Intégrales de John Wallis

On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$ pour tout entier naturel n.

1. a. Calculer I_0 et I_1 .

b. Prouver que la suite (I_n) est décroissante.

2. a. En utilisant une intégration par parties en partant de I_{n+2} ,
montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $(n + 2) I_{n+2} = (n + 1) I_n$.

b. En déduire I_2 et I_3 .

3. a. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $I_{2n} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}$.

En déduire que, pour tout entier $n \geq 0$, $I_{2n} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n) !}{4^n \, n!^2}$.

b. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $I_{2n+1} = \frac{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}{1 \times 3 \times \ldots \times (2n+1)}$.

En déduire que, pour tout entier $n \geq 0$, $I_{2n+1} = \frac{n!^2 \, 4^n}{(2n + 1) !}$.

4. a. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$. $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$.

b. En déduire la limite de la suite ($\frac{I_{n+1}}{I_n}$).

c. En utilisant le quotient $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$, montrer que $\lim_{n \to +\infty} \frac{n!^4 \, 4^{2n}}{(2n) !^2 \, n} = \pi$.

d. La convergence semble-t-elle rapide ?

Source

Manuel de CPGE Cours d’analyse, Editions Ellipses, Guégand Roque Leboeuf.

Information

John Wallis (Ashford 1616 – Oxford 1703).
Prêtre et mathématicien anglais, précurseur du calcul infinitésimal.

Intégrales de John Wallis

1.a. $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, \mathrm{d}t = [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

1.b. $I_n - I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} t \, \mathrm{d}t$

donc $I_n - I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, (1 - \sin t) \, \mathrm{d}t$.

Pour tout réel t de $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, $\sin t \geq 0$ donc $\sin^n t \geq 0$. $0 \leq \sin t \leq 1$ donc $1 - \sin t \geq 0$.

$\sin^n t \, (1 - \sin t) \geq 0$ donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, (1 - \sin t) \, \mathrm{d}t$ donc $I_n - I_{n+1} \geq 0$.

On en déduit que la suite (I_n) est décroissante.

2.a. Pour tout entier $n \geq 0$,

$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \times \sin^{n+1} t \, \mathrm{d}t$

donc $I_{n+2} = [-\cos t \sin^{n+1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(n+1) \cos t \times \cos t \times \sin^n t \, \mathrm{d}t$

donc $I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \times \sin^n t \, \mathrm{d}t$

donc $I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t \, \mathrm{d}t$

donc $I_{n+2} = (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}$

On en déduit que $(n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n$.

2.b. $(0+2) I_2 = (0+1) I_0$ donc $2 I_2 = \frac{\pi}{2}$ donc $I_2 = \frac{\pi}{4}$.

$(1+2) I_3 = (1+1) I_1$ donc $3 I_3 = 2$ donc $I_3 = \frac{2}{3}$.

Intégrales de John Wallis

3.a. Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

Pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$, $(2k+2)\, I_{2k+2} = (2k+1)\, I_{2k}$

donc, par produit, $(2 \times 4 \times \ldots \times 2n)\, I_{2n} = 1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)\, I_0$

donc $I_{2n} = \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}$

donc $I_{2n} = \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (2n-1) \times 2n}{(2 \times 4 \times \ldots \times 2n)^2}$

donc $I_{2n} = \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\, n!^2}$

donc $I_{2n} = \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{(2n)!}{4^n\, n!^2}$.

Cette dernière formule est valable pour $n = 0$ car par convention $0! = 1$.

3.b. Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

Pour tout entier k compris entre 1 et n, $(2k+1)\, I_{2k+1} = (2k)\, I_{2k-1}$

donc, par produit, $1 \times 3 \times \ldots \times (2n+1)\, I_{2n+1} = (2 \times 4 \times \ldots \times 2n)\, I_1$

donc $I_{2n+1} = \dfrac{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}{1 \times 3 \times \ldots \times (2n+1)}$

donc $I_{2n+1} = \dfrac{2^2 \times 4^2 \times \ldots \times (2n)^2}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots \times 2n \times (2n+1)}$

donc $I_{2n+1} = \dfrac{(2^n\, n!)^2}{(2n+1)!}$

donc $I_{2n+1} = \dfrac{4^n\, n!^2}{(2n+1)!}$.

