L'INVENTION DES LOGARITHMES PAR NEPER ET LE CALCUL DES LOGARITHMES DÉCIMAUX PAR BRIGGS[1]

par Jean-Pierre FRIEDELMEYER,
IREM de Strasbourg

NOTES DE LECTURE

Cet article montre l'extraordinaire prouesse des pionniers de l'introduction des logarithmes. Il est un peu ardu à lire mais passionnant. On recommande de le lire le crayon à la main car les anciens étaient très forts et capables de faire relativement rapidement des calculs précis sans ordinateur. On donne les précisions suivantes :

1) On appelle actualisation la valeur à la date 0 d'un capital équivalent à une rente de 1 versée tous les ans de la date 1 à la date N quand le taux d'intérêt est i, suivant la convention 1 à la date k est équivalent à $\frac{1}{(1+i)^k}$ à la date 0.

2) Le logarithme de Neper du nombre X noté log X dans le texte est égal à :

$$\log X = 10^7\ (\ln 10^7 - \ln X)$$

ou ln X désigne le logarithme népérien de X.

3) Les virgules des notations de Briggs ne sont pas les nôtres, son logarithme est notre logarithme décimal dit aussi à base 10. Un petit exercice facile est de retrouver, par exemple, que $\log_{10} 2 = 0{,}30102999\ldots$ nombre que les élèves d'autrefois connaissaient par cœur, mais c'était avant les calculettes.

4) Un exercice facile, en classe de terminale consiste à démontrer la double inégalité dont se sert Neper pour trouver le premier logarithme :

Si $x > 0$ alors $x < -\ln(1-x) < \frac{x}{1-x}$

Jean-Louis PIEDNOIR

inspecteur général honoraire de l'Éducation nationale

1. Pour toute référence, nous renvoyons au livre *Histoires de logarithmes*, cité en fin d'article, et qui contient entre autres trois chapitres sur Neper et Briggs dont l'auteur du présent texte s'est largement inspiré.

L'acte de naissance officiel des logarithmes est daté précisément de 1614, avec la publication, cette année-là, de la *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* par John Neper (1550-1617), un texte de 63 pages, écrit en latin, auquel il faut ajouter les 91 pages du *Canon*, ou *Tables de Logarithmes*. Parmi les raisons qui ont conduit à une telle invention, les historiens évoquent principalement les difficultés de plus en plus énormes rencontrées par les astronomes dans leurs calculs, et la nécessité de construire un outil puissant pour les soulager. Mais il n'y a pas que les astronomes, et il n'y a pas que les nécessités du calcul pour expliquer l'invention des logarithmes à ce moment précis de l'histoire et non à un autre. Celle-ci est à la confluence de multiples facteurs complexes et solidaires que, pour la clarté de l'exposition, nous classons en trois ensembles mais qu'il faut bien comprendre comme interdépendants.

◆ CONTEXTE ET RAISONS D'UNE MIRIFIQUE INVENTION

Le développement sans précédent d'activités humaines grandes consommatrices de calculs longs et compliqués comme l'astronomie, le commerce et la navigation font émerger de nouveaux groupes sociaux professionnels qui forgent au fil des décennies tout un corpus d'œuvres, d'idées et de techniques nouvelles sur lesquelles la société de la Renaissance va s'appuyer, et la science classique se construire.

Parmi ces groupes, le plus connu est celui des astronomes-astrologues (les deux fonctions sont en général associées) qui prennent une importance accrue au XVI^e siècle, pour une culture savante mais aussi populaire laquelle accordait une grande importance à l'interprétation des signes. La position des astres guide aussi bien le médecin dans son diagnostic que l'astrologue pour la construction des horoscopes et la prévision des événements. Tycho Brahé (1546-1601), le plus grand praticien de l'observation astronomique du siècle, est l'astrologue attitré de plusieurs princes successifs, tout comme Johannes Kepler (1571-1630), au début du siècle suivant. Neper lui-même plaçait son interprétation de *L'Apocalypse de Saint Jean* au-dessus de son invention des logarithmes.

La démarche de Neper s'inscrit ainsi effectivement dans le cadre général d'une simplification des calculs comportant des multiplications, divisions, extractions de racines. Une telle méthode de simplification commençait à se développer à la fin du XVI^e siècle sous le nom de prosthaphérèse (littéralement : *prosthésis* = ajouter et *apheirésis* = soustraire) et a représenté pendant un certain temps, un système concurrent aux logarithmes de Neper que de nombreux calculateurs ont continué à utiliser, bien au-delà de la parution de ses tables.

Déjà connue des astronomes arabes au X^{e} siècle (par exemple par Ibn Jûnus) la prosthaphérèse est redécouverte, de manière probablement indépendante par un curé de Nüremberg, Johannes Werner (1468-1528) dans un traité de trigonométrie sphérique.

La méthode sera reprise et développée par Tycho Brahé et son rival Nikolaus Reimers dit Raymarus Ursus (1551-1600) que Tycho accusera ouvertement d'avoir plagié son *Système du Monde*. Toujours est il que Ursus publie pour la première fois une démonstration des deux formules utilisées pour la prosthaphérèse et que nous écrivons :

$$\sin b \cdot \sin c = \frac{1}{2}\left(\cos(b-c) - \cos(b+c)\right)$$

et $$\cos b \cdot \cos c = \frac{1}{2}\left(\cos(b+c) + \cos(b-c)\right).$$

En réalité elles se présentent sous forme de proportions, écrites bien-sûr en toutes lettres.

Voici un exemple de calcul.

Soit à multiplier $A = 50{,}8791$ et $B = 207,\ 343$

On pose $A \cdot B = 10^n \cdot a \cdot b = 10^n \sin\alpha \cdot \sin\beta$ avec $a = \sin\alpha$ et $b = \sin\beta$;

avec une table trigonométrique à six chiffres, cela donne $n = 5$; $a = 0{,}508791$; $b = 0{,}207343$

donc

$\alpha = 30° \ 35'$	$\cos(\alpha-\beta) = 0{,}947676$
$\beta = 11° \ 58'$	$\cos(\alpha+\beta) = 0{,}736687$
$\alpha-\beta = 18° \ 37'$	différence 0,210989
$\alpha+\beta = 42° \ 33'$	$\sin\alpha \cdot \sin\beta = 0{,}105494$

D'où $A \cdot B = 10549{,}4$

De même, pour la division de $A = 207{,}343$ par $B = 51{,}7886$:

$\frac{A}{B} = 10^n \frac{a}{b} = 10^n \sin\alpha \cdot \sin\beta$ avec $a = \sin\alpha$ et $b = \operatorname{cosec}\beta$;

On a, toujours avec une table à six chiffres :

$n = 2$; $a = 0{,}207343 = \sin\alpha$; $b = 5{,}17886 = \operatorname{cosec}\beta$

$\alpha = 11° \ 58'$	$\cos(\alpha-\beta) = 0{,}999894$
$\beta = 11° \ 8'$	$\cos(\alpha+\beta) = 0{,}919821$
$\alpha-\beta = 0° \ 50'$	différence 0,080073
$\alpha+\beta = 23° \ 6'$	$\sin\alpha \cdot \sin\beta = 0{,}040036$

donc $\frac{A}{B} = 4{,}0036$

Avec de bonnes tables de trigonométrie, les multiplications et les divisions pouvaient déjà se faire sans plus de peine apparemment qu'avec des logarithmes. Alors pourquoi d'autres recherches et pourquoi les logarithmes ce sont-ils finalement imposés face aux calculs par prosthaphérèse ?

