2012-2013

Probabilités-énoncés et corrections

Exercice 1. Une entreprise décide de classer 20 personnes susceptibles d'être embauchées ; leurs CV étant très proches, le patron décide de recourir au hasard : combien y-a-il de classements possibles : sans ex-aequo ; avec exactement 2 ex-aequo ?

Exercice 2. Un étudiant s'habille très vite le matin et prend, au hasard dans la pile d'habits, un pantalon, un tee-shirt, une paire de chaussettes ; il y a ce jour-là dans l'armoire 5 pantalons dont 2 noirs, 6 tee-shirt dont 4 noirs, 8 paires de chaussettes, dont 5 paires noires. Combien y-a-t-il de façons de s'habiller ? Quelles sont les probabilités des événements suivants : il est tout en noir ; une seule pièce est noire sur les trois.

Exercice 3. Si 30 personnes sont présentes à un réveillon et si, à minuit, chaque personne fait 2 bises à toutes les autres, combien de bises se sont-elles échangées en tout ? (On appelle bise un contact entre deux joues...)

Exercice 4. Un QCM comporte 10 questions, pour chacune desquelles 4 réponses sont proposées, une seule est exacte. Combien y-a-t-il de grilles-réponses possibles ? Quelle est la probabilité de répondre au hasard au moins 6 fois correctement ?

Exercice 5. Amédée, Barnabé, Charles tirent sur un oiseau ; si les probabilités de succès sont pour Amédée : 70%, Barnabé : 50%, Charles : 90%, quelle est la probabilité que l'oiseau soit touché ?

Exercice 6. Lors d'une loterie de Noël, 300 billets sont vendus aux enfants de l'école ; 4 billets sont gagnants. J'achète 10 billets, quelle est la probabilité pour que je gagne au moins un lot ?

Exercice 7. La probabilité pour une population d'être atteinte d'une maladie A est p donné ; dans cette même population, un individu peut être atteint par une maladie B avec une probabilité q donnée aussi ; on suppose que les maladies sont indépendantes : quelle est la probabilité d'être atteint par l'une et l'autre de ces maladies ? Quelle est la probabilité d'être atteint par l'une ou l'autre de ces maladies ?

Exercice 8. Dans un jeu de 52 cartes, on prend une carte au hasard : les événements «tirer un roi» et «tirer un pique» sont-ils indépendants ? quelle est la probabilité de «tirer un roi ou un pique» ?

Exercice 9. La famille Potter comporte 2 enfants ; les événements A : «il y a deux enfants de sexes différents chez les Potter» et B : «la famille Potter a au plus une fille» sont-ils indépendants ? Même question si la famille Potter comporte 3 enfants. Généraliser.

Exercice 10. Dans la salle des profs 60% sont des femmes ; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes : quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?

Exercice 11. Une fête réunit 35 hommes, 40 femmes, 25 enfants ; sur une table, il y a 3 urnes H, F, E contenant des boules de couleurs dont respectivement 10%, 40%, 80% de boules noires. Un présentateur aux yeux bandés désigne une personne au hasard et lui demande de tirer une boule dans l'urne H si cette personne est un homme, dans l'urne F si cette personne est une femme, dans l'urne E si cette personne est un enfant. La boule tirée est noire : quelle est la probabilité pour que la boule ait été tirée par un homme ? une femme ? un enfant ? Le présentateur n'est pas plus magicien que vous et moi et pronostique le genre de la personne au hasard : que doit-il dire pour avoir le moins de risque d'erreur ?

Exercice 12. Un fumeur, après avoir lu une série de statistiques effrayantes sur les risques de cancer, problèmes cardio-vasculaires liés au tabac, décide d'arrêter de fumer ; toujours d'après des statistiques, on estime les probabilités suivantes : si cette personne n'a pas fumé un jour J_n, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant J_{n+1} est 0.3 ; mais si elle a fumé un jour J_n, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant J_{n+1} est 0.9 ; quelle est la probabilité P_{n+1} pour qu'elle fume le jour J_{n+1} en fonction de la probabilité P_n pour qu'elle fume le jour J_n ? Quelle est la limite de P_n ? Va-t-il finir par s'arrêter ?

Exercice 13. Un professeur oublie fréquemment ses clés. Pour tout n, on note : E_n l'événement «le jour n, le professeur oublie ses clés», $P_n = P(E_n)$, $Q_n = P(\overline{E_n})$.
On suppose que : $P_1 = a$ est donné et que si le jour n il oublie ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $\frac{1}{10}$; si le jour n il n'oublie pas ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $\frac{4}{10}$.
Montrer que $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}Q_n$. En déduire une relation entre P_{n+1} et P_n
Quelle est la probabilité de l'événement «le jour n, le professeur oublie ses clés» ?

Exercice 14. Dans les barres de chocolat N., on trouve des images équitablement réparties des cinq personnages du dernier Walt Disney, une image par tablette. Ma fille veut avoir le héros Princecharmant : combien dois-je acheter de barres pour que la probabilité d'avoir la figurine attendue dépasse 80% ? Même question pour être sûr à 90%.

Exercice 15. En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires :
Avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés.
Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

1. Quel est le taux global de personnes soulagées ?
2. Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

Exercice 16. Dans une population 40% des individus ont les yeux bruns, 25% des individus ont les cheveux blonds, 15% des individus ont les yeux bruns et les cheveux blonds.
On choisit un individu au hasard. Calculez :

1. La probabilité de l'événement : si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds.
2. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns.
3. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds, de ne pas avoir les yeux bruns.

Exercice 17. Un constructeur aéronautique équipe ses avions trimoteurs d'un moteur central de type A et de deux moteurs, un par aile, de type B ; chaque moteur tombe en panne indépendamment d'un autre, et on estime à p la probabilité pour un moteur de type A de tomber en panne et à q la probabilité pour un moteur de type B de tomber en panne.
Le trimoteur peut voler si le moteur central *ou* les deux moteurs d'ailes fonctionnent : quelle est la probabilité pour l'avion de voler ? Application numérique : $p = 0.001\%$, $q = 0.02\%$.

Exercice 18. On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'hépatite On dispose de tests de dépistage de la maladie :
- Si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité de 95%.
- Si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 10%.

1. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif ?
2. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif ?
3. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif ?
4. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif ?

Exercice 19. Dans mon trousseau de clés il y a 8 clés ; elles sont toutes semblables. Pour rentrer chez moi je mets une clé au hasard ; je fais ainsi des essais jusqu'à ce que je trouve la bonne ; j'écarte au fur et à mesure les mauvaises clés. Quelle est la probabilité pour que j'ouvre la porte :

1. du premier coup ?
2. au troisième essai ?
3. au cinquième essai ?
4. au huitième essai ?

Exercice 20. Six couples sont réunis dans une soirée de réveillon. Une fois les bises de bonne année échangées, on danse, de façon conventionnelle : un homme avec une femme, mais pas forcément la sienne.

1. Quelle est la probabilité $P(A)$ pour que chacun des 6 hommes danse avec son épouse légitime ?
2. Quelle est la probabilité $P(B)$ pour que André danse avec son épouse ?
3. Quelle est la probabilité $P(C)$ pour que André et René dansent avec leur épouse ?
4. Quelle est la probabilité $P(D)$ pour que André ou René danse(nt) avec leur épouse ?

Exercice 21. Dans l'ancienne formule du Loto il fallait choisir 6 numéros parmi 49.

1. Combien y-a-t-il de grilles possibles ? En déduire la probabilité de gagner en jouant une grille.
2. Quelle est la probabilité que la grille gagnante comporte 2 nombres consécutifs ?

Exercice 22. Un débutant à un jeu effectue plusieurs parties successives. Pour la première partie, les probabilités de gagner ou perdre sont les mêmes ; puis, on suppose que :
– Si une partie est gagnée, la probabilité de gagner la suivante est 0.6.
– Si une partie est perdue, la probabilité de perdre la suivante est 0.7.
Soit G_n l'événement «Gagner la partie n», et $u_n = P(G_n)$. On note $v_n = P(\overline{G_n})$.

1. Ecrire 2 relations entre u_n, u_{n+1}, v_n, v_{n+1}.
2. A l'aide de la matrice mise en évidence en déduire u_n et v_n. Faire un calcul direct à l'aide de $u_n + v_n$.

Exercice 23. Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.

1. Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins : quelle est la probabilité des événements :
   A : «Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent».
   B : «Exactement 2 médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent».
2. Soit X la variable aléatoire : «nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres» : Quelle est la loi de probabilité de X, quelle est son espérance, quelle est sa variance ?

Exercice 24. On prend au hasard, en même temps, trois ampoules dans un lot de 15 dont 5 sont défectueuses. Calculer la probabilité des événements :
A : au moins une ampoule est défectueuse ;
B : les 3 ampoules sont défectueuses ;
C : exactement une ampoule est défectueuse.

Exercice 25. Un avion peut accueillir 20 personnes ; des statistiques montrent que 25% clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : «nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20». Quelle est la loi de X ? (on ne donnera que la forme générale) quelle est son espérance, son écart-type ? Quelle est la probabilité pour que X soit égal à 15 ?

Exercice 26. L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets ; les candidats tirent au sort trois sujets et choisissent alors le sujet traité parmi ces trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 100.

1. Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé :
   (a) les trois sujets tirés ;
   (b) exactement deux sujets sur les trois sujets ;
   (c) aucun des trois sujets.
2. Définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Exercice 27. Un candidat se présente à un concours où, cette fois, les 20 questions sont données sous forme de QCM. A chaque question, sont proposées 4 réponses, une seule étant exacte. L'examinateur fait le compte des réponses exactes données par les candidats. Certains candidats répondent au hasard à chaque question ; pour ceux-la, définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Exercice 28. Dans une poste d'un petit village, on remarque qu'entre 10 heures et 11 heures, la probabilité pour que deux personnes entrent durant la même minute est considérée comme nulle et que l'arrivée des personnes est indépendante de la minute considérée. On a observé que la probabilité pour qu'une personne se présente entre la minute n et la minute $n+1$ est : $p = 0.1$. On veut calculer la probabilité pour que : 3,4,5,6,7,8... personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h.

1. Définir une variable aléatoire adaptée, puis répondre au problème considéré.
2. Quelle est la probabilité pour que au moins 10 personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h ?

Exercice 29. Si dans une population une personne sur cent est un centenaire, quelle est la probabilité de trouver au moins un centenaire parmi 100 personnes choisies au hasard ? Et parmi 200 personnes ?

Exercice 30. Un industriel doit vérifier l'état de marche de ses machines et en remplacer certaines le cas échéant. D'après des statistiques précédentes, il évalue à 30% la probabilité pour une machine de tomber en panne en 5 ans ; parmi ces dernières, la probabilité de devenir hors d'usage suite à une panne plus grave est évaluée à 75% ; cette probabilité est de 40% pour une machine n'ayant jamais eu de panne.

1. Quelle est la probabilité pour une machine donnée de plus de cinq ans d'être hors d'usage ?
2. Quelle est la probabilité pour une machine hors d'usage de n'avoir jamais eu de panne auparavant ?
3. Soit X la variable aléatoire «nombre de machines qui tombent en panne au bout de 5 ans, parmi 10 machines choisies au hasard». Quelle est la loi de probabilité de X, (on donnera le type de loi et les formules de calcul), son espérance, sa variance et son écart-type ?
4. Calculer $P[X = 5]$.

Exercice 31. Une population comporte en moyenne une personne mesurant plus de 1m90 sur 80 personnes. Sur 100 personnes, calculer la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m (utiliser une loi de Poisson). Sur 300 personnes, calculer la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m.

Exercice 32. Une usine fabrique des billes de diamètre 8mm. Les erreurs d'usinage provoquent des variations de diamètre. On estime, sur les données antérieures, que l'erreur est une variable aléatoire qui obeit à une loi normale les paramètres étant : moyenne : 0mm, écart-type : 0.02mm. On rejette les pièces dont le diamètre n'est pas compris entre 7.97mm et 8.03mm. Quelle est la proportion de billes rejetées ?

Exercice 33. Des machines fabriquent des plaques de tôle destinées à être empilées.