Intégrales de John Wallis

4.a. La suite (I_n) est décroissante

donc, pour tout entier $n \geq 0$,

$I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$

donc $\dfrac{I_{n+2}}{I_n} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$ or $(n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n$

donc $\dfrac{n+1}{n+2} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$.

4.b. Pour tout entier $n \geq 0$, $\dfrac{n+1}{n+2} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+1}{n+2} = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1$.

4.c. Pour tout entier $n \geq 1$,

$\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \dfrac{2}{\pi} \times \dfrac{4^n \, n!^2}{(2n+1)!} \times \dfrac{4^n \, n!^2}{(2n)!}$

donc $\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \dfrac{2}{\pi} \times \dfrac{n!^4 \, 4^{2n}}{(2n)!^2 \, (2n+1)}$

donc $\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \dfrac{1}{\pi} \times \dfrac{2n}{2n+1} \times \dfrac{n!^4 \, 4^{2n}}{(2n)!^2 \, n}$

donc $\dfrac{n!^4 \, 4^{2n}}{(2n)!^2 \, n} = \pi \times \dfrac{2n+1}{2n} \times \dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$.

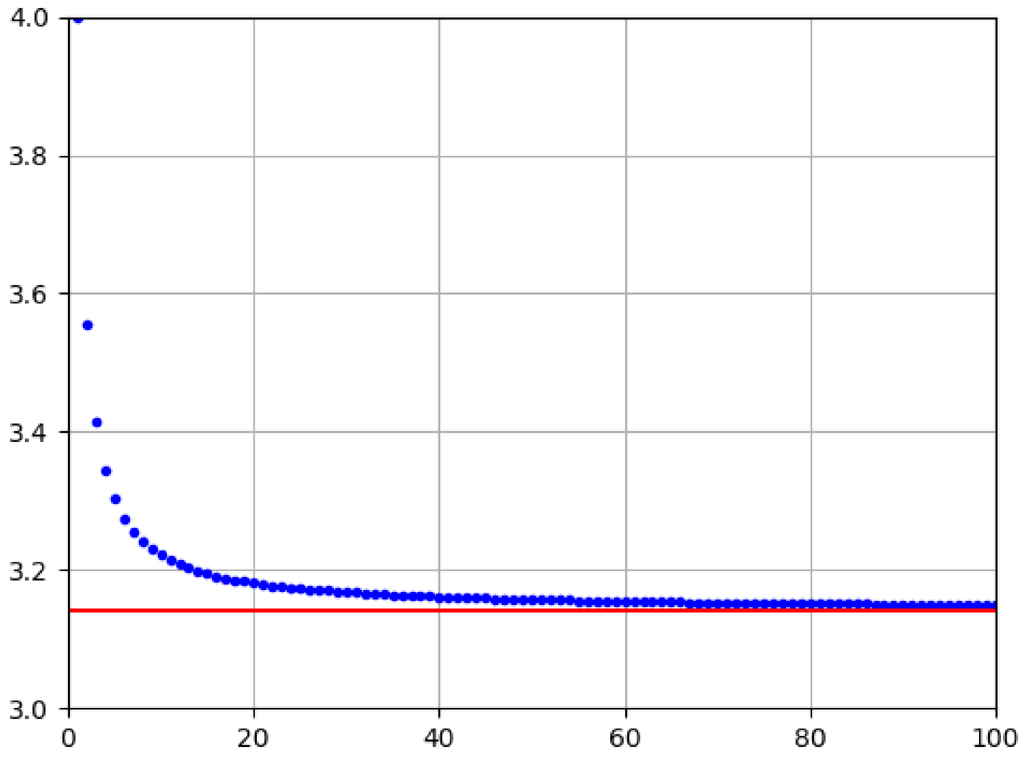
$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n+1}{2n} = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n!^4 \, 4^{2n}}{(2n)!^2 \, n} = \pi$.

