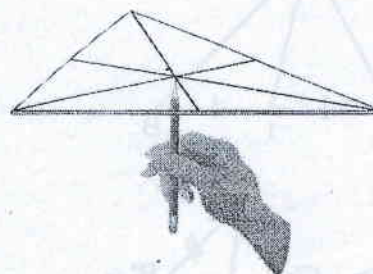
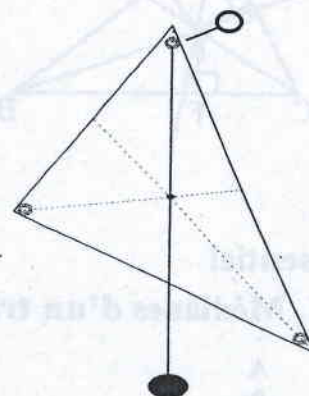


Leçon 33 : Droites remarquables dans un triangle

1. Activités

Activité 1

- Dessiner un triangle quelconque assez grand sur du carton fort, puis le découper.
- Sur chaque sommet, faire un trou assez grand.
- A chaque sommet attacher avec un fil pondéré par une masse, afficher ce triangle sur le mur, puis tracer la droite suivant le fil (comme la figure ci-contre)
- De même manière pour les deux sommets, puis donner la remarque.
- Poser ce triangle sur un crayon ou un doigt (comme la figure ci-contre), puis donner la remarque.
- Comment appelle-t-on le point d'intersection des trois droites ?



Activité 2

Construire un triangle ABC avec les angles \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} aigus et un triangle EDF avec l'angle \hat{D} obtus. Sur chacune des figures, donner la remarque des points d'intersection de:

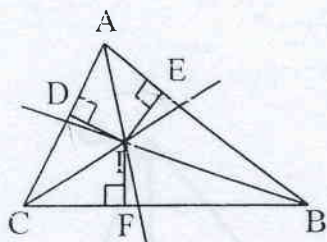
- trois hauteurs ;
- trois médianes ;
- trois médiatrices ;
- trois bissectrices.

Activité 3

ABC est un triangle ; O est le point d'intersection de ces trois médiatrices.

- Montrer que $OA = OB = OC$
- Tracer un cercle de centre O et de rayon OA . Que constate-on pour les trois sommets A , B et C de ce triangle.
- Comment sont ce cercle et ce triangle ?

Activité 4

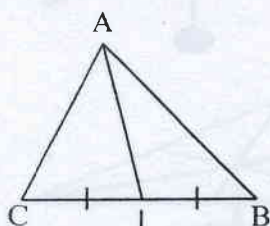


Sur la figure, AI, BI, CI sont trois bissectrices intérieures du triangle ABC.

- Montrer que $ID = IE = IF$
- Tracer un cercle de centre I et de rayon ID. Que constate-on sur les trois côtés de ce triangle et ce cercle ?
- Comment sont ce cercle et ce triangle ?

2. Essentiel

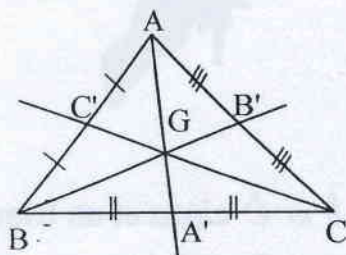
1. Médiannes d'un triangle



a. Définition:

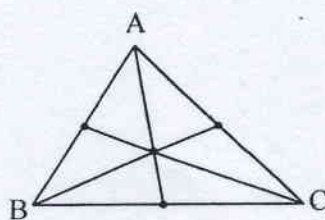
On appelle médiane d'un triangle, chaque droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé.

- I est le milieu de [BC], la médiane issue de A est le segment [AI].



Propriétés :

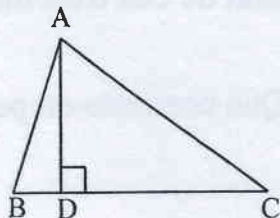
Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point G. Ce point de concours G est appelé le centre de gravité du triangle.



b. Construction des médianes

- Placer les milieux de trois côtés du triangle
- Joindre chaque sommet du triangle au milieu du côté opposé.