1. Soit X la variable aléatoire «épaisseur de la plaque en mm» ; on suppose que X suit une loi normale de paramètres $m = 0.3$ et $\sigma = 0.1$. Calculez la probabilité pour que X soit inférieur à 0.36mm et la probabilité pour que X soit compris entre 0.25 et 0.35mm.

2. L'utilisation de ces plaques consiste à en empiler n, numérotées de 1 à n en les prenant au hasard : soit X_i la variable aléatoire «épaisseur de la plaque numéro i en mm» et Z la variable aléatoire «épaisseur des n plaques en mm». Pour $n = 20$, quelle est la loi de Z, son espérance et sa variance ?

Exercice 34. Des machines fabriquent des plaques de tôle destinées à être empilées ; on estime à 0.1% la proportion de plaques inutilisables. L'utilisation de ces plaques consiste à en empiler n, numérotées de 1 à n en les prenant au hasard. Pour $n = 2000$, quelle est la loi suivie par la variable aléatoire N «nombre de plaques inutilisables parmi les 2000» ? (on utilisera une loi de probabilité adaptée) ; quelle est la probabilité pour que N soit inférieure ou égal à 3 ? Quelle est la probabilité pour que N soit strictement inférieure à 3 ?

Exercice 35. Des machines fabriquent des crêpes destinées à être empilées dans des paquets de 10. Chaque crêpe a une épaisseur qui suit une loi normale de paramètres $m = 0.6$mm et $\sigma = 0.1$. Soit X la variable aléatoire «épaisseur du paquet en mm». Calculez la probabilité pour que X soit compris entre 6.3mm et 6.6mm.

Exercice 36. Sur un grand nombre de personnes on a constaté que la répartition du taux de cholestérol suit une loi normale avec les résultats suivants :
- 56% ont un taux inférieur à 165 cg ;
- 34% ont un taux compris entre 165 cg et 180 cg ;
- 10% ont un taux supérieur à 180 cg.

Quelle est le nombre de personnes qu'il faut prévoir de soigner dans une population de 10 000 personnes, si le taux maximum toléré sans traitement est de 182 cg ?

Exercice 37. Pour chacune des variables aléatoires qui sont décrites ci-dessous, indiquez quelle est la loi exacte avec les paramètres éventuels (espérance, variance) et indiquez éventuellement une loi approchée.

1. Nombre annuel d'accidents à un carrefour donné où la probabilité d'accident par jour est estimée à $\frac{4}{365}$.
2. Nombre de garçons dans une famille de 6 enfants ; nombre de filles par jour dans une maternité où naissent en moyenne 30 enfants par jour.
3. Dans un groupe de 21 personnes dont 7 femmes, le nombre de femmes dans une délégation de 6 personnes tirées au hasard.

Exercice 38. On effectue un contrôle de fabrication sur des pièces dont une proportion $p = 0.02$ est défectueuse.

1. On contrôle un lot de 1000 pièces :
   Soit X la variable aléatoire : «nombre de pièces défectueuses parmi 1000». Quelle est la vraie loi de X ? (on ne donnera que la forme générale) ; quel est son espérance, son écart-type ?

2. En approchant cette loi par celle d'une loi normale adaptée, calculez la probabilité pour que X soit compris entre 18 et 22 ($P[18 \leq X \leq 22]$) ; on fera les calculs avec et sans correction de continuité. On fera également les calculs avec la vraie loi pour comparer.

Exercice 39. On effectue un contrôle sur des pièces de un euro dont une proportion $p = 0,05$ est fausse et sur des pièces de 2 euros dont une proportion $p' = 0,02$ est fausse. Il y a dans un lot 500 pièces dont 150 pièces de un euro et 350 pièces de 2 euros.

1. On prend une pièce au hasard dans ce lot : quelle est la probabilité qu'elle soit fausse ?
2. Sachant que cette pièce est fausse, quelle est la probabilité qu'elle soit de un euro ?
3. On contrôle à présent un lot de 1000 pièces de un euro. Soit X la variable aléatoire : «nombre de pièces fausses parmi 1000». Quelle est la vraie loi de X ? (on ne donnera que la forme générale) ; quelle est son espérance, son écart-type ?
4. En approchant cette loi par celle d'une loi normale adaptée, calculez la probabilité pour que X soit compris entre 48 et 52.

Exercice 40. On jette un dé 180 fois. On note X la variable aléatoire : «nombre de sorties du 4».

1. Quelle est la loi de X ?
2. Calculez la probabilité pour que X soit compris entre 29 et 32.

Exercice 41. Aux dernières élections présidentielles en France, le candidat A a obtenu 20% des voix. On prend au hasard dans des bureaux de vote de grandes villes des lots de 200 bulletins : on note X la variable aléatoire «nombre de voix pour A dans les différents bureaux».

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Comment peut-on l'approcher ?
3. Quelle est alors la probabilité pour que : X soit supérieur à 45 ? X compris entre 30 et 50 ?
4. Pour un autre candidat B moins heureux le pourcentage des voix est de 2%. En notant Y le nombre de voix pour B dans les différents bureaux, sur 100 bulletins, reprendre les questions 1 et 2. Quelle est alors la probabilité pour que : Y soit supérieur à 5 ? Y compris entre 1 et 4 ?

Exercice 42. On suppose qu'il y a une probabilité égale à p d'être contrôlé lorsqu'on prend le tram. Monsieur A fait n voyages par an sur cette ligne.

1. On suppose que $p = 0.10$, $n = 700$.

(a) Quelle est la probabilité que Monsieur A soit contrôlé entre 60 et 80 fois dans l'année ?

(b) Monsieur A voyage en fait toujours sans ticket. Afin de prendre en compte la possibilité de faire plusieurs passages avec le même ticket, on suppose que le prix d'un ticket est de 1,12 euros. Quelle amende minimale la compagnie doit-elle fixer pour que le fraudeur ait, sur une période d'une année, une probabilité supérieure à 0.75 d'être perdant ?

2. On suppose que $p = 0.50$, $n = 300$. Monsieur A voyage toujours sans ticket. Sachant que le prix d'un ticket est de 1,12 euros, quelle amende minimale la compagnie doit-elle fixer pour que le fraudeur ait, sur une période d'une année, une probabilité supérieure à 0.75 d'être perdant ?