Les arithmétiques marchandes avec leurs maîtres d'abaques, leurs algoristes et autres « Rechenmeister », construisent peu à peu une tradition nouvelle à l'intérieur de l'arithmétique pratique, liée à la nécessité d'une formation mathématique plus exigeante pour les futurs marchands et qui se développe en dehors de l'Université. C'est le moment et le lieu où s'effectuent en particulier le calcul de nombreuses tables d'intérêts avec, entre autres, Pacioli (1445 -1517) et Stevin (1548-1620).

Dans la *Summa de Arithmetica*, imprimée à Venise en 1494, Luca Pacioli pose le problème suivant : en combien d'années un capital est-il doublé lorsqu'il est placé à intérêts composés ? Et il donne en substance la remarquable réponse suivante : le nombre N d'années nécessaires pour doubler un capital placé à r % est donné par $N=\frac{72}{r}$. Cette réponse est surprenante par sa précision, alors que le calcul exact fait intervenir les logarithmes ! En effet, pour répondre correctement au problème de Pacioli, il faut résoudre l'équation d'inconnue x: $\left(1+\frac{r}{100}\right)^x=2$ dont la solution est donnée par $x=\frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{r}{100}\right)} \times \frac{100 \ln 2}{r}\left(1+\frac{r}{200}\right) \times \frac{72}{r}$ pour r relativement petit par rapport à 100.

Mais comment Pacioli lui-même a t-il pu déduire sa formule ? On peut imaginer qu'avec le développement du commerce en Italie, les marchands aient constitué peu à peu des tables pour le calcul des intérêts à partir desquels Pacioli a pu interpoler sa réponse.

De tels calculs seront effectués systématiquement quelque cent ans plus tard par Simon Stevin (1548-1620) commerçant, ingénieur et mathématicien des Pays-Bas, à Anvers et Bruges. Son ambition, qu'il exprime explicitement dans son traité de *La Practique d'Arithmetique*, est de fournir une aide aux non mathématiciens, en montrant combien le système décimal est plus pratique que l'utilisation des « rompus » (les fractions).

Entre autres sujets traités, Stevin calcule des tables d'intérêts composées pour répondre à des questions du genre : *Estant declaré capital, temps, et raison d'interest composé et prouffitable : Trouver combien monte le capital avec son interest.* Ces tables correspondent au calcul de ce que l'on appelle aujourd'hui l'actualisation d'un capital et donnent les valeurs de $\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n}$ pour $\begin{cases}1 \leqslant n \leqslant 30\\ 1 \leqslant r \leqslant 10\end{cases}$.

En pratique les résultats sont écrits sur trois colonnes :

– la première correspond à la valeur de n ;

– la seconde à celle de $\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n}$;

– et la troisième aux valeurs cumulées : la $(k+1)^{\text{ième}}$ ligne = $k^{\text{ième}}$ ligne + $(k+1)^{\text{ième}}$ ligne de la 2$^{\text{e}}$ colonne,

soit à :

$$\sum_{p=1}^{p=k}\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-p}=\frac{100}{r}\left(1-\left(\frac{100}{100+r}\right)^{k}\right);$$

formules que Stevin ne pouvait évidemment pas écrire, mais qui permettent de mettre en évidence la précision de son calcul : par exemple dans la table d'intérêt de 1 pour 100, on constatera une erreur d'une unité sur le dernier chiffre à la 30$^{\text{e}}$ ligne, 2$^{\text{e}}$ colonne ; et elles donnent 25,8077051 au lieu de 25,8077082 à la 30$^{\text{e}}$ ligne, 3$^{\text{e}}$ colonne.

Voici la table à 1 %, que nous avons répartie en deux groupes de 15 lignes. Dans la deuxième (ou cinquième) colonne, le nombre de la ligne $k+1$ est déduit de celui de la ligne k par une multiplication par 100 suivie d'une division par 101.

1	9900990	9900990	16	8528212	147178723
2	9802960	19703950	17	8443774	155622497
3	9705901	29409851	18	8360172	163982669
4	9609803	39019654	19	8277398	172260067
5	9514656	48534310	20	8195444	180455511
6	9420451	57954761	21	8114501	188569812
7	9327179	67281940	22	8033961	196603773
8	9234831	76516771	23	7954417	204558190
9	9143397	85660168	24	7875660	212433850
10	9052868	94713036	25	7797683	220231533
11	8963236	103676272	26	7720478	227952011
12	8874491	112550763	27	7644038	235596049
13	8786625	121337388	28	7568354	243164403
14	8699629	130037017	29	7493420	250657823
15	8613494	138650511	30	74192228	258077051

Ces tables mettent en correspondance une progression arithmétique (colonne 2 ou 5) et une progression géométrique (colonne 3 ou 6). Peut-on y voir une anticipation des logarithmes ? Outre le calcul d'intérêts, elles pourraient servir à effectuer rapidement certaines multiplications, divisions, extractions de racines.

Par exemple, le produit des termes de rang 6 et 19, divisé par le terme de rang 13 donne le terme de rang $6 + 19 - 13 = 12$, soit :

$\frac{9420451 \times 8277398}{8786625} = 8874491$, qui est exact, aux arrondis près ; mais l'on voit bien que le calcul n'est exact que pour les nombres qui sont dans la table. Pour les autres nous n'aurons qu'une estimation le plus souvent grossière du résultat, par encadrement. Sauf si l'on disposait de tables semblables, mais avec des différences entre les lignes suffisamment petites pour que les estimations deviennent des résultats exacts, à des erreurs tout à fait négligeables près, ou mieux encore, que l'on trouve un procédé permettant des encadrements précis à volonté.

Les nombres décimaux sont en tout cas l'élément à la fois conceptuel et pratique décisif qui rend possible la pensée d'une relation entre le continu des grandeurs que l'on ne savait penser qu'en termes de rapports (logos) et le discret des nombres (arithmos), élément qui rend possible d'inventer des nombres pour « combler des vides ».

De sorte que le caractère fondamentalement novateur de l'invention de Neper et qui en fera le succès bien au-delà de la construction des tables réside dans un troisième élément déterminant représenté par une autre manière d'appréhender le continu, entraînée par tous les bouleversements apportés à la conception du mouvement par la considération de la variable temps et dont l'aboutissement sera l'idée de fonction.

L'exemple le plus représentatif de cette nouvelle situation est la possibilité, développée avec force par les travaux de Galilée (1564-1642) de penser la vitesse d'un mobile comme une grandeur susceptible d'un traitement mathématique. Nous verrons quel rôle essentiel cette possibilité va jouer pour le calcul même des logarithmes chez Neper.

Chez tous les calculateurs précédant Neper, la démarche est : pour n donné que vaut ?

$A\left(1 \pm \frac{1}{10^k}\right)^n$? (A coefficient fixé, en général de la forme 10^p) ?

Or pour construire une table de logarithmes complète et utilisable il faut pouvoir répondre à la question inverse : pour un nombre X donné, quel est le n tel que $X = A\left(1 \pm \frac{1}{10^k}\right)^n$?