4.d. En utilisant un programme sous EduPython, la convergence semble lente.

```
from pylab import *

def wallis ( n ) :
    p = 4
    for k in range ( 1 , n + 1 ) :
        p = p * 4 * k * ( k + 1 ) / ( 2 * k + 1 ) ** 2
    d = p – pi
    plot ( [ 0 , n ] , [ pi , p i ] , ' r ' )
    axis ( [ 0 , n , 3 , 4 ] )
    grid ( ) ; show ( )
    return ( n , p , d )

print ( wallis ( 100 ) )
```

Graphique Python

Nuage de points (k ; p_k) pour k entier compris entre 1 et 100.



Vers la formule de James Stirling

Partie A Étude d'une fonction

La fonction f est définie sur $] 0 ; +\infty [$ par $f(x) = \frac{2}{2x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O , I , J).
C_f est la courbe représentative de la fonction f.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en 0. Interpréter graphiquement.
b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement.

2. a. Étudier les variations de la fonction f sur $] 0 ; +\infty [$.
b. Déterminer le signe de la fonction f sur $] 0 ; +\infty [$.
c. Tracer la courbe C_f et ses asymptotes.

Partie B Étude d'une suite

La suite (u_n) est définie par, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{n}}$.

La suite (v_n) est définie par, pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = \ln(u_n)$.

1. a. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} - v_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) f(n)$.
b. En déduire la monotonie de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n).

2. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

Partie C Formule de Stirling

On peut montrer que la suite (u_n) a pour limite $L = \sqrt{2\pi}$ à l'aide d'une formule de Wallis.

Justifier la formule de James Stirling : $n!$ est proche de $\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ pour n assez grand.

Source

Manuel Hyperbole, Editions Nathan 2002, Exercice 136 page 141.

Information

James Stirling (1692 – 1770).
Mathématicien Ecossais , spécialiste de l'étude des séries.

Vers la formule de James Stirling

Partie A Étude d'une fonction

1.a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{2x+1} = 2$.

$\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to 0} -\ln(x+1) = 0$.

Par somme, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe C_f au voisinage de 0.

1.b. Pour tout réel x de $]\,0\,;+\infty\,[$,

$$f(x) = \frac{2}{2x+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{y \to 1} \ln(y) = 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 0$ (par composée).

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{2x+1} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (par différence).

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

Vers la formule de James Stirling

Partie A **Étude d'une fonction**

2.a. Pour tout réel x de $]\,0\,;+\infty\,[$,

$$f(x)=\frac{2}{2x+1}+\ln(x)-\ln(x+1)$$

$$\text{donc } f'(x)=-\frac{4}{(2x+1)^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$

$$\text{donc } f'(x)=\frac{1}{x(x+1)}-\frac{4}{(2x+1)^2}$$

$$\text{donc } f'(x)=\frac{(2x+1)^2-4x(x+1)}{x(x+1)(2x+1)^2}$$

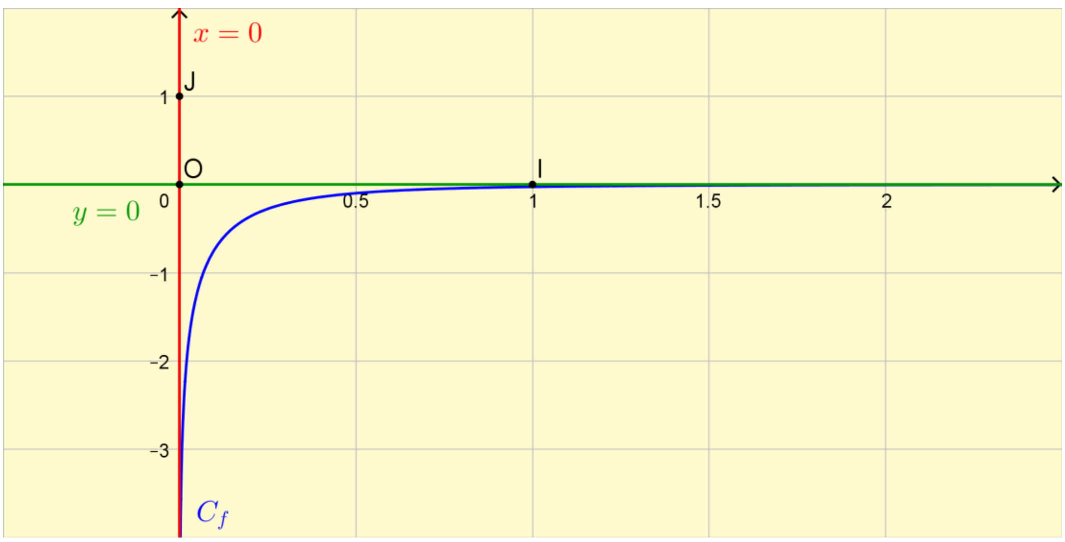
$$\text{donc } f'(x)=\frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2}.$$