Correction 1. Classements possibles : sans ex-aequo, il y en a $20!$.
Avec exactement 2 ex-aequo, il y en a :

1. Choix des deux ex-aequo : $\binom{20}{2} = 190$ choix ;
2. Place des ex-aequo : il y a 19 possibilités ;
3. Classements des 18 autres personnes, une fois les ex-aequo placés : il y a 18! choix.

Il y a au total : $19\binom{20}{2}(18!)$ choix possibles.

Correction 2. - Une tenue est un triplet (P, T, C) : il y a $5 \times 6 \times 8 = 240$ tenues différentes ;
- «Il est tout en noir» : de combien de façons différentes ? Réponse : de $2 \times 4 \times 5 = 40$ façons.
La probabilité de l'événement «Il est tout en noir» est donc : $\frac{40}{240} = \frac{1}{6}$.
- «Une seule pièce est noire sur les trois » : notons les événements : N_1 la première pièce (pantalon) est noire, N_2 la deuxième pièce (tee-shirt) est noire, N_3 la troisième pièce (chaussette) est noire : l'événement est représenté par : $(N_1 \cap \overline{N_2} \cap \overline{N_3}) \cup (\overline{N_1} \cap N_2 \cap \overline{N_3}) \cup (\overline{N_1} \cap \overline{N_2} \cap N_3)$. Ces trois événements sont disjoints, leurs probabilités s'ajoutent. La probabilité de l'événement «une seule pièce est noire sur les trois» est donc : 0.325.

Correction 3. Il y a $\binom{30}{2}$ façons de choisir 2 personnes parmi 30 et donc $2 \cdot \binom{30}{2} = 870$ bises.

Correction 4.

1. Une grille-réponses est une suite ordonnée de 10 réponses, il y a 4 choix possibles pour chacune. Il y a donc 4^{10} grilles-réponses possibles.
2. L'événement E «répondre au hasard au moins 6 fois correctement» est réalisé si le candidat répond bien à 6 ou 7 ou 8 ou 9 ou 10 questions. Notons A_n l'événement : «répondre au hasard exactement n fois correctement». Alors, A_n est réalisé si n réponses sont correctes et $10 - n$ sont incorrectes : 3 choix sont possibles pour chacune de ces dernières. Comme il y a $\binom{10}{n}$ choix de n objets parmi 10, et donc il y a : $\binom{10}{n} \times 3^{10-n}$ façons de réaliser A_n et :
$$P(A_n) = \frac{\binom{10}{n} \cdot 3^{10-n}}{4^{10}}$$
pour $n = 6, 7, 8, 9, 10$. $P(E) = \sum_{n=6}^{10} \frac{\binom{10}{n} \cdot 3^{10-n}}{4^{10}} \simeq 1.9728 \times 10^{-2}$, soit environ 2%.

Correction 5. Considérons plutôt l'événement complémentaire : l'oiseau n'est pas touché s'il n'est touché ni par Amédée, ni par Barnabé, ni par Charles. Cet événement a pour probabilité : $(1 - 0.7) \cdot (1 - 0.5) \cdot (1 - 0.9) = 0.015$. La probabilité que l'oiseau soit touché est donc : $1 - 0.015 = 0.985$.

Correction 6. L'univers des possibles est ici l'ensemble des combinaisons de 10 billets parmi les 300 ; il y en a $\binom{300}{10}$. Je ne gagne rien si les 10 billets achetés se trouvent parmi les 296 billets perdants, ceci avec la probabilité :

$$\frac{\binom{296}{10}}{\binom{300}{10}}.$$

La probabilité cherchée est celle de l'événement complémentaire :

$$1 - \frac{\binom{296}{10}}{\binom{300}{10}} \simeq 0.127.$$

La probabilité est environ 12.7% de gagner au moins un lot.

Correction 7. $P(A \cap B) = pq$ car les maladies sont indépendantes. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = p + q - pq$

Correction 8. Soit A : l'événement «tirer un roi» et B : «tirer un pique».
$P(A \cap B) = \frac{1}{52}; P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}; P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.
Donc $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ et donc les événements A et B sont indépendants.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$.

Correction 9. Notons, pour le cas où la famille Potter comporte 2 enfants, l'univers des possibles pour les enfants : $\Omega = \{(G,G),(G,F),(F,G),(F,F)\}$, représente les cas possibles, équiprobables, d'avoir garçon-garçon, garçon-fille etc... : Alors $P(A) = \frac{2}{4}$, $P(B) = \frac{3}{4}, P(A \cap B) = \frac{2}{4}$. On en conclut que : $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ et donc que les événements A et B ne sont pas indépendants.
Si maintenant la famille Potter comporte 3 enfants : Alors $\Omega' = \{(a,b,c) \mid a \in \{G,F\}, b \in \{G,F\}, c \in \{G,F\}\}$ représente les $2^3 = 8$ cas possibles, équiprobables. Cette fois, $P(A) = 1 - P(\{(G,G,G),(F,F,F)\}) = \frac{6}{8}$; $P(B) = \frac{4}{8}, P(A \cap B) = P\{(F,G,G),(G,F,G),\{(G,G,F)\} = \frac{3}{8}$. On a $P(A)P(B) = \frac{3}{8} = P(A \cap B)$, et les événements A et B sont indépendants
Avec n enfants, on peut généraliser sans difficulté : $P(A) = 1 - \frac{2}{2^n}$, $P(B) = \frac{1+n}{2^n}$ $P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$ Un petit calcul montre que $P(A)P(B) = P(A \cap B)$ si et seulement si $n = 3$.

Correction 10. Notons les différents événements : Fe : «être femme», Lu : «porter des lunettes», H : «être homme»
Alors on a $P(Fe) = 0.6$, $P(Lu/Fe) = \frac{1}{3}$; il s'agit de la probabilité conditionnelle probabilité de «porter des lunettes» sachant que la personne est une femme. De même, on a $P(Lu/H) = 0.5$. On cherche la probabilité conditionnelle $P(Fe/Lu)$. D'après la formule des probabilités totales on a : $P(Fe/Lu)P(Lu) = P(Lu/Fe)P(Fe)$ avec $P(Lu) = P(Lu/Fe)P(Fe) + P(Lu/H)P(H)$.