Mais cette manière de présenter les choses qui, par son formalisme moderne nous permet de mieux comprendre les problèmes posés par l'invention des logarithmes est cependant très éloignée de la démarche de Neper : il n'y a chez celui-ci ni puissances ni exposants, mais seulement deux progressions en relation, l'une géométrique, l'autre arithmétique. Nous pensons même que c'est parce que Neper n'utilise pas de telles notations qu'il a pu résoudre le problème de l'invention des logarithmes. Celle-ci suppose en effet la compréhension d'une variation continue de l'exposant (se traduisant plus tard sous la forme d'une fonction exponentielle), alors que ces notations ne permettent pas de sortir d'une appréhension discrète du phénomène à l'époque où il travaille.

L'outil privilégié de la géométrie euclidienne est la similitude, laquelle se transcrit en termes de proportions. Les logarithmes « collent » totalement à la structure de ces proportions telle qu'elle est élaborée dans le livre V, tout en permettant de traduire les rapports géométriques en relations entre nombres forcément naturels (à une multiplication par une puissance de 10 près). Donc les logarithmes instituent, de façon qu'on peut qualifier de « naturelle » le calcul arithmétique des grandeurs géométriques. Neper en était parfaitement conscient en proposant le mot *logarithme* composé de *logos* (raison, rapport) et d'*arithme* (nombre). Cela n'est pas le cas des sinus, créés pour passer du circulaire au droit, mais dont l'utilisation est tout à fait artificielle dans les proportions. Ce caractère adéquat pour les logarithmes et artificiel pour les sinus est particulièrement mis en évidence par le fait que les premiers s'appliquent directement à un nombre indéterminé de rapports ou de grandeurs, là où les seconds ne peuvent jamais opérer sur plus de deux termes. Nous pensons que ce fait a aussi été repéré consciemment par Neper, qui énonce plusieurs propositions fondamentales, après avoir donné la définition des logarithmes. En voici les deux plus importantes (36 et 37), dont les numéros sont ceux utilisés dans *Constructio*, un texte de 1619 dans lequel Neper explique la construction des tables de la *Descriptio* de 1614 :

Proposition 36: *Les logarithmes de sinus proportionnels sont équidistants,*

que nous formalisons aujourd'hui ainsi :

si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, alors $\log a-\log b=\log c-\log d$.

Mais il faut bien noter que, pas plus que ses contemporains, Neper n'utilise jamais un tel formalisme, ni d'abréviation comme « log ».

Proposition 37: *Comme pour trois sinus en proportion continue le carré du moyen est égal au produit des extrêmes, ainsi pour leurs logarithmes, le double du moyen est égal à la somme des deux extrêmes,* soit : si $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ou $a^2 = bc$, alors $2\log\ b = \log\ a + \log\ b$.

Et Neper ajoute que dans ce cas : si deux quelconques de ces logarithmes sont donnés, le troisième est connu.

Cette dernière proposition traduit une autre conséquence (inhérente aussi naturellement à la théorie des proportions) qui est que les logarithmes sont le bon outil pour le calcul des radicaux lesquels correspondent, dans la théorie des proportions, à des moyennes. Ce n'est nullement le cas des sinus.

La considération des moyens proportionnels que l'on peut et doit pouvoir insérer en nombre indéterminé entre deux nombres donnés, même proches, jointe à la constatation explicite qu'on peut le faire avec des progressions de raison proche de 1 (par exemple dans la table de Stevin des intérêts à un pourcentage où pour passer de 1 à 1/2 il faut insérer 70 moyens proportionnels) rend sensible une certaine idée d'un continu numérique. Mais les seuls continus identifiés en tant que tels jusqu'à la fin du XVIe siècle sont le continu des grandeurs souvent assimilé au continu de l'espace étendu, et le continu du temps ou du mouvement. Le génie de Neper tient sans aucun doute à sa capacité à embrasser dans une seule perspective l'ensemble de ces éléments et d'en réaliser une invention aux potentialités comme il dit « mirifiques » et en grande partie insoupçonnées. Notre tâche consiste simplement à montrer comment Neper articule tous les concepts et outils nouveaux évoqués ci-dessus pour construire sa table. Le mot « construire » est d'ailleurs celui utilisé par Neper dans le titre de la publication posthume de 1619 : *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* dont voici la trame.

◆ LA CONSTRUCTION D'UNE TABLE DE LOGARITHMES PAR NEPER

On présente volontiers aujourd'hui l'invention de Neper comme le fruit d'une recherche portant sur la détermination d'une fonction transformant une multiplication en addition. C'est un point de vue déformé par le développement du traitement fonctionnel des relations entre les nombres, mais qui n'a pris son essor qu'avec le calcul infinitésimal au XVIIIe siècle et lorsque était réalisée l'identification du champ des grandeurs avec celui des nombres. Les logarithmes de Neper n'auront d'ailleurs pas peu contribué à cette évolution.

La construction d'une table de logarithmes présente deux contraintes :

1. Il s'agit de mettre en correspondance une progression géométrique (suite de nombres proportionnels) et une progression arithmétique (suite de nombres augmentant par intervalles constants).

2. La progression géométrique doit être telle qu'elle encadre terme à terme tous les entiers consécutifs (qui sont chez Neper des sinus) entre 1 et le rayon choisi (ou sinus total) ; en l'occurrence Neper choisit $10\,000\,000 = 10^7$. Ce sont ces entiers qui sont le point de départ des calculs de Neper ; c'est pourquoi il les appelle nombres naturels, par opposition aux nombres artificiels ou logarithmes, qui sont ceux de la suite arithmétique.

Pour mettre en œuvre une réponse satisfaisante à ces contraintes, Neper a recours à deux idées fortes, qui signent la véritable marque de son génie sur cette question, et qui le distinguent définitivement de tout autre prétendant à l'invention des logarithmes.

Première idée : rendre continue la relation entre les deux progressions, géométrique et arithmétique, par un recours à la cinématique. Les éléments de chaque progression ne sont que des positions discrètes d'un point en mouvement continu sur une ligne droite. Ces positions permettent de repérer chacune des progressions à des intervalles de temps égaux, et ainsi d'établir une correspondance, en comparant les distances parcourues durant ces intervalles de temps égaux. Ce traitement continu permet de gérer à volonté la question de la précision des calculs. Celle-ci est fixée au départ à 7 chiffres (définie par un sinus total de 10^7). Mais elle peut être affinée pour des calculs intermédiaires en augmentant le nombre de chiffres après la virgule, afin de maîtriser les erreurs causées par l'accumulation des arrondis. On gardera à la fin du calcul le nombre de chiffres souhaité lorsque l'on sera assuré qu'ils sont tous exacts. Pour ce faire, Neper utilise à fond l'écriture des décimaux, en mettant un point pour séparer la partie entière de la partie décimale. Nous utiliserons sa notation dans la suite. Il y a un second avantage à rendre la relation continue : en remplaçant les calculs exacts (de toute façon inaccessibles) par des encadrements, elle permet de jouer sur le choix même des termes des progressions géométriques, termes que l'on peut bouger à volonté dans la mesure où l'on reste dans les bons intervalles.

