montre.
Lorsque $\theta = \frac{3\pi}{2}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{2}$ sa trajectoire est une ellipse mais, son sens est contraire au sens de l'aiguille du montre. Et lorsque $A = B$ l'ellipse devient d'un cercle (voir la figure ci-dessous). Dans le cas où $A = B$, on peut trouver dans un instrument de mesure : oscilloscope



4. Superposition des oscillateurs harmoniques de direction perpendiculaire, avec la vitesse angulaire différentes

La superposition de deux mouvement oscillatoires harmonique de direction perpendiculaire avec la vitesse angulaire différentes, la fréquence de chaque axe est proportionnelle aux $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, ... La courbe représentation graphique est appelée figure de **Lissajous**, voir la figure ci-dessous.



Exemple : Soient deux mouvement oscillatoires harmoniques de même direction, avec la même vitesse angulaire dont l'équation de déplacement sont respectivement :

$$x_1 = 2\cos(\omega t + \frac{\pi}{3}) \qquad x_2 = 3\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

l'unité de x_1 et x_2 est en centimètre, si on combine les deux mouvement, déterminer :

a) l'amplitude maximale de la résultante

b) le déphasage de la résultante

c) l'équation de déplacement de la résultante

Solution

L'amplitude maximale est calculée par :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\theta_2 - \theta_1)} \\ &= \sqrt{2^2 + 3^2 + 2(2)(3)\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})} \\ &= \sqrt{13 + 6\sqrt{3}} \\ &\approx 4.84\ cm \end{aligned}$$

Le déphasage de l'oscillation

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{A_1\sin\theta_1 + A_2\sin\theta_2}{A_1\cos\theta_1 + A_2 + \cos\theta_2}\\ &= \frac{2\sin\frac{\pi}{3} + 3\sin\frac{\pi}{2}}{2\cos\frac{\pi}{3} + 3\cos\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{2(\frac{\sqrt{3}}{2}) + 3(1)}{2(\frac{1}{2}) + 3(0)}\\ &\approx 4.732\\ &\Rightarrow \theta = \arctan(4.732) \approx 0.43\pi\end{aligned}$$

L'équation de la résultante est :

$$\begin{aligned}x &= A\cos(\omega t + \theta)\\ &= 4.84\cos(\omega t + 0.43\pi)\ \ [\text{cm}]\end{aligned}$$

Exercices

1. Soient deux oscillations uniformes (ou régulières) de la même directions et de la même périodes avec l'équations de déplacement : $x_1 = 2\sin 20\pi t$ [cm] et $x_2 = 2\cos(20\pi t - \frac{\pi}{6})$ [cm] respectivement. Déterminer l'amplitude totale et la phase initiale.
   ☐ 2 [cm], $\frac{\pi}{6}$ rad ☐ 2 [cm] ; $\frac{\pi}{4}$ rad ☐ $2\sqrt{3}$ [cm] ; $\frac{\pi}{6}$ rad ☐ $2\sqrt{3}$ [cm] ; $\frac{\pi}{3}$ rad
2. Un objet est en mouvement oscillatoire harmonique par la combinaison de deux oscillateurs harmoniques de la même directions, les équations de déplacements sont repectivements :
   $x_1 = 3\sin\omega t$ [cm] et $x_2 = 4\cos\omega t + \frac{\pi}{2}$ [cm].
   Quelles sont sa amplitude totale et son déphasage.
   ☐ 5 [cm], $\frac{\pi}{4}$ ☐ 5 [cm] ; $\frac{\pi}{3}$ ☐ 1 [cm] ; π ☐ 10 [cm] ; $\frac{\pi}{2}$
3. Un objet oscille par une composition de deux oscillateurs harmoniques de la même directions. Déterminer l'équations de la résultante :
   a) $x_1 = 6\sin\pi t$ (cm) ; $x_2 = 3\cos\pi t$ [cm]
   b) $x_1 = 4\sin(2\pi t + \frac{\pi}{2})$ [cm] ; $x_2 = 8\sin(2\pi t - \frac{\pi}{6})$ [cm]
   c) $x_1 = 3\sin(2\pi t - \frac{\pi}{3})$ [cm] ; $x_2 = 3\sin(2\pi t + \frac{\pi}{6})$ [cm]
4. Un objet oscille par une composition de trois oscillateurs harmoniques de la même directions, les trois équations sont données par :
   $x_1 = 3\sin t$ [cm] ; $x_2 = 3\cos t = 3\sin(t + \frac{\pi}{2})$ [cm] ; $x_3 = 7\sin(t - \frac{\pi}{2})$ [cm].
   Écrire l'équation de la résultante des compositions ces trois oscillations.
5. L'équation d'une résultante de la composition de deux oscillateurs harmoniques de même direction et de même fréquence est :
   $x = x_1 + x_2 = 12\sin(2\pi t + \frac{\pi}{6})$ [cm] tels ques :
   $x_1 = 6\sqrt{3}\sin(2\pi t + \frac{\pi}{3})$ [cm] et $x_2 = A_2\sin(2\pi t + \theta_2)$ [cm].
   Déterminer l'amplitude A_2 et la phase θ_2.

6. Un corps de masse de 0.2 kg, oscille par une composition de deux oscillateurs harmoniques de même direction et de même fréquence et tel que :
   $x_1 = 2\sqrt{3}\sin(20t - \frac{\pi}{6})$ [cm] et $x_2 = A_2\sin(20t + \frac{\pi}{2})$ [cm].
   L'énergie cinétique maximale d'oscillation est de 0.036 J. Déterminer l'équation de la résultante x et tracer la courbe représentative de x_2 en fonction du temps t.