Application numérique : $P(Lu) = 0.4$, donc $P(Fe/Lu) = \frac{P(Lu/Fe)P(Fe)}{P(Lu)} = 0.5$. Remarque : on peut trouver les mêmes réponses par des raisonnements élémentaires.

Correction 11. C'est évidemment le même que le précédent (exercice **??**), seul le contexte est différent : il suffit d'adapter les calculs faits. En pronostiquant un enfant, le présentateur a une chance sur deux environ de ne pas se tromper.

Correction 12. Fumeurs
Définissons les événements : F_n «Fumer le $n^{\text{ème}}$ jour», et $\overline{F_n}$ l'événement complémentaire. Alors $\{\overline{F_n}, F_n\}$ constitue un système complet d'événements,
$P_n = P(F_n)$; on peut donc écrire : $P(\overline{F_{n+1}}) = P(\overline{F_{n+1}}/F_n)P(F_n)+P(\overline{F_{n+1}}/\overline{F_n})P(\overline{F_n})$.
Comme $P(\overline{F_{n+1}}/F_n) = 0.9$ et $P(\overline{F_{n+1}}/\overline{F_n}) = 0.3$ $1-P_{n+1} = 0.9P_n+0.3(1-P_n)$, soit $P_{n+1} = -0.6P_n + 0.7$. Notons (R) cette relation.
Pour connaître le comportement à long terme, il faut étudier cette suite récurrente ; il y a des techniques mathématiques pour ça, c'est le moment de s'en servir.
Cherchons la solution de l'équation «$\ell = -0.6\ell + 0.7$», la limite éventuelle satisfait nécessairement cette équation : faire un passage à la limite dans la relation (R), ou utiliser le théorème du point fixe.
On trouve $\ell = \frac{7}{16}$; alors, la suite $Q_n = (P_n - \ell)$ vérifie : $Q_{n+1} = -0.6Q_n$, ce qui permet de conclure : $Q_{n+1} = (-0.6)^n Q_1$ et comme $((-0.6)^n)$ est une suite qui tend vers 0, on peut dire que la suite (Q_n) tend vers 0 et donc que la suite (P_n) tend vers $\ell = \frac{7}{16}$.
Conclusion : la probabilité P_n pour qu'elle fume le jour J_n tend vers $\frac{7}{16} \simeq 0.4375$.

Correction 13. $P_{n+1} = P(E_{n+1}) = P(E_{n+1}/E_n)P(E_n)+P(E_{n+1}/\overline{E_n})P(\overline{E_n}) = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}Q_n$. Donc $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}(1-P_n) = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}P_n$.
La suite $(P_n - \ell)$ est géométrique, où ℓ est solution de $\frac{4}{10} - \frac{3}{10}\ell = \ell$ soit $\ell = \frac{4}{13}$. Donc $P_n = \frac{4}{13} + a(-\frac{3}{10})^{n-1}$.

Correction 14. La probabilité d'avoir Princecharmant dans la barre B est $\frac{1}{5}$; si j'achète n barres, la probabilité de n'avoir la figurine dans aucune des n barres est $(\frac{4}{5})^n$, puisqu'il s'agit de n événements indépendants de probabilité $\frac{4}{5}$. Je cherche donc n tel que : $1 - (\frac{4}{5})^n \geq 0.8$. On a facilement : $n \geq 8$.
Puis, je cherche m tel que : $1 - (\frac{4}{5})^m \geq 0.9$; il faut au moins 11 barres pour que la probabilité dépasse 90%. Pour la probabilité 99%, $n \geq 21$.

Correction 15.

1. Le taux global de personnes soulagées : $P(S) = \frac{3}{5}0.75 + \frac{2}{5}0.90 = 0.81$.
2. Probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé : $P(A/S) = P(A \cap S)/P(S) = P(A)P(S/A)/P(S) = \frac{\frac{3}{5}0.75}{0.81} = 55.6\%$.

Correction 16. 1. Probabilité conditionnelle : si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds. C'est $P(CB/YB) = P(YB/CB)P(CB)/P(YB)$=$P(YB\cap CB)/P(YB) = \frac{0.15}{0.4} = 0.375$.

2. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns. C'est $P(YB/CB) = P(YB\cap CB)/P(CB)$=$\frac{0.15}{0.25} = 0.6$.
3. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds,de ne pas avoir les yeux bruns. C'est $P(\text{non}YB/CB) = 1-P(YB/CB) = 0.4$.

Correction 17. On obtient par calcul direct ou par événement contraire la probabilité de voler : $1-p+p(1-q)^2$.

Correction 18. 1. La probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif est $P(M/T^+) = P(T^+/M)P(M)/P(T^+)$ or $P(T^+) = P(T^+/M)P(M) + P(T^+/S)P(S) = 0.95\cdot 0.03 + 0.1\cdot 0.97 = 0.125\,5$. D'où : $P(M/T^+) = 23.7\%$.

2. La probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif est $P(S/T^+) = 1-P(M/T^+) = 76.3\%$.
3. La probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif est $P(M/T^-) = 0.0017$.
4. La probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif est $1-P(M/T^-) = 0.998 = 99.8\%$.

Correction 19. Une manière de résoudre le problème est la suivante : puisqu'il y a 8 clés et que j'écarte une après l'autre les mauvaises clés, je considère comme ensemble de toutes les possibilités, toutes les permutations de ces huit clés : il y en a $8\,!$. Alors la solution de chaque question est basée sur le même principe :

1. Les permutations (fictives) qui traduisent le cas (1) sont celles qui peuvent être représentées par une suite : $BMMMMMMM$, la lettre B désigne la bonne, M désigne une mauvaise. Il y a 7! permutations de ce type. Donc $P(A) = \frac{7!}{8!} = \frac{1}{8}$, on s'en doutait !
2. De même, les permutations (fictives) sont celles qui peuvent être représentées par une suite : $MBMMMMMM$: il y en a encore $7\,!$, et la probabilité est la même.
3. Le raisonnement permet en fait de conclure que la probabilité, avant de commencer, d'ouvrir la porte est la même pour le premier, deuxième,..., huitième essai.