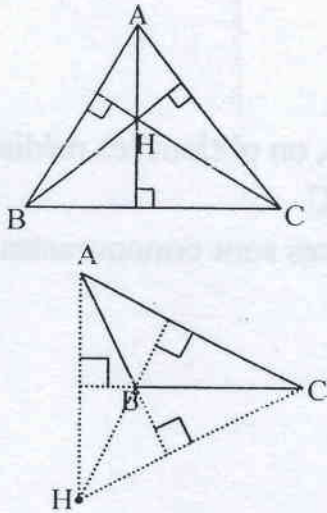
2. Hauteurs d'un triangle



a. Définition :

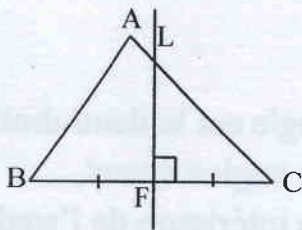
On appelle hauteur d'un triangle, chaque droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

- $AD \perp BC$, la hauteur issue de A est le segment [AD].

**Propriétés :**

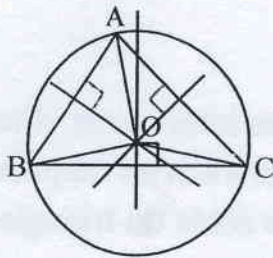
Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H. Ce point de concours H est appelé l'orthocentre du triangle.

- H est l'orthocentre du triangle ABC.
- Si un triangle a un angle obtus, l'orthocentre H est situé à l'extérieur de ce triangle.

3. Médiatrices des côtés d'un triangle**a. Définition :**

On appelle médiatrice d'un côté d'un triangle, la droite perpendiculaire à ce côté en son milieu.

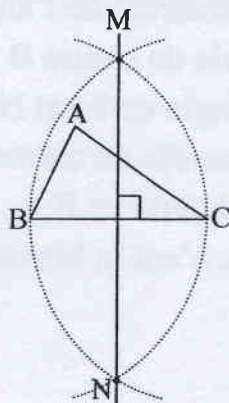
- F est le milieu de [BC], $FL \perp BC$,
- FL est la médiatrice de [BC].

**Propriétés :**

Les trois médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes en un point O. Ce point de concours O est équidistant aux trois sommets de ce triangle : $OA = OB = OC$

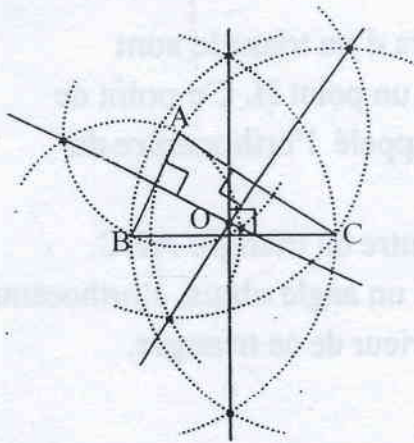
Ce point O est le centre du cercle circonscrit au triangle.

- Si un triangle a un angle obtus, le point d'intersection O est situé à l'extérieur de ce triangle.

b. Construction des médiatrices**Exemple :**

Construction de la médiatrice du côté BC

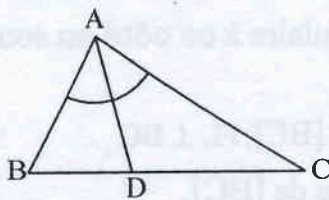
- Tracer deux arcs de cercle de centres A et B et de même rayon BC.
- Ils se coupent en M et N.
- La droite (MN) est la bissectrice du côté BC.



- De même manière, on obtient les médiatrices des côtés AB et AC.
- Ces trois médiatrices sont concourantes en un point O.

4. Bissectrices

1. Bissectrices intérieures



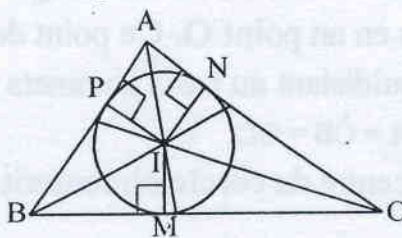
a. Définition:

La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui le partage en deux angles égaux.