$f'>0$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ donc f est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗ 0

2.b. On en déduit que $f(x)<0$ pour tout réel x de $]\,0\,;+\infty\,[$.

2.c.



Vers la formule de James Stirling

Partie B Étude d'une suite

1.a. Pour tout entier $n \geq 1$,

$v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$

donc $v_{n+1} - v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!\,e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}} \times \frac{n^n\sqrt{n}}{n!\,e^n}$$

donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e \times \sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \times \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.

$\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1 + \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = 1 + \left(n + \dfrac{1}{2}\right)[\ln(n) - \ln(n+1)]$.

$\left(n + \dfrac{1}{2}\right) f(n) = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\left[\dfrac{1}{n + \frac{1}{2}} + \ln(n) - \ln(n+1)\right]$.

Par conséquent $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \left(n + \dfrac{1}{2}\right) f(n)$

donc $v_{n+1} - v_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right) f(n)$.

1.b. Pour tout entier $n \geq 1$, $n + \dfrac{1}{2} > 0$ et $f(n) < 0$ donc $v_{n+1} - v_n < 0$.

La suite (v_n) est strictement décroissante.

Pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = e^{v_n}$.

La suite (v_n) est strictement décroissante et exp est strictement croissante sur **R**.
donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

2. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0
donc la suite (u_n) est convergente.

Vers la formule de James Stirling

Partie C Formule de Stirling

On admet que la suite (u_n) a pour limite $\sqrt{2\pi}$.

Pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}}$.

Pour n assez grand,

$\dfrac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}}$ est proche de $\sqrt{2\pi}$

donc $n!$ est proche de $\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$.

Vers la formule de James Stirling : conjecture

On se propose de conjecturer que la suite (u_n) converge vers $L = \sqrt{2\pi}$.
Le calcul de u_n pose des problèmes pour $n \geq 70$ à cause de n ! avec les calculatrices de base.

On va ruser en effectuant le calcul de v_n grâce à $v_{n+1} = v_n + \left(n + \frac{1}{2}\right) f(n)$.

$\left(n + \frac{1}{2}\right) f(n) = 1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) [\ln(n) - \ln(n+1)]$

donc $\left(n + \frac{1}{2}\right) f(n) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) [\ln(n+1) - \ln(n)]$

donc $\left(n + \frac{1}{2}\right) f(n) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$v_{n+1} = v_n + 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ et $v_1 = 1$ car $u_1 = e$.