Seconde idée : pour parcourir l'ensemble des entiers de 10^7 jusqu'à 1 au moyen du seul calcul des nombres $10^7\left(1 - \dfrac{1}{10^7}\right)^n$ il faudrait des centaines de millions de calculs. Mais Neper connaît à fond les propriétés des nombres en progression continue, qui lui permettent de tout ramener au calcul des seuls 100 premiers nombres du type précédent grâce à un argument qu'il n'explicite pas, mais que nous présentons ici dans toute sa généralité pour comprendre la logique des intermédiaires qu'il appelle première, seconde et troisième table. Le principe en est le suivant :

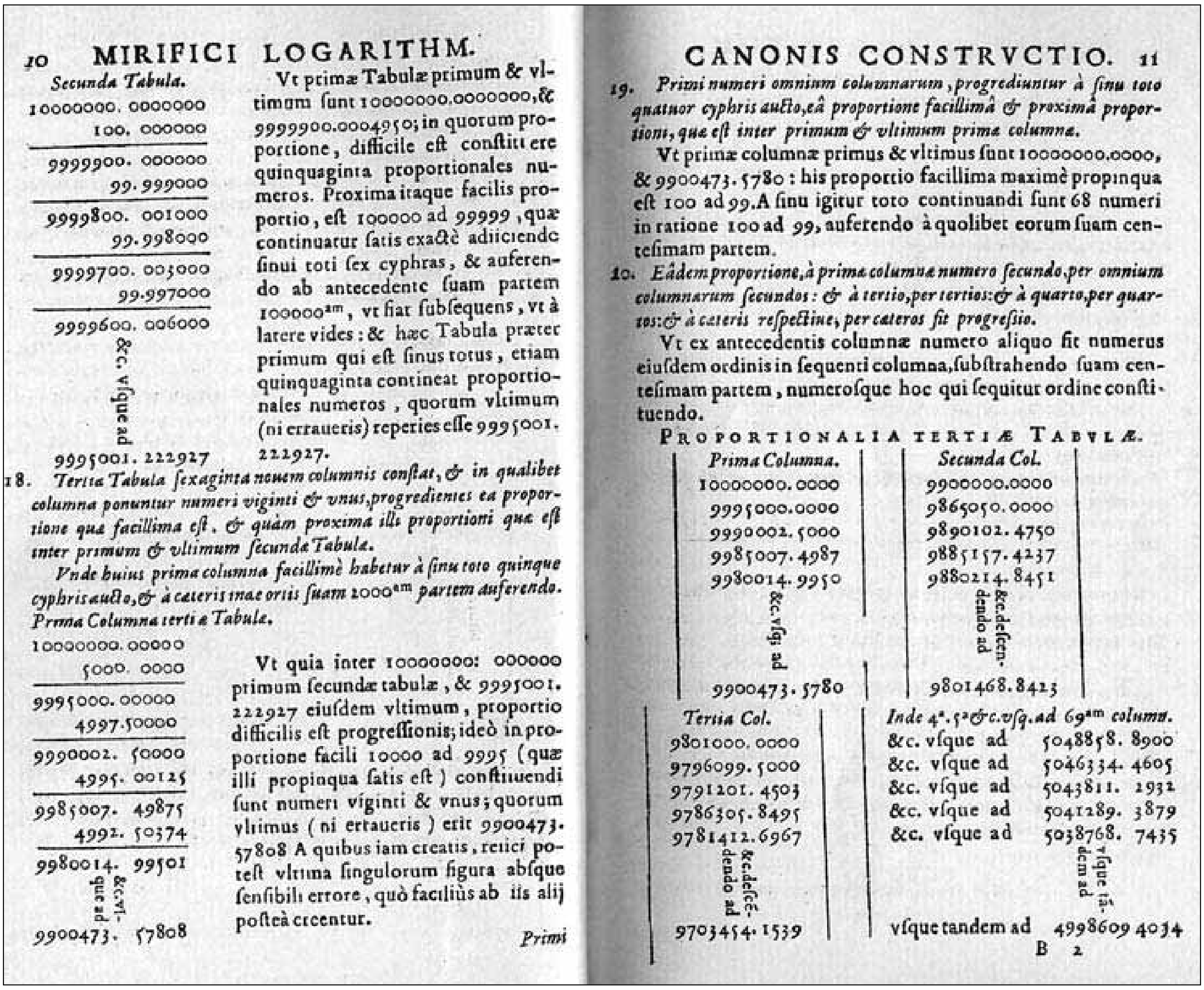
Soit (g_i), i variant de 0 à n, une suite géométrique décroissante, de raison $g_{k+1}/g_k = q$ inférieur strictement à 1, et (G_I), avec I variant de 0 à N une autre suite géométrique décroissante, de même premier terme $G_0 = g_0$, et de raison $G_{k+1}/G_k > q^n = g_n/g_0$. Enfin, soit G un nombre vérifiant $G_{k+1} < G < G_k$.

Alors $\frac{g_n}{g_0} < \frac{G_{k+1}}{G_k} < \frac{G}{G_k} < 1$; donc il existe u compris entre g_0 et g_n tel que $\frac{u}{g_0} = \frac{G}{G_k}$. Autrement dit, on peut ramener les calculs sur G (encadré par des éléments de la seconde suite) à des calculs sur des éléments de la première suite et ainsi non seulement réduire énormément le nombre de calculs, mais aussi gérer au mieux la question de la précision des calculs. Nous sommes maintenant en mesure de comprendre dans ses détails la démarche de Neper.

La progression géométrique commençant par $10^7 = 10\,000\,000$ et dont le second terme est 9 999 999 se calcule très facilement : il suffit à chaque étape de retrancher la 10 000 000^e partie du nombre précédent. Mais elle a un grand inconvénient : si l'écart entre deux termes consécutifs est, à très peu près, d'une unité pour les premiers termes, cet écart s'en éloigne peu à peu lorsque le rang du terme augmente. Pour pallier cette difficulté, il faudrait augmenter au fur et à mesure la précision du calcul, en augmentant le nombre de chiffres après la virgule. Mais de combien ? Cela ne peut se déterminer simplement, et change continuellement. Néanmoins on obtient de cette façon cent premiers termes qui ne diffèrent d'un entier que d'une quantité négligeable : au maximum $497 \cdot 10^{-6}$ pour le centième qui vaut 9 999 900.000495. C'est pourquoi Neper appelle première table les cent nombres de cette progression géométrique de raison $\frac{9\,999\,999}{10\,000\,000} = 1 - \frac{1}{10^7}$.

Neper construit ensuite une seconde table constituée des termes d'une progression géométrique commençant par 10^7 et dont le deuxième terme est 9 999 900, c'est-à-dire un nombre très proche du dernier terme de la première table. Sa raison est donc $\frac{99\,999}{100\,000} = 1 - \frac{1}{10^5}$. Cette seconde table contient 50 termes, chaque terme étant déduit du précédent en lui ôtant sa 10 000^e partie, le dernier valant 9 995 001. 222 927 (il y a une légère erreur due aux arrondis, mais sans conséquence, la valeur exacte à 10^{-6} près étant 9 995 001.224 801). Voici le début de ces deux premières tables telles qu'elles sont présentées par Neper :

Première table	Seconde table
10000000.0000000	10000000.000000
1.0000000	100.000000
9999999.0000000	9999900.000000
.9999999	99.999000
9999998.0000001	9999800.001000
.9999998	99.998000
9999997.0000003	9999700.003000
.9999997	99.997000
9999996.0000006	9999600.006000
…	…
à continuer jusqu'à	à continuer jusqu'à
9999900.000495	9995001.222927



10 MIRIFICI LOGARITHM.

Secunda Tabula.