- AD est la bissectrice intérieure de l'angle \hat{A} , on a : $B\hat{A}D = D\hat{A}C$

Propriétés :

- Les trois bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes en un point I équidistant des trois côtés du triangle.
 $IM = IN = IP$
- I est le centre du cercle tangent aux trois côtés du triangle. On dit que ce cercle est inscrit dans le triangle.

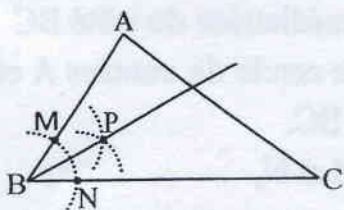
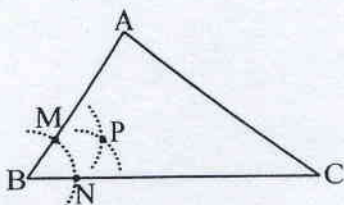


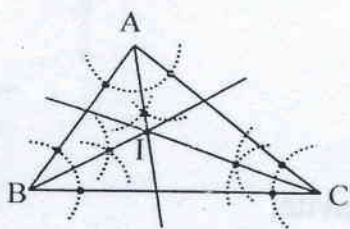
b. Construction des bissectrices

Exemple :

Construction de la bissectrice de l'angle \hat{B}

- Tracer un arc de cercle de centre B qui coupe les côtés de l'angle en M et N.
- Tracer deux arcs de cercle de même rayon, de centres M et N, sécants en P.
- Tracer la droite (BP), c'est la bissectrice de l'angle \hat{B} .



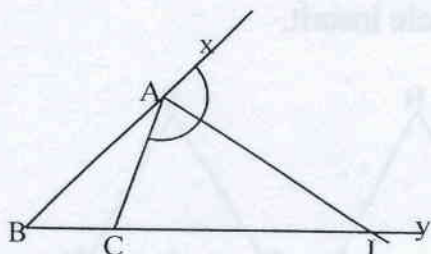


- De même manière, on obtient les bissectrices des angles \hat{A} et \hat{C} .
- Ces trois bissectrices sont concourantes en un point I.

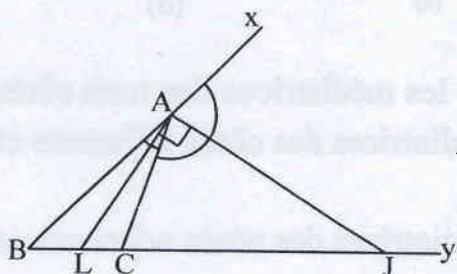
2. Bissectrices extérieures

a. Définition :

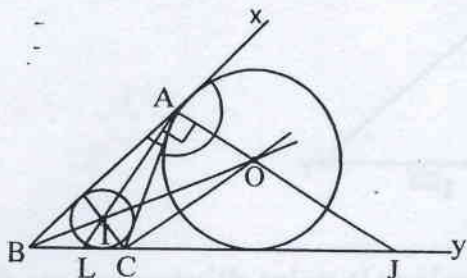
La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui le partage en deux angles égaux.



- Sur la figure, [AJ] est la bissectrice extérieure de l'angle \hat{A} , on a : $\hat{CAJ} = \hat{JAx}$.



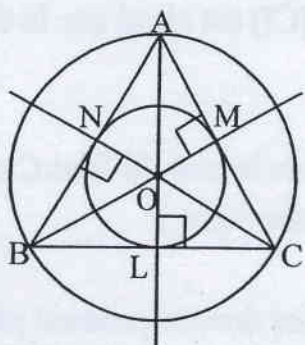
- Les bissectrices intérieures et extérieures d'un angle sont perpendiculaires.
- Sur la figure, [AJ] est la bissectrice extérieure de l'angle \hat{A} et (AL) est la bissectrice intérieure de l'angle \hat{A} , on a : $(AL) \perp (AJ)$



Propriétés :

- Les bissectrices extérieures de deux angles d'un triangle et la bissectrice intérieure du troisième angle sont concourantes en un point O.
- O est le centre du cercle tangent aux côtés du triangle.