Correction 20. 1. L'univers des possibles est l'ensemble des couples possibles : il y en a $6! = 720$ (imaginez les dames assises et les hommes choisissant leur partenaire). La probabilité $P(A)$ pour que chacun des 6 hommes danse avec son épouse légitime est, si chacun choisit au hasard, $\frac{1}{6!}$.

2. André danse avec son épouse, les autres choisissent au hasard : il y a 5! permutations pour ces derniers : $P(B) = \frac{5!}{6!} = \frac{1}{6}$.
3. André et René dansent avec leur épouse, les 4 autres choisissent au hasard : il y a 4! permutations pour ces derniers : $P(C) = \frac{4!}{6!} = \frac{1}{30}$.
4. André ou René dansent avec leur épouse, les 4 autres font ce qu'ils veulent. Considérons les événements D_1 : «André danse avec son épouse» ; D_2 : «René danse avec son épouse». Alors $D = D_1 \cup D_2$ et $P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) = \frac{3}{10}$.

Correction 21. 1. Combien de grilles ? Il y en a $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$

2. Combien de grilles avec 2 nombres consécutifs ? Ce problème peut être résolu par astuce : considérer les numéros gagnants comme 6 places à «choisir» parmi 49. En considérant des cloisons matérialisant les numéros gagnants, c'est un problème de points et cloisons Par exemple :

$$| \bullet \bullet || \bullet | \bullet \bullet \bullet | \bullet \bullet |$$

les gagnants sont : 1 ; 4 ; 5 ; 7 ; 11 ; 14. Dans notre cas on ne veut pas de cloisons consécutives. Les cinq cloisons séparent les numéros en 7 boîtes. Les 5 boîtes intérieures étant non vides, on y met 5 points, puis $38 (= 49 - 5 - 6)$ dans 7 boîtes. Il y a $\frac{(38-1+7)!}{38!6!} = 7.059\,1 \times 10^6$ séquences ne comportant pas 2 nombres consécutifs.

D'où la probabilité d'avoir une grille comportant 2 nombres consécutifs : 0.4952.

Correction 22. 1. $u_{n+1} = P(G_{n+1}) = P(G_{n+1}/Gn)P(Gn) + P(G_{n+1}/\overline{G_n})P(\overline{G_n}) = 0.6u_n + 0.3v_n$.

$v_{n+1} = 0.4u_n + 0.7v_n$.

Donc $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

Comme $u_n + v_n = 1$, $u_{n+1} = 0.6u_n + 0.3(1 - u_n) = 0.3 + 0.3u_n$. La suite $(u_n - \ell)$ est géométrique, où ℓ est solution de $0.3 + 0.3\ell = \ell$, donc $\ell = \frac{3}{7}$. Donc $u_n = \frac{3}{7} + u_1(0.3)^{n-1} = \frac{3}{7} + 0.5(0.3)^{n-1}$.

Correction 23. 1. On utilise une loi binomiale, loi de la variable aléatoire : «nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 4 lettres» $n = 5$, $p = \frac{3}{5}$. On obtient $P(A) = 1 - (\frac{2}{5})^4 = 0.9744$, $P(B) = \binom{4}{2}(\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})^2 = 0.3456$.

2. La loi de probabilité de X est une loi binomiale, loi de la variable aléatoire : «nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres». $n = 10$, $p = \frac{3}{5}$, son espérance est $np = 6$, sa variance est $np(1-p) = \frac{12}{5}$.

Correction 24. On utilise une loi hypergéométrique
$P(A) = 1 - \frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = 0.736\,26$

$P(B) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}} = 2.1978 \times 10^{-2}$
$P(C) = \frac{\binom{5}{1}\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = 0.49451$

Correction 25. Soit X la variable aléatoire nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20. La loi de X est une loi binomiale de paramètres $n = 20$, $p = 0.75$. Son espérance est $np = 15$, son écart-type est $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{15 \cdot 0.25}$. La probabilité pour que X soit égal à 15 est $\binom{20}{15} 0.75^{15} 0.25^{5} = 0.20233$.

Correction 26. La variable aléatoire associée à ce problème est X «nombre de sujets révisés parmi les 3» ; son support est l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$. La loi de X est une loi hypergéométrique puisque l'événement $[X = k]$, pour k compris entre 0 et 3, se produit si le candidat tire k sujet(s) parmi les 60 révisés, et $3 - k$ sujets parmi les 40 non révisés.
Alors :

1. Les trois sujets tirés ont été révisés : $P[X = 3] = \frac{\binom{60}{3}}{\binom{100}{3}}$.
2. Deux des trois sujets tirés ont été révisés : $P[X = 2] = \frac{\binom{60}{2} \cdot \binom{40}{1}}{\binom{100}{3}}$.
3. Aucun des trois sujets : $P[X = 0] = \frac{\binom{40}{3}}{\binom{100}{3}}$.

La loi de probabilité de X est donnée sur le support $\{0, 1, 2, 3\}$ par :

$$P[X = k] = \frac{\binom{60}{k} \cdot \binom{40}{3-k}}{\binom{100}{3}}$$

Résultats numériques :
$k = 0 : P[X = 0] \simeq 6.110 \times 10^{-2}$
$k = 1 : P[X = 1] \simeq 0.289$
$k = 2 : P[X = 2] \simeq 0.438$
$k = 3 : P[X = 3] \simeq 0.212$
L'espérance est $E(X) = 1.8$ (selon la formule $E(X) = np$).