10000000. 0000000
100. 000000
9999900. 000000
99. 999000
9999800. 001000
99. 998000
9999700. 003000
99. 997000
9999600. 006000
&c. vſque ad
9995001. 222927

Vt primæ Tabulæ primum & vltimum ſunt 10000000.0000000, & 9999900.0004950; in quorum proportione, difficile eſt conſtituere quinquaginta proportionales numeros. Proxima itaque facilis proportio, eſt 100000 ad 99999, quæ continuatur ſatis exactè adiiciendo ſinui toti ſex cyphras, & auferendo ab antecedente ſuam partem 100000^{am}, vt fiat ſubſequens, vt à latere vides: & hæc Tabula præter primum qui eſt ſinus totus, etiam quinquaginta contineat proportionales numeros, quorum vltimum (ni erraueris) reperies eſſe 9995001. 222927.

18. *Tertia Tabula ſexaginta nouem columnis conſtat, & in qualibet columna ponuntur numeri viginti & vnus, progredientes ea proportione quæ facillima eſt, & quàm proxima illi proportioni quæ eſt inter primum & vltimum ſecundæ Tabulæ.*

Vnde huius prima columna facillimè habetur à ſinu toto quinque cyphris aucto, & à ceteris inde ortis ſuam 2000^{am} partem auferendo.

Prima Columna tertiæ Tabulæ.

10000000. 00000
5000. 0000
9995000. 00000
4997.50000
9990002. 50000
4995. 00125
9985007. 49875
4992. 50374
9980014. 99501
&c. vſque ad
9900473. 57808

Vt quia inter 10000000: 000000 primum ſecundæ tabulæ, & 9995001. 222927 eiuſdem vltimum, proportio difficilis eſt progreſſionis; ideò in proportione facili 10000 ad 9995 (quæ illi propinqua ſatis eſt) conſtituendi ſunt numeri viginti & vnus; quorum vltimus (ni erraueris) erit 9900473. 57808 A quibus iam creatis, reiici poteſt vltima ſingulorum figura abſque ſenſibili errore, quò faciliùs ab iis alij poſteà creentur.

Primi

CANONIS CONSTRVCTIO. 11

19. *Primi numeri omnium columnarum, progrediuntur à ſinu toto quatuor cyphris aucto, eâ proportione facillimâ & proximâ proportioni, quæ eſt inter primum & vltimum primæ columnæ.*

Vt primæ columnæ primus & vltimus ſunt 10000000.0000, & 9900473. 5780: his proportio facillima maximè propinqua eſt 100 ad 99. A ſinu igitur toto continuandi ſunt 68 numeri in ratione 100 ad 99, auferendo à quolibet eorum ſuam centeſimam partem.

20. *Eâdem proportione, à primæ columnæ numero ſecundo, per omnium columnarum ſecundos: & à tertio, per tertios: & à quarto, per quartos: & à ceteris reſpectiue, per ceteros fit progreſſio.*

Vt ex antecedentis columnæ numero aliquo fit numerus eiuſdem ordinis in ſequenti columna, ſubſtrahendo ſuam centeſimam partem, numeroſque hoc qui ſequitur ordine conſtituendo.

PROPORTIONALIA TERTIÆ TABVLÆ.

Prima Columna.	*Secunda Col.*
10000000. 0000	9900000.0000
9995000.0000	9865050. 0000
9990002. 5000	9890102. 4750
9985007. 4987	9885157. 4237
9980014. 9950	9880214. 8451
&c. vſq. ad	&c. deſcendendo ad
9900473. 5780	9801468. 8423

Tertia Col.	*Inde 4^a. 5^a &c. vſq. ad 69^{am} columnā.*	
9801000. 0000	&c. vſque ad	5048858. 8900
9796099. 5000	&c. vſque ad	5046334. 4605
9791201. 4503	&c. vſque ad	5043811. 2932
9786305. 8495	&c. vſque ad	5041289. 3879
9781412. 6967	&c. vſque ad	5038768. 7435
&c. deſcēdendo ad		vſque tādem ad
9703454. 1539	vſque tandem ad	4998609 4034

B 2

page de l'édition de Lyon (1620) de la Constructio, comprenant les §19 et 20
(réédition Librairie scientifique A. Hermann, Paris, 1895)

Enfin, Neper construit une troisième table formée de 69 colonnes constituées chacune de 21 nombres en progression géométrique de raison proche du rapport entre le premier (10^7) et le dernier terme (9 995 001. 224 801) de la seconde table et qui soit facile à calculer ; soit de raison $\frac{9995}{10000}=1-\frac{1}{2000}$.
Le dernier terme de la première colonne vaut : 9 900 473, 57808. Ce dernier terme est proche de 9 900 000 qui donne la progression des premiers termes des colonnes suivantes, progression de raison $\frac{99}{100}=1-\frac{1}{100}$. Chaque colonne est ensuite formée par une progression de raison $\frac{9995}{10000}=1-\frac{1}{2000}$. Au total, le terme de la ligne $i+1$ et de la colonne $j+1$ s'écrirait aujourd'hui $10^7\left(1-\frac{1}{2000}\right)^i\left(1-\frac{1}{100}\right)^j$, mais il n'est nul besoin de ces formules pour calculer les termes successifs de la table qui se déduisent les uns des autres par simple soustraction. Bien plus, cette écriture pourrait conduire à des interprétations abusives et anachroniques du texte de Neper. Nous l'utiliserons quelquefois dans la suite, mais uniquement pour aider à la compréhension du texte et pour abréger les explications. Voici l'esquisse de cette troisième table telle que donnée par Neper (article 20)

Troisième table

Première colonne	*Deuxième colonne*	*Troisième colonne*	*4ᵉ, 5ᵉ, etc.*	*69ᵉ colonne*
10000000.0000	9900000.0000	9801000.0000	etc.	5048858.8900
9995000.0000	9895050.0000	9796099 .5000	etc.	5046334.4605
9990002.5000	9890102.4750	9791201.4503	etc.	5043811.2932
9985007.4987	9885157.4237	9786305.8495	etc.	5041289.3879
9980014.9950	9880214.8451	9781412.6967	etc.	5038768.7435
… descendant continuellement jusqu'à	… … … …	… … … …	… … … …	… … … …
9900473.5780	9801468.8423	9703454.1539	etc.	4998609.4034

En quoi le calcul relativement facile et rapide de ces trois tables suffit-il à construire une table complète des logarithmes de tous les entiers entre 1 et 10^7 ? C'est ici que l'on va comprendre l'extraordinaire perspicacité et l'intelligence dont fait preuve Neper, utilisant à fond le fait qu'il est en présence de nombres proportionnels. En effet, soit un nombre X compris entre deux nombres

consécutifs X_n et X_{n+1} de la deuxième table : $X_{n+1} < X < X_n$.
Alors il existe un nombre u de la première table (ou plus exactement compris entre deux nombres de la première table vérifiant $\frac{u}{10^7} = \frac{X}{X_n}$ puisque $\left(1 - \frac{1}{10^5}\right) < \frac{X}{X_n} < 1$. (Neper utilise le langage des proportions et parle de quatrième proportionnelle). Et par la proposition 36 ci-dessus on détermine le logarithme de X à partir de ceux de X_n et u (et sachant que $\log 10^7 = 0$, comme nous le verrons dans la suite).

