ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES $y' = ky$ ($k \in \mathbb{R}$) - FONCTIONS EXPONENTIELLES

1. L'équation différentielle $y' = y$

1.1. Théorème

Le problème différentiel

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

Il s'agit de prouver qu'il existe une unique fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la dérivée est égale à elle même ($f' = f$) et qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$.

L'existence est délicate à prouver et les programmes officiels suggèrent d'admettre provisoirement ce résultat (qui pourra se prouver lors de la quadrature de l'hyperbole lors de l'étude du calcul intégral).

On a préféré prouver cette existence à l'aide de suites adjacentes (même si c'est plutôt technique). Comme ça, c'est réglé une bonne fois pour toute !

Preuve de l'existence (Hors programme)

Rappelons, pour commencer, une inégalité bien utile : l'inégalité de Bernoulli :

pour tout réel $X > -1$ et tout entier naturel n : $(1 + X)^n \geqslant 1 + nX$

Variante : pour tout réel $X < 1$ et tout entier naturel n : $(1 - X)^n \geqslant 1 - nX$

Soit x un réel fixé.

Considérons les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ définies pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}$$

L'introduction de la suite $(u_n(x))$ n'est pas tirée du chapeau. Elle apparaît naturellement lors de l'étude de l'équation différentielle $y' = y$ par la méthode d'Euler.

1. Montrons que la suite $(u_n(x))$ est croissante, à partir d'un certain rang :

$$u_{n+1}(x) = \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x}{n}-\frac{x}{n(n+1)}\right)^{n+1}$$

Rappel : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Pour des entiers n tels que $n > |x|$ alors $1 + \frac{x}{n}$ est non nul, ce qui permet de factoriser par $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}$:

$$u_{n+1}(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1-\frac{x}{n(n+1)\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right)^{n+1}$$

$$u_{n+1}(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}$$

Or, lorsque n est suffisamment grand (disons supérieur à un certain entier N), on a :

$$\frac{x}{(n+1)(n+x)} < 1$$

(En effet, cela découle de ce que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x}{(n+1)(n+x)} = 0$)

D'après l'inégalité de Bernoulli (variante) appliquée avec $X = \frac{x}{(n+1)(n+x)}$, nous obtenons :

Pour $n \geqslant N$: $$\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \geqslant 1-\frac{x}{n+x}$$

D'où : $$u_{n+1}(x) \geqslant \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1} \frac{1}{1+\frac{x}{n}}$$

$$u_{n+1}(x) \geqslant u_n(x), \text{ pour } n \geqslant N$$

Ce qui prouve bien que la suite $(u_n(x))$ est croissante à partir d'un certain rang.

2. Montrons que la suite $(v_n(x))$ est décroissante, à partir d'un certain rang :

   Pour les entiers n tels que $n > |x|$, $u_n(x)$ n'est pas nul ce qui permet d'écrire :

$$v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)}$$

   On en déduit que la suite $(v_n(x))$ est décroissante, à partir d'un certain rang.

3. Montrons que la suite $(v_n(x) - u_n(x))$ tend vers 0 :

   Pour les entiers n tels que $n > |x|$, $v_n(x)$ n'est pas nul ce qui permet d'écrire :

$$\frac{u_n(x)}{v_n(x)} = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n$$

   Or, d'après l'inégalité de Bernoulli (variante) appliquée avec $X = \frac{x^2}{n^2}$ (on a bien $X < 1$ car $n > |x|$) on obtient

:

$$\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \geqslant 1-\frac{x^2}{n}$$

   Par ailleurs, il est clair que : $$\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \leqslant 1$$

   D'où : $$1-\frac{x^2}{n} \leqslant \frac{u_n(x)}{v_n(x)} \leqslant 1$$

$$0 \leqslant 1-\frac{u_n(x)}{v_n(x)} \leqslant \frac{x^2}{n} \qquad (1)$$

   Or : $$v_n(x) - u_n(x) = v_n(x)\left(1-\frac{u_n(x)}{v_n(x)}\right) \qquad (2)$$

   On déduit de (1) et (2) que : $$0 \leqslant v_n(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^2}{n} v_n(x)$$

   Or, la suite $(v_n(x))$ est décroissante (à partir d'un certain rang) ; elle est donc bornée.

   Notons M l'un de ses majorants, ainsi :

$$0 \leqslant v_n(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^2}{n} M$$

   D'après le théorème des gendarmes, on en déduit la convergence de la suite $(v_n(x) - u_n(x))$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} (v_n(x) - u_n(x)) = 0 \qquad (3)$$

Les points (1), (2) et (3) montrent que les suite $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ sont **adjacentes**.