Correction 27. Puisque les réponses sont données au hasard, chaque grille-réponses est en fait la répétition indépendante de 20 épreuves aléatoires (il y a 4^{20} grilles-réponses). Pour chaque question la probabilité de succès est de $\frac{1}{4}$ et l'examinateur fait le compte des succès : la variable aléatoire X, nombre de bonnes réponses, obéit à une loi binomiale donc on a directement les résultats. Pour toute valeur de k comprise entre 0 et 20 : $P[X = k] = C_{20}^{k} (\frac{1}{4})^{k} (1 - \frac{1}{4})^{20-k}$, ce qui donne la loi de cette variable aléatoire.
Quelle est l'espérance d'un candidat fumiste ? C'est $E(X) = np = 5$

Correction 28. Une variable aléatoire adaptée à ce problème est le nombre X de personnes se présentant au guichet entre 10h et 11h. Compte tenu des

hypothèses, on partage l'heure en 60 minutes. Alors X suit une loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = 0.1$. On est dans le cas de processus poissonnien : on peut approcher la loi de X par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 60 \times 0.1 = 6$. L'espérance de X est donc $E(X) = 6$;
On peut alors calculer les probabilités demandées : $P[X = k] = \frac{6^k e^{-6}}{k!}$. Valeurs lues dans une table ou calculées : $P[X = 3] \simeq 0.9\%$; $P[X = 4] \simeq 13.4\%$; $P[X = 5] = P[X = 6] \simeq 16.1\%$; $P[X = 7] \simeq 13.8\%$; $P[X = 8] \simeq 10.3\,\%$.
Remarque : de façon générale si le paramètre λ d'une loi de Poisson est un entier K, on a : $P[X = K-1] = \frac{K^{K-1}e^{-K}}{(K-1)!} = \frac{K^K e^{-K}}{K!} = P[X = K]$.
Calculons maintenant la probabilité pour que au moins 10 personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h : C'est $P[X \geq 10] = 1 - \sum_{k=0}^{9} \frac{6^k e^{-6}}{k!} \simeq 8.392 \times 10^{-2}$.

Correction 29. La probabilité $p = \frac{1}{100}$ étant faible, on peut appliquer la loi de Poisson d'espérance $100p = 1$ au nombre X de centenaires pris parmi cent personnes. On cherche donc : $P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - e^{-1} \simeq 63\%$. Sur un groupe de 200 personnes : l'espérance est 2 donc : $P[X' \geq 1] = 1 - e^{-2} \simeq 86\%$. La probabilité des événements : $[X' = 1]$ et $[X' = 2]$ sont les mêmes et valent : 0.14. Ainsi, sur 200 personnes, la probabilité de trouver exactement un centenaire vaut 0.14, égale à la probabilité de trouver exactement deux centenaires. Cette valeur correspond au maximum de probabilité pour une loi de Poisson d'espérance 2 et se généralise. Si X obeit à une loi de Poisson d'espérance K, alors le maximum de probabilité est obtenu pour les événements $[X = K-1]$ et $[X = K]$.

Correction 30.

1. 30% est la probabilité de l'événement Panne, noté Pa ; la probabilité pour une machine donnée de plus de cinq ans, d'être hors d'usage est $P(HU) = P(HU/Pa)P(Pa) + P(HU/nonPa)P(nonPa) = 0.3 \cdot 0.75 + 0.4 \cdot 0.7 = 0.505$.
2. La probabilité pour une machine hors d'usage de n'avoir jamais eu de panne auparavant est $P(\text{non}\,Pa/HU) = P(HU/\text{non}\,Pa)P(\text{non}\,Pa)/P(HU) = 0.4 \cdot 0.7/0.505 = 0.554\,46$.
3. La loi de probabilité de X est une loi binomiale, $n = 10$, $p = 0.4$, espérance 4.
4. $P[X = 5] = \binom{10}{5}(0.3)^5(0.7)^5 = 0.102\,92$

Correction 31. Le nombre X de personnes mesurant plus de 1.90m parmi 100 obéit à une loi de Poisson de paramètre $\frac{100}{80}$.
La probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m est donc $1 - P[X = 0] = 1 - e^{-\frac{100}{80}} = 1 - e^{-\frac{5}{4}} = 0.713\,50$.
Sur 300 personnes : la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m est donc $1 - P[Y = 0] = 1 - e^{-\frac{300}{80}} = 0.976\,48$.

1 Loi normale et approximations

Correction 32. La probabilité qu'une bille soit rejetée est, en notant D la variable aléatoire «diamètre», $p = 1 - P[7.97 \leq D \leq 8.03]$. Or $P[7.97 \leq D \leq 8.03] = P[-\frac{0.03}{0.02} \leq \frac{D-8}{0.02} \leq \frac{0.03}{0.02}] = F(1.5) - F(-1.5) = 0.866\,4$. La proportion de billes rejetées est donc $p = 13.4\%$.

Correction 33.

1. La probabilité pour que X soit inférieur à 0.36mm est : $P[X \leq 0.36] = P[\frac{X-0.3}{0.1} \leq 0.6] = 0.726$, soit 72.6%.

   La probabilité pour que X soit compris entre 0.25 et 0.35mm est $P[0.25 \leq X \leq 0.35] = 2F(0.5) - 1 = 0.383$, soit 38.3%.
2. Pour $n = 20$, la loi de $Z = \sum X_i$ est une loi normale de paramètres : d'espérance $E(Z) = 20m = 6$ et de variance $\operatorname{Var} Z = 20\sigma = 0.2$.

Correction 34. Pour $n = 2000$, la loi suivie par la variable aléatoire N «nombre de plaques inutilisables parmi les 2000» est une loi de Poisson de paramètre 2 : alors $P[N \leq 3] = 0.86$.
Remarquons qu'en faisant l'approximation par une loi normale et en employant le théorème central limite, on obtient : $P[N \leq 3] \simeq 0.76$, et avec correction de continuité on obtient $P[N \leq 3] \simeq 0.85$.

Correction 35. Par des méthodes analogues on trouve que la probabilité pour que X soit compris entre 6.3mm et 6.6 mm est 14.3.

Correction 36. Si X est de moyenne m et d'écart-type σ alors $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi centrée réduite. Donc si $P[X \leq 165]$ alors $P[\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{165-m}{\sigma}] = 0,56$. Or on peut lire dans la table de Gauss $F(0.15) = 0.5596$.
De même, si $P[X \geq 180]$ alors $P[\frac{X-m}{\sigma} \geq \frac{180-m}{\sigma}] = 0.1$. Donc $P[\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{180-m}{\sigma}] = 0.9$ et l'on peut lire de même $F(1.28) = 0.8997$.
Pour trouver m et σ il suffit de résoudre le système d'équations : $\frac{165-m}{\sigma} = 0.15$ et $\frac{180-m}{\sigma} = 1.28$ d'où $\sigma \simeq 13.27$, $m \simeq 163$ cg. Alors, $P[X \geq 182] = P[\frac{X-m}{\sigma} \geq \frac{182-m}{\sigma}] = 1 - F(1.43) = 0.0764$.
Sur 10 000 personnes on estime le nombre de personnes à soigner de l'ordre de 764 personnes ; en fait la théorie de l'estimation donnera une fourchette.