De même des calculs sur des nombres compris entre deux nombres consécutifs de la troisième table peuvent se ramener à des calculs sur des nombres de la deuxième table. C'est un transfert que fera systématiquement Neper, comme le montre la suite de la présentation de la *Constructio.*

Comme il ne dispose pas de l'écriture des puissances ni de la notation exponentielle, mais qu'il sait être en présence de progressions donc de successions, les éléments d'une progression peuvent se décrire comme les positions d'un point en mouvement sur une droite : mouvement uniforme pour une progression arithmétique (Neper dit : *les espaces parcourus en des temps égaux sont égaux*)

Pour les progressions géométriques, ce sera un mouvement dans lequel les espaces parcourus en des temps égaux sont proportionnels à la distance qui reste à parcourir. Neper peut maintenant (et maintenant seulement) définir le logarithme d'un nombre naturel. Rappelons qu'il ne dispose pas de la notation exponentielle. Il pourrait parler de rang, si les logarithmes étaient des nombres entiers. C'était la tentation fréquente des historiens de voir dans la relation entre les rangs une anticipation des logarithmes. Mais l'on voit bien ici qu'il s'agit de bien plus : le logarithme n'est en général pas un entier, ce n'est pas un rang, c'est un nombre défini par la position d'un point sur une droite. Précisément, selon la définition de Neper : *Le logarithme d'un sinus donné est le nombre qui a progressé arithmétiquement avec la même vitesse avec laquelle le rayon a diminué géométriquement jusqu'au sinus donné.*

On en déduit immédiatement (§ 27) que le logarithme du sinus total est 0. Puis par un raisonnement sur les distances parcourues par chacun des mobiles il déduit un encadrement du logarithme d'un sinus donné par la proposition 29 que nous écririons :

$$10^7 - X < \log X < 10^7 \cdot (10^7 - X)/X$$

Application :

Pour déterminer le logarithme du premier nombre de la première table, soit $X = 9\,999\,999$, on a :

$$1 < \log 9\,999\,999 < \frac{10^7}{9\,999\,999}$$

Or cette dernière limite peut être remplacée par 1.000 000 1 ou 1.000 000 100 000 01 si l'on souhaite une meilleure précision. Mais, dit Neper, *ces limites différant insensiblement l'une de l'autre, n'importe quel nombre entre elles peut être choisi comme logarithme*, et il propose donc de prendre log 9 999 999 = 1.000 000 05

Le raisonnement cinématique précédent sur les distances parcourues se généralise pour déterminer l'encadrement suivant :

Proposition 40 : si a et b sont deux sinus, avec $a < b$, alors :

$$10^7\left(\frac{b-a}{a}\right) < \log b - \log a < 10^7\left(\frac{b-a}{b}\right)$$

Exemple : $a = 9\,999\,975.000\,0300$ et $b = 9\,999\,975.\,500\,000\,0$

$0.499\,971\,22 < \log b - \log a < 0.499\,971\,24$

Mais comme ce calcul jusqu'à la huitième décimale est au-delà de la précision souhaitée (alors que les sinus ne sont donnés qu'avec 7 chiffres) on pourra prendre comme différence des deux logarithmes exactement 0.499 971 2, sans erreur sensible.

À partir de là, tout s'enchaîne rapidement.

Calcul du logarithme d'un nombre de la première table

Comme il s'agit de nombres proportionnels, il suffit d'utiliser la *proposition 36*.

En poursuivant les soustractions de la première table, on trouve comme 25^e^ nombre :

9 999 975.000 0300, dont le logarithme est encadré par 25.000 000 0 et 25.000 002 5

Calcul du logarithme d'un nombre compris entre deux nombres de la première table

Par exemple 9 999 975.500 000 0.

Par la *proposition 40* et le résultat précédent ce logarithme est encadré par 24.500 028 8 et 24.500 031 3. On pourra prendre comme valeur :

log 9 999 975.500 000 0 = 24.500 030 0 sans erreur sensible.

Calcul du logarithme du premier nombre de la deuxième table : 9 999 900

Ce nombre est proche du dernier de la première table 9 999 900.000 495 0. Les méthodes mises en place précédemment nous permettent de déterminer l'encadrement de son logarithme, puis de tous les logarithmes de la seconde table, et d'en déduire leur valeur avec une précision suffisante.

Cette précision sera conservée pour le calcul du logarithme d'un nombre X compris entre deux nombres consécutifs X_n et

X_{n+1} de la deuxième table : $X_{n+1} < X < X_n$.
Alors il existe un nombre u de la première table (ou plus exactement compris entre deux nombres de la première table vérifiant $\frac{u}{10^7} = \frac{X}{X_n}$ puisque $\left(1 - \frac{1}{10^5}\right) < \frac{X}{X_n} < 1$. Les mêmes principes s'appliquent pour les nombres de la troisième table et ceux compris entre deux nombres de la troisième table. On pourra, à titre d'exercice, calculer un encadrement et la valeur des logarithmes de 9 995 000, de 9 900 000.

Neper est en mesure, maintenant de donner ce qu'il appelle la table radicale et qui contient les logarithmes de tous les nombres de la troisième table. Puis reste à construire la table des logarithmes des sinus. Partant d'une table de sinus suffisamment précise - Neper conseille celle de Reinhold (*Tables pruténiques*, publiées en 1551, premières tables d'astronomie se basant sur les hypothèses coperniciennes) – qui fournit les sinus des angles du premier quadrant, de minute en minute. Ces sinus sont proches des nombres de la table radicale, du moins pour les sinus supérieurs à $\sin(30°) = 10^7/2$, et les encadrements donnés ci-dessus permettent la détermination de leurs logarithmes. Pour les autres, nous avons la relation, que nous écrivons :
$\log(\sin(x)) = \log(\sin(2x)) - \log(\sin(90° - x)) - \log(10^7/2)$, (qu'il utilise en réalité dès $\sin(45°)$), laquelle lui permet, de proche en proche, d'arriver jusqu'au logarithme de $1'$. Le dernier paragraphe (§ 59) va jusqu'à donner des conseils pratiques : *prépare quarante cinq pages, plus longues que larges, pouvant contenir soixante lignes entre le haut et le bas. Partage chaque page en vingt espaces égaux par des lignes horizontales… Puis divise chaque page en sept colonnes par des lignes verticales…*

◆ L'APPORT DE BRIGGS

Henry Briggs (1561-1630), professeur au Gresham College à Londres, était très intéressé par l'astronomie, en particulier les éclipses. Il avait déjà publié des tables (par exemple en 1602, *A Table to find the Height of the Pole, the Magnetic Declination being given*) lorsqu'il lut la *Descriptio* de Neper qui l'enthousiasma et l'amena à rendre visite à plusieurs reprises au baron de Merchiston à Édimbourg. De leurs échanges est ressortie l'idée que parmi différents systèmes de logarithmes, celui où le logarithme de 1 vaut 0 et le logarithme de 1/10 ou de 10 vaut 100 000 000 000 000 = 10^{14} est de loin le plus commode, et Briggs publiera ses tables de logarithmes avec 14 chiffres exacts en 1624, dans son *Arithmetica logarithmetica.* Ce livre a ensuite été traduit du latin en français et publié en 1628 par Adrien Vlacq, qui l'a complété par les logarithmes décimaux, avec 9 chiffres exacts, des nombres de 20 000 à 90 000.