En conséquence, ces suites **convergent** vers une même limite (qui dépend de x).

Notons $\ell(x)$ la limite commune de ces suites.

Nous allons maintenant vérifier que la fonction ℓ est solution du problème différentiel $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

1. Comme, pour tout entier n, $u_n(0) = 1$, il est clair que :

$$\ell(0) = 1$$

2. Montrons que ℓ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et égale à sa dérivée. Pour cela, nous allons prouver que, pour tout réel x, l'accroissement moyen $\dfrac{\ell(x+h) - \ell(x)}{h}$ admet une limite (lorsque h tend vers 0) qui est précisément $\ell(x)$.

   Pour $n > |x|$ et $h \in \mathbb{R}^*$ on a :

$$u_n(x+h) = \left(1 + \frac{x+h}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{h}{n\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right)^n = u_n(x)\left(1 + \frac{h}{n+x}\right)^n$$

   Or, lorsque n est suffisamment grand, on a :

$$\frac{h}{n+x} > -1$$

   D'après l'inégalité de Bernoulli appliquée avec $X = \dfrac{h}{n+x}$ nous obtenons :

$$\left(1 + \frac{h}{n+x}\right)^n \geqslant 1 + \frac{nh}{n+x}$$

   D'où : $$u_n(x+h) \geqslant u_n(x)\left(1 + \frac{nh}{n+x}\right)$$

   En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, cette inégalité devient :

$$\ell(x+h) \geqslant \ell(x)(1+h)$$

   D'où : $$\ell(x+h) - \ell(x) \geqslant \ell(x)h \qquad (1)$$

   En remplaçant h par $-h$, l'inégalité (1) devient :

$$\ell(x-h) - \ell(x) \geqslant -\ell(x)h$$

   Et en remplaçant x par $x + h$: $$\ell(x) - \ell(x+h) \geqslant -\ell(x+h)h$$

$$(1-h)\ell(x+h) \leqslant \ell(x)$$

   Supposons $|h| < 1$, ainsi : $$\ell(x+h) \leqslant \frac{\ell(x)}{1-h}$$

   D'où : $$\ell(x+h) - \ell(x) \leqslant \frac{h\ell(x)}{1-h} \qquad (2)$$

   Si $h > 0$, alors de (1) et (2), on déduit :

$$\ell(x) \leqslant \frac{\ell(x+h) - \ell(x)}{h} \leqslant \frac{\ell(x)}{1-h}$$

   D'où : $$\lim_{h \to 0^+} \frac{\ell(x+h) - \ell(x)}{h} = \ell(x)$$

Si $h < 0$, alors de (1) et (2), on déduit :

$$\frac{\ell(x)}{1-h} \leqslant \frac{\ell(x+h)-\ell(x)}{h} \leqslant \ell(x)$$

D'où : $$\lim_{h\to 0^-} \frac{\ell(x+h)-\ell(x)}{h} = \ell(x)$$

Comme les limites à droite et à gauche existent et sont égales, nous avons bien :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ell(x+h)-\ell(x)}{h} = \ell(x)$$

C'est-à-dire : $$\ell'(x) = \ell(x)$$

Ce raisonnement étant valable pour tout réel x, on a donc :

$$\ell' = \ell \text{ sur } \mathbb{R}$$

La fonction ℓ est solution du problème différentiel $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

Ce qui prouve l'existence.

Preuve de l'unicité (Tout à fait au programme !)

Soient f_1 et f_2 des solutions du problème différentiel $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$. (On vient de démontrer que cela existe)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f_1(x)f_1(-x)$$

En dérivant (g est un produit), nous obtenons :

$$g'(x) = f_1'(x)\,f_1(-x) - f_1(x)\,f_1'(-x) = 0$$

On constate que g' est nulle sur $\mathbb{R}$, donc g est constante sur $\mathbb{R}$. Et comme $g(0) = f_1(0)f_1(0) = 1$, on a :

$$g = 1 \text{ sur } \mathbb{R}$$

Soit maintenant f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = f_1(-x)f_2(x)$$

En dérivant f, nous obtenons :

$$f'(x) = -f_1'(-x)\,f_2(x) + f_1(-x)\,f_2'(x)$$

Mais comme $f_1' = f_1$ et $f_2' = f_2$:

$$f'(x) = 0$$

Et comme pour g, on conclut : $$f = 1 \text{ sur } \mathbb{R}$$

On a donc, pour tout réel x :

$$f(x) = g(x)$$

$$f_1(-x)f_2(x) = f_1(x)f_1(-x)$$

Or f_1 ne s'annule pas (sinon g s'annulerait, ce qui n'est pas le cas), on déduit que pour tout réel x :

$$f_2(x) = f_1(x)$$

$$f_2 = f_1 \text{ sur } \mathbb{R}$$

Ce qui prouve l'unicité.