Correction 37.

1. Loi binomiale $B(365; \frac{4}{365})$, approchée par la loi de Poisson de paramètre 4, d'espérance et variance 4.
2. Loi binomiale $B(6; \frac{1}{2})$, d'espérance 3 et variance $\frac{3}{2}$.
3. Loi hypergéométrique.

Correction 38.

1. La loi de X est la loi binomiale $B(1000; 0.02)$, d'espérance 20, d'écart-type $\sqrt{19.6}$.
2. En approchant cette loi par celle d'une loi normale de paramètre $m = 20$, écart-type $\sqrt{19.6}$. $P[18 \leq X \leq 22] = P[(17.5 - 20)/\sqrt{19.6} \leq (X - 20)/\sqrt{19.6} \leq (22.5 - 20)/\sqrt{19.6}] \simeq 0.428$.

Sans correction de continuité on trouve $P[(17-20)/\sqrt{19.6} \leq (X-20)/\sqrt{19.6} \leq (22-20)/\sqrt{19.6}] \simeq 0.348$.

Approchée par la loi de Poisson de paramètres : espérance 20 et variance 20, on trouve $P[18 \leq X \leq 22] \simeq 0.423$.

Enfin par la vraie loi binomiale : on trouve $P[18 \leq X \leq 22] \simeq 0.427$.

Correction 39.

1. Soit F l'événement «la pièce est fausse» ; soit U l'événement «la pièce est un euro» ; soit D l'événement «la pièce est deux euros». Alors $P(F) = P(F/U)P(U) + P(F/D)P(D) = 2.9\%$.
2. On cherche $P(U/F) = (P(F/U)P(U))/P(F) = 51.7\%$.
3. X la variable aléatoire «nombre de pièces fausses parmi 1000» obéit à une loi binomiale$B(1000; 5\%)$. Espérance : 50 ; écart-type : $\sigma = \sqrt{47.5}$. En approchant cette loi par une loi normale $N(50; \sigma)$, la probabilité pour que X soit compris entre 48 et 52 est : $P[(47.5-50)/\sigma \leq (X-50)/\sigma \leq (52.5-50)/\sigma] \simeq 28.3\%$.

Correction 40.

1. La loi de X est une loi binomiale $B(180; \frac{1}{6})$ Espérance : 30 ; écart-type : $\sigma = \sqrt{25} = 5$.
2. En approchant cette loi par une loi normale $N(30; \sigma)$ la probabilité pour que X soit compris entre 29 et 32 : $P[(28.5-30)/\sigma \leq (X-30)/\sigma \leq (32.5-30)/\sigma] \simeq 30.94\%$. Avec la vraie loi, on trouve la probabilité pour que X soit compris entre 29 et 32 est 30.86%.

Correction 41.

1. Lorsque l'on tire un bulletin au hasard, la probabilité que ce soit un bulletin pour A est de 0.2.
2. Il y a suffisamment de bulletins de vote en tout pour que l'on puisse assimiler ces tirages à des tirages avec remise ; alors la loi de probabilité de X est une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0.2$; or $np = 40$; on peut faire l'approximation normale. L'espérance de X est donc $m = 40$ et l'écart-type : $\sqrt{40 \times 0.8} = 4\sqrt{2}$.
3. $P[X \geq 45] = 1 - P[X \leq 44] \simeq 1 - F(\frac{44.5-40}{4\sqrt{2}}) \simeq 21\%$, c'est la probabilité pour que le nombre de voix pour A soit supérieur à 45 dans un lot de 200 bulletins. De même, $P[30 \leq X \leq 50] \simeq F(\frac{50.5-m}{\sigma}) - F(\frac{29.5-m}{\sigma}) \simeq 93.6\%$.
4. Reprenons le calcul pour le candidat B qui n'a obtenu que 2% des voix. Alors pour $n = 100$ et $p = 0.02$ l'approximation par une loi de Poisson d'espérance $\lambda = 2$ est légitime. On peut dire que $P[Y \geq 5] = 1 - P[Y \leq 4] = 1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{e^{-2}2^k}{k!}$, de l'ordre de 5%.

   Enfin $P[1 \leq Y \leq 4] = \sum_{k=1}^{4} \frac{e^{-2}2^k}{k!} \simeq 0.812$.

Correction 42.

1. (a) Pour calculer la probabilité que Monsieur A soit contrôlé entre 60 et 80 fois dans l'année, posons le nombre de

contrôles comme une variable aléatoire. Elle obéit à une loi binomiale $B(700; 0.1)$. On peut l'approcher par la loi normale $N(70; \sqrt{63})$. $P[60 \leq X \leq 80] = P[-10/\sqrt{63} \leq X \leq 10/\sqrt{63}] \simeq 2F(10.5/\sqrt{63}) - 1 = 0.814$. La probabilité d'être contrôlé entre 60 et 80 fois dans l'année est 81.4.

(b) Calculons le prix que devrait payer le voyageur : $1,12 \times 700 = 784$ euros. Il est perdant si l'amende dépasse ce prix. Or l'amende est aX, si a est l'amende fixée par la compagnie.

On cherche donc a pour que : $P[aX \geq 784] \geq 0.75$: Soit $P[aX \leq 784] \leq 0.25$: Par lecture de table : $a = 784/64.642 = 12.128$ Il faut que l'amende dépasse 13 euros.

2. Calculons le prix que devrait payer le voyageur : $1,12 \times 300 = 336$ euros Il est perdant si l'amende dépasse ce prix. Or l'amende est bX, si b est l'amende fixée par la compagnie. X obéit à une loi binomiale $B(300; 0.5)$. On cherche donc b pour que : $P[bX \geq 336] \geq 0.75$. Par un raisonnement analogue, on obtient cette fois le résultat : il suffit que l'amende dépasse 2 euros 30 !