Contrairement à Neper, chez qui la base des logarithmes n'est pas apparente, Briggs utilise la base 10 dans le sens que le logarithme d'un nombre est l'exposant de la puissance de 10 égale à ce nombre. Bien entendu, Briggs n'a à sa disposition que les algorithmes usuels de calculs correspondant aux quatre opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication, division) auxquelles il faut ajouter l'extraction des racines carrées.

Dans une première méthode, il cherche donc l'exposant n tel que $2 = q^n$ sachant que $10 = q^{100\,000\,000\,000\,000}$. Il n'est pas nécessaire de connaître la raison q et il suffit en fait de déterminer le nombre de chiffres de $2^{100\,000\,000\,000\,000}$ en écriture décimale. Par divers regroupements et astuces de calcul, Briggs calcule que ce nombre est égal à 30102,99956,6398 qui est donc le logarithme de 2.

Dans une seconde méthode, Briggs calcule 54 racines carrées successives en partant de $\sqrt{10}$, puis, $\sqrt{\sqrt{10}}$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}$, etc., jusqu'à celle que nous écrirons : $10^{\left(\frac{1}{2}\right)^{54}}$, où tous les calculs sont menés avec 30 décimales. Il construit ainsi une table (voir reproduction ci-après) dont la dernière ligne donne (telle que l'écrit Briggs) :

log 10000,00000,00000,01278,19149,32003,235 =
0,00000,00000,00000,05551,11512,31257,82702,11815

(ce dernier chiffre n'étant rien d'autres que l'exposant de 10 à savoir $\left(\frac{1}{2}\right)^{54}$).

Puis Briggs applique ce qu'il appelle la *règle de proportion* pour le calcul des logarithmes (avec 30 décimales) de nombres très proches de 1, de la forme $1 + x$, avec x inférieur à 10^{-15}, règle que l'on peut schématiser ainsi : $\log\,(1 + x) = \mathrm{C}x$ pour x inférieur à 10^{-15}.

La constante C est déterminée à l'aide de

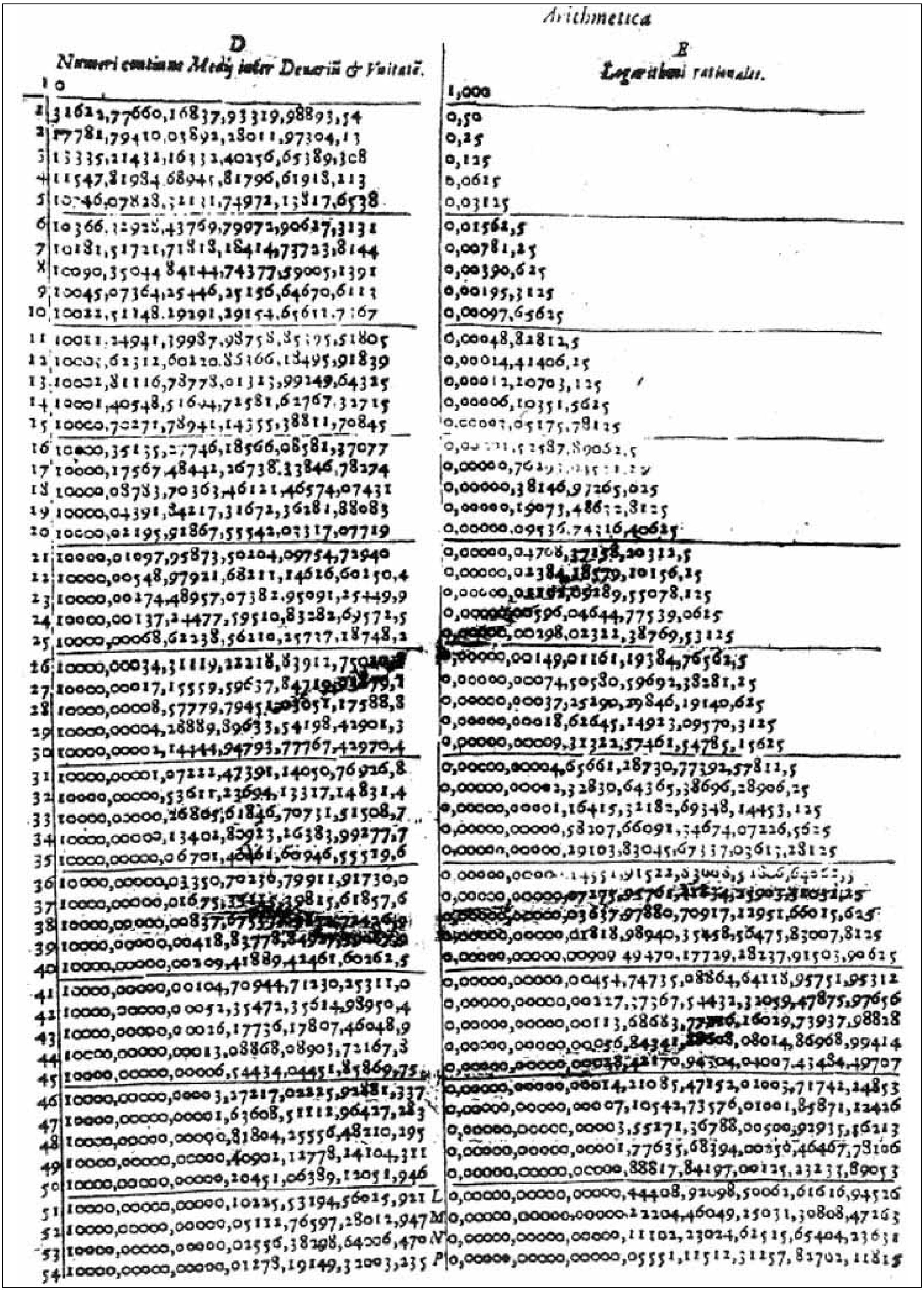
$$\frac{\log\,(1+x)}{\log\,(1+y)} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow \frac{\log\,(1+x)}{x} = \frac{\log\,(1+y)}{y} = \mathrm{C}$$

et en prenant une valeur de y extraite du tableau, d'après la ligne 54, comme le suggère l'exemple suivant, en revenant à notre manière de placer la virgule :

$$\log(1{,}0000\ 00000\ 00000\ 01278\ 19149\ 32003) = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 05551\ 11512\ 1257\ 3$$

on peut donc calculer $\log(1 + 10^{-15})$ par la règle de proportion puis reconnaître et justifier l'apparition de $1/\ln 10$:

$$\frac{\log\,(1+x)}{x} = \frac{\log\,(1 + (1{,}0000\,00000\,00000\,01278\,19149\,32003))}{0.0000\,00000\,00000\,01278\,19149\,32003}$$