1.2. Définition

On appelle exponentielle l'unique fonction solution, sur $\mathbb{R}$, du problème différentiel $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

On la note exp. Ainsi :

$$\exp(0) = 1 \text{ et pour tout réel } x : \exp'(x) = \exp(x)$$

1.3. Propriétés

1. Pour tout réel x : $\exp(-x) \times \exp(x) = 1$
2. Pour tout réel x : $\exp(x) \neq 0$
3. Pour tout réel x : $\exp(x) > 0$
4. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

1. On a vu dans la démonstration de l'unicité de l'exponentielle qu'une fonction f solution de $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ vérifie :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x)\ f(-x) = 1$$

C'est donc le cas de l'exponentielle.

2. S'il existait un réel x_0 tel que $\exp(x_0) = 0$, on aurait $\exp(-x_0) \times \exp(x_0) = 0$, ce qui contredirait 1.

   Donc pour tout réel x : $\exp(x) \neq 0$

3. On sait que :
   - la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ (puisque nécessairement dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque solution de l'équation différentielle $y' = y$ sur $\mathbb{R}$)
   - $\exp(0) = 1 > 0$

   S'il existait un réel x_0 tel que $\exp(x_0) < 0$, alors du théorème des valeurs intermédiaires on déduirait l'existence d'un réel c (compris entre 0 et x_0) tel que $\exp(c) = 0$, ce qui contredirait 2.

   Donc pour tout réel x : $\exp(x) > 0$

4. On a, pour tout réel x : $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(x) > 0$

   On en déduit que l'exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. L'équation différentielle $y' = ky$ ($k \in \mathbb{R}$)

Il s'agit d'une simple formalité. Nous allons utiliser le travail fait précédemment.

2.1. Théorème

Le problème différentiel

$$\begin{cases} y' = ky \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution f sur $\mathbb{R}$ qui est définie par :

$$f(x) = y_0 \exp(kx)$$

Démonstration

Existence

La fonction f, définie par $f(x) = y_0 \exp(kx)$, vérifie bien les conditions :

$$f(0) = y_0 \exp(0) = y_0 \quad \text{et} \quad f'(x) - kf(x) = y_0\, k \exp'(kx) - y_0\, k \exp(kx) = 0$$

Unicité

Soit g une solution quelconque du problème différentiel $\begin{cases} y' = ky \\ y(0) = y_0 \end{cases}$.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = g(x) \exp(-kx)$

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ (g et l'exponentielle le sont) et pour tout réel x :

$$h'(x) = g'(x) \exp(-kx) - k\, g(x) \exp(-kx)$$

Et comme $g' = kg$: $h'(x) = 0$

Donc h est constante sur $\mathbb{R}$. Comme $h(0) = g(0) \exp(0) = y_0$, on a :

$$h = y_0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

D'après la propriété 1.3., on déduit : $g(x) = y_0 \exp(kx)$

Donc $g = f$ sur $\mathbb{R}$

Ce qui prouve l'unicité.

Remarque : lorsque k est nul, on obtient la fonction constante $f = y_0$.

3. Fonctions exponentielles et relation fonctionnelle $f(u + v) = f(u)f(v)$. Conséquences

3.1. Théorème

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe un réel a tel que pour tout réel x : $f(x) = \exp(ax)$
2. Il existe un réel a tel que : $f' = af$
3. Pour tout réels u et v : $f(u + v) = f(u)f(v)$

Remarque : la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$ (obtenue pour $a = 0$) vérifie toutes ces assertions.

Démonstration

L'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2) est déjà établie (théorème 2.1. en choisissant $y_0 = 1$)

Montrons (2) $\Rightarrow$ (3) :

On suppose (2) : il existe un réel a tel que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = af(x)$$

Soit u un réel quelconque fixé. Notons g_u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_u(x) = f(u + x) - f(u)f(x)$$

La fonction g_u est dérivable sur $\mathbb{R}$ (f l'est) et :

$$g'_u(x) = f'(u + x) - f(u)f'(x) = af(u + x) - af(u)f(x) = a\, g_u(x)$$

En outre : $g_u(0) = f(u) - f(u)f(0) = 0$

La fonction g est solution de $\begin{cases} y' = ay \\ y(0) = 0 \end{cases}$. D'après le théorème 2.1., on déduit :

$$g = 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

D'où, pour tout réel x : $\quad f(u+x) = f(u)f(x)$

En particulier pour $x = v$: $\quad f(u+v) = f(u)f(v)$

D'où (3).