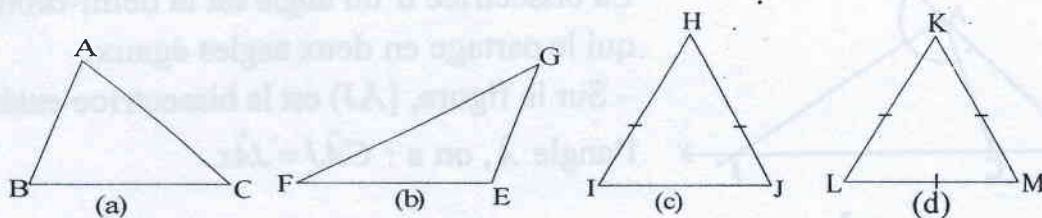
5. Triangle équilatéral



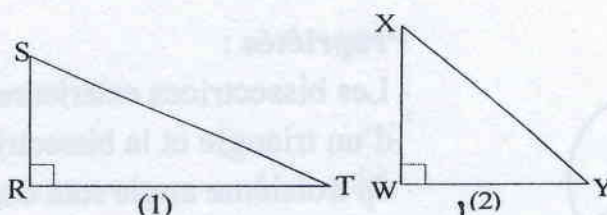
Dans un triangle équilatéral, les trois axes de symétrie sont aussi hauteurs, médianes, bissectrices, médiatrices de ce triangle et sont concourantes en un point unique. Ce point de concours est aussi le centre de gravité, l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit, le centre du cercle inscrit dans ce triangle.

Exercices

1. Reproduire les figures suivantes puis,
- sur la figure (a), construire son centre de gravité;
 - sur la figure (b), construire son orthocentre;
 - sur la figure (c), construire le centre du cercle circonscrit;
 - sur la figure (d), construire le centre du cercle inscrit.



2. Sur chacun des triangles ci-dessous, tracer les médiatrices des trois côtés.
- sur la figure (1), montrer que les deux médiatrices des côtés adjacents et les côtés adjacents forment un rectangle.
 - sur la figure (2), montrer que les deux médiatrices des côtés adjacents et les côtés adjacents forment un carré.



3. ABC est un triangle rectangle en A. Déterminer le point d'intersection des trois médiatrices et celui des trois hauteurs puis donner la remarque.
4. ABCD est un parallélogramme, I est milieu de [AB] et J le milieu de [BC]. Montrer que le point d'intersection de [AJ] et [CI] est situé sur la diagonale BD du parallélogramme.
5. ABC est un triangle isocèle en A. Deux médianes issues de B et C se coupent en I. Montrer que la bissectrice de l'angle A passant par I.
6. ABC est un triangle. M est le milieu de [BC]. Les droites passant par M, parallèle à (AC) coupe (AB) en K, parallèle à (AB) coupe (AC) en N. Montrer que les droites (AM), (KC) et (BN) se coupent en un point I.

7. ABC est un triangle isocèle en A. Les hauteurs issues de B et C se coupent en I. Montrer que les droites (AI) et (BC) sont perpendiculaires.
8. Les points A, B, C et D sont alignés. Sachant que $AB = CD$, montrer que M, le milieu de [BC] est aussi le milieu de [AD].
9. ABCD est un parallélogramme de centre O. Les médiatrices des côtés AB et AD se coupent en K. Montrer que les droites (OK) et (BD) sont perpendiculaires.
10. ABC est un triangle équilatéral. La droite passant par B, parallèle à (AC) et la droite passant par C, parallèle à (AB) se coupent en E. Montrer que le triangle EBC est équilatéral.
11. Les points A, B, C et D sont situés sur un cercle.
 - Tracer les hauteurs respectives CI et DJ des triangles ABC et ABD.
 - Que peut-on dire des droites (DJ) et (CI) ?
12. ABCD est un parallélogramme. M est un point extérieur de (AC) et (BD).
 - Quel est le centre de gravité de chacun des triangles AMC et BMD ?
 - Que constate-t-on ?
13. Soit H le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC rectangle en A. M est un point du segment [BC]. Le cercle C de diamètre AM coupe AB en I et AC en J. Montrer que :
 - a. H est sur C.
 - b. AIMJ est un rectangle.
 - c. Si ABC est un triangle rectangle isocèle, trouver la position de M sur [BC] pour que la longueur de [IJ] soit la plus courte ?