Script Python

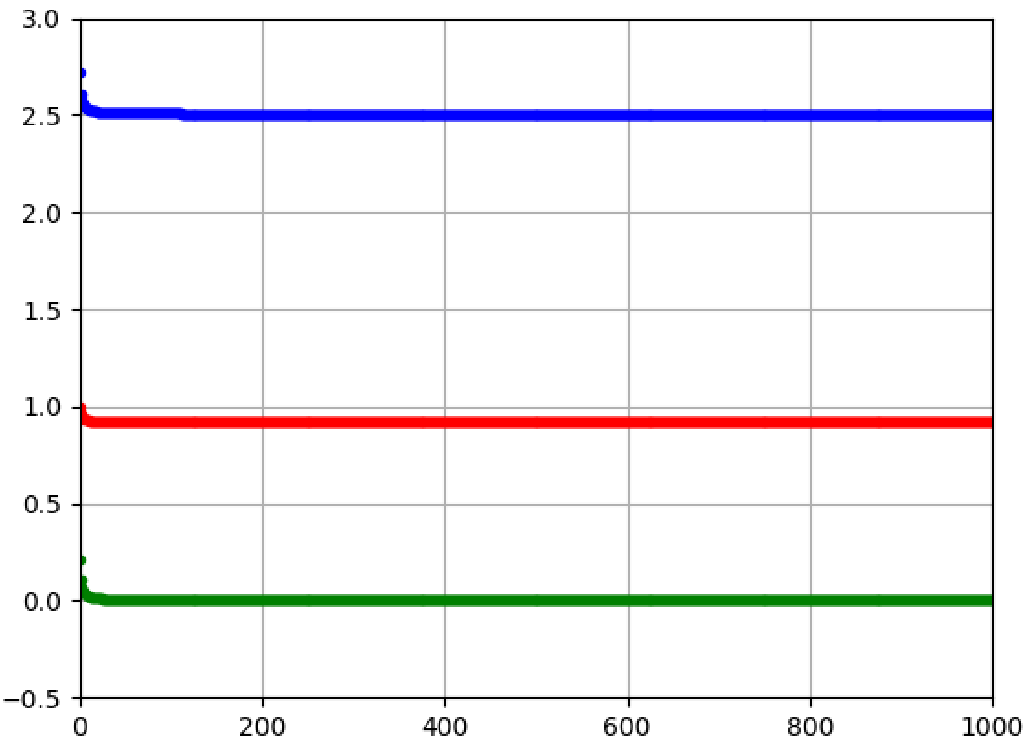
```
from pylab import *

def stirling ( n ) :
    L = sqrt ( 2 * pi )
    v = 1
    for k in range ( 1 , n + 1 ) :
        u = exp ( v )
        d = u – L
        plot ( k , u , ' b . ' )
        plot ( k , v , ' r . ' )
        plot ( k , d , ' g . ' )
        if k % 100 = = 0 :
            print ( ( k , u , v , d ) )
            print ( " " )
        v = v + 1 – ( k + 1 / 2 ) * log ( 1 + 1 / k )
    axis ( [ 0 , n , – 0.5 , 3 ] )
    grid ( ) ; show ( )
    return

stirling ( 1000 )
```

À l’aide du script Python, compléter le tableau à l’aide d’arrondis à 10^{-6} si nécessaire.

n	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
v_n										
u_n										
$u_n - L$										

Vers la formule de James Stirling : conjecture

n	v_n	u_n	$u_n - L$
100	2,508718	0,919772	0,002090
200	2,507673	0,919355	0,001045
300	2,507325	0,919216	0,000696
400	2,507151	0,919147	0,000522
500	2,507046	0,919105	0,000418
600	2,506976	0,919077	0,000348
700	2,506927	0,919058	0,000298
800	2,506889	0,919043	0,000261
900	2,506860	0,919031	0,000232
1000	2,506837	0,919022	0,000209



Vers la formule de James Stirling : démonstration

Montrons que la suite (u_n) converge vers $L = \sqrt{2\pi}$ à l'aide d'une formule de Wallis.

1. On rappelle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n!^4 \, 4^{2n}}{(2n)!^2 \, n} = \pi$. (Formule de Wallis)

On en déduit que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n!^2 \, 4^n}{2n! \sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$. **(relation 1)**

2.a. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^{\,2} = L^2$.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n! \, e^n}{n^n \sqrt{n}} = L \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} \frac{n!^2 \, e^{2n}}{n^{2n+1}} = L^2.$$

2.b. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n} = L$.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n! \, e^n}{n^n \sqrt{n}} = L \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} \frac{2n! \, e^{2n}}{(2n)^{2n} \sqrt{2n}} = L.$$

2.c. Par quotient, on en déduit que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n!^2 \, 4^n \sqrt{2}}{2n! \sqrt{n}} = L$. **(relation 2)**

3. En comparant les **relations 1 et 2**, on obtient $L = \sqrt{2\pi}$.

4. Pour n assez grand,

$\dfrac{n! \, e^n}{n^n \sqrt{n}}$ est proche de $\sqrt{2\pi}$

donc n ! est proche de $\left(\dfrac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n}$. (Formule de Stirling)