Arithmetica

	D Numeri continue Medij inter Denariũ & Vnitatẽ.	E Logarithmi rationales.
1	0	1,000
1	31622,77660,16837,93319,98893,54	0,50
2	17782,79410,03892,28011,97304,13	0,25
3	13335,21432,16332,40256,65389,308	0,125
4	11547,81984,68945,81796,61918,213	0,0625
5	10746,07828,32131,74972,13817,6538	0,03125
6	10366,32925,43759,79972,90627,3131	0,01562,5
7	10181,51721,71818,18414,73723,8144	0,00781,25
8	10090,35044,84144,74377,59005,1391	0,00390,625
9	10045,07364,25446,25156,64670,6113	0,00195,3125
10	10022,51148,29291,29154,65611,7367	0,00097,65625
11	10011,24941,19987,98758,85395,51805	0,00048,82812,5
12	10005,62312,60220,85166,13495,91839	0,00024,41406,25
13	10002,81116,78778,01323,99149,64325	0,00012,20703,125
14	10001,40548,51644,72581,62767,32715	0,00006,10351,5625
15	10000,70271,78941,14355,38811,70845	0,00003,05175,78125
16	10000,35135,27746,18566,08581,37077	0,00001,52587,89062,5
17	10000,17567,48442,26738,33846,78274	0,00000,76293,94531,25
18	10000,08783,70363,46121,46574,07431	0,00000,38146,97265,625
19	10000,04391,84217,31672,36281,88083	0,00000,19073,48632,8125
20	10000,02195,91867,55542,03317,07719	0,00000,09536,74316,40625
21	10000,01097,95873,50204,09754,72940	0,00000,04768,37158,20312,5
22	10000,00548,97921,68211,14626,60150,4	0,00000,02384,18579,10156,25
23	10000,00274,48957,07382,95091,25449,9	0,00000,01192,09289,55078,125
24	10000,00137,24477,59510,83282,69572,5	0,00000,00596,04644,77539,0625
25	10000,00068,62238,56210,25717,18748,2	0,00000,00298,02322,38769,53125
26	10000,00034,31119,22218,83912,75[illegible]	0,00000,00149,01161,19384,76562,5
27	10000,00017,15559,59637,847[illegible]79,1	0,00000,00074,50580,59692,38281,25
28	10000,00008,57779,7945[illegible]057,17588,8	0,00000,00037,25290,29846,19140,625
29	10000,00004,28889,89633,54198,42901,3	0,00000,00018,62645,14923,09570,3125
30	10000,00002,14444,94793,77767,42970,4	0,00000,00009,31322,57461,54785,15625
31	10000,00001,07222,47391,14050,76926,8	0,00000,00004,65661,28730,77392,57812,5
32	10000,00000,53611,23694,13317,14831,4	0,00000,00002,32830,64365,38696,28906,25
33	10000,00000,26805,61846,70731,51508,7	0,00000,00001,16415,32182,69348,14453,125
34	10000,00000,13402,80923,16383,99277,7	0,00000,00000,58207,66091,34674,07226,5625
35	10000,00000,06701,40461,60946,55519,6	0,00000,00000,29103,83045,67337,03613,28125
36	10000,00000,03350,70230,79911,91730,0	0,00000,00000,14551,91522,83668,51806,64062,5
37	10000,00000,01675,35115,39815,61857,6	0,00000,00000,07275,95761,41834,25903,32031,25
38	10000,00000,00837,67[illegible]	0,00000,00000,03637,97880,70917,12951,66015,625
39	10000,00000,00418,83778,[illegible]	0,00000,00000,01818,98940,35458,56475,83007,8125
40	10000,00000,00209,41889,42461,60262,5	0,00000,00000,00909,49470,17729,28237,91503,90625
41	10000,00000,00104,70944,71230,25311,0	0,00000,00000,00454,74735,08864,64118,95751,95312
42	10000,00000,00052,35472,35614,98950,4	0,00000,00000,00227,37367,54432,32059,47875,97656
43	10000,00000,00026,17736,17807,46048,9	0,00000,00000,00113,68683,[illegible],16029,73937,98828
44	10000,00000,00013,08868,08903,72167,3	0,00000,00000,00056,84341,[illegible],08014,86968,99414
45	10000,00000,00006,54434,04451,85869,75	0,00000,00000,00028,42170,94304,04007,43484,49707
46	10000,00000,00003,27217,02225,92281,337	0,00000,00000,00014,21085,47152,01003,71742,24853
47	10000,00000,00001,63608,51112,96427,283	0,00000,00000,00007,10542,73576,01001,85871,12426
48	10000,00000,00000,81804,25556,48210,295	0,00000,00000,00003,55271,36788,00500,92935,56213
49	10000,00000,00000,40902,12778,24104,311	0,00000,00000,00001,77635,68394,00250,46467,78106
50	10000,00000,00000,20451,06389,12051,946	0,00000,00000,00000,88817,84197,00125,23233,89053
51	10000,00000,00000,10225,53194,56025,921 L	0,00000,00000,00000,44408,92098,50062,61616,94526
52	10000,00000,00000,05112,76597,28012,947 M	0,00000,00000,00000,22204,46049,25031,30808,47263
53	10000,00000,00000,02556,38298,64006,470 N	0,00000,00000,00000,11102,23024,62515,65404,23631
54	10000,00000,00000,01278,19149,32003,235 P	0,00000,00000,00000,05551,11512,31257,82702,11815

Arithmetica logarithmica, Briggs, 1624, le calcul de $10^{1/2^{54}}$, BM Rennes.

$$= \frac{0{,}00000\,00000\,00000\,05551\,11512\,12573}{0.0000\,00000\,00000\,01278\,19149\,32003} = 0.43429448\ldots$$

$\left(= \frac{1}{\ln 10} \text{ mais évidemment Briggs ne peux dire cela}\right).$

Finalement $\log(1 + x) = x \times 0,\ 4342\ 94481\ 90325\ 1804$ pour x inférieur à 10^{-15}, avec une précision de 30 chiffres après la virgule.

D'où la méthode pour calculer le logarithme d'un nombre quelconque N:

on calculera les racines carrées successives (avec 30 décimales) de N jusqu'à parvenir à un nombre $1 + x$, inférieur à $1 + 10^{-15}$ donc très proche de 1.

Puis on appliquera la *règle de proportion* pour obtenir le logarithme du nombre ainsi trouvé et on en déduit le logarithme de N.

Jean-Pierre FRIEDELMEYER
IREM de Strasbourg

Références : *Histoires de logarithmes*, Commission Inter-IREM d'épistémologie et d'histoire des mathématiques, Ellipses, 2006.

En voici une présentation

Les quinze chapitres de cet ouvrage racontent quinze moments historiques, qui marquent des étapes à la fois essentielles et riches pour l'histoire des idées mathématiques, et plus largement pour l'histoire des idées scientifiques et culturelles. Elles sont présentées en suivant la chronologie et renvoient les unes aux autres, mais elles peuvent aussi être lues chacune pour elle-même. Les logarithmes font partie de bien des épisodes de l'histoire des mathématiques, aussi cet ouvrage est conçu également comme une introduction à cette histoire, depuis le XVI^e siècle jusqu'au XX^e siècle, à partir de la notion de logarithme. *Il y a des logarithmes partout, dans les sciences et dans les mathématiques. Il y a de multiples façons de les introduire et de les définir.* Voilà deux constats, que l'histoire permet de comprendre et d'approfondir, puisqu'elle indique les contextes des inventions, des conjectures, des problèmes et des résultats, les circonstances des changements de point de vue, et qu'elle montre l'intérêt d'avoir à sa disposition une multiplicité de points de vue. Accompagnés de leur histoire, les logarithmes constituent un sujet de réflexion et d'enseignement passionnant et instructif. Ce sont des outils de résolution de divers problèmes mathématiques, qui relient différents domaines des mathématiques - arithmétique, algèbre, géométrie et analyse - et qui interviennent dans de nombreuses sciences – physiques, naturelles et humaines. Ils forment toujours l'une des parties des programmes de l'enseignement mathématique, et constituent ainsi un de ses savoirs pérennes.