<u>Montrons (3) ⇒ (2)</u> :

On suppose (3) : pour tous réels u et x, on a :

$$f(u+x) = f(u)f(x)$$

En dérivant : $\quad f'(u+x) = f(u)f'(x)$

En particulier pour $x = 0$: $\quad f'(u) = f(u)f'(0)$

Notons $a = f'(0)$. Ainsi pour tout réel u : $\quad f'(u) = af(u)$

Autrement dit : $\quad f' = af$

D'où (2).

<u>Remarque</u> : ce théorème reste valable si on remplace $\mathbb{R}$ par un intervalle I (non vide et non réduit à un point)

<u>Résumons l'importance du théorème 3.1</u> :

- Si f est une fonction exponentielle (type $f(x) = \exp(ax)$) alors f transforme les sommes en produits.
- Réciproquement, toute fonction f transformant les sommes en produits est une fonction exponentielle du type $f(x) = \exp(ax)$ où $a \in \mathbb{R}$.

Autrement dit l'ensemble des fonctions qui vérifient le relation fonctionnelle $f(u + v) = f(u)f(v)$ est, ni plus ni moins, que l'ensemble des fonctions du type $x \longmapsto \exp(ax)$ où $a \in \mathbb{R}$.

<u>3.2. Conséquence</u>

La fonction exponentielle transforme les sommes en produits :

Pour tous réels u et v : $\quad \exp(u + v) = \exp(u) \times \exp(v)$

<u>Démonstration</u> :

Il suffit d'appliquer le théorème 3.1. en choisissant $a = 1$.

On peut cependant faire une démonstration plus directe. Il suffit de considérer, pour tout réel u fixé, la fonction g_u définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_u(x) = \frac{\exp(u+x)}{\exp(u)}$$

La fonction g_u est dérivable sur $\mathbb{R}$ (puisque la fonction exponentielle l'est) et pour tout réel x, on a :

$$g_u'(x) = \frac{\exp(u+x)}{\exp(u)} = g_u(x)$$

En outre $g_u(0) = 1$, donc la fonction g_u est solution du problème différentiel $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$, c'est donc la fonction exponentielle. Pour tout réel x, on a donc :

$$\frac{\exp(u+x)}{\exp(u)} = \exp(x)$$

En particulier pour $x = v$, il vient : $\exp(u + v) = \exp(u) \times \exp(v)$

Exercice : à l'aide de la propriété 1.3., démontrer que pour tous réels u et v :

$$\exp(u - v) = \frac{\exp(u)}{\exp(v)}$$

3.3. Théorème

Pour tout réel x, et tout entier relatif n on a : $\exp(nx) = (\exp(x))^n$

Démonstration

Dans un premier temps, on suppose $n \in \mathbb{N}$.

Montrons, par récurrence sur n, la propriété $\wp$ définie par :

$$\wp(n) : \exp(nx) = (\exp(x))^n$$

- Comme $\exp(0) = 1 = (\exp(x))^0$, on a bien $\wp(0)$.
- Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$: $\exp(nx) = (\exp(x))^n$

  On a : $\exp((n + 1)x) = \exp(nx + x)$

  Comme l'exponentielle transforme les sommes en produits :

  $$\exp(nx + x) = \exp(nx)\exp(x)$$

  Et d'après $\wp(n)$: $\exp(nx + x) = (\exp(x))^n \exp(x) = (\exp(x))^{n+1}$

  D'où : $\exp((n + 1)x) = (\exp(x))^{n+1}$

  Ce qui est $\wp(n+1)$.

On a montré $\wp(0)$ et (pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$).

D'après le principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \wp(n)$$

C'est-à-dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp(nx) = (\exp(x))^n$

Supposons maintenant $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. On pose alors $m = -n \in \mathbb{N}$.

D'après ce qui précède, on peut écrire :

$$\exp(nx) = \exp(-mx) = (\exp(x))^{-m} = (\exp(x))^n$$

3.4. Notation ***Nombre* e**

On note **e** le nombre exp(1) : $\mathbf{e} = \exp(1)$

Remarque : d'après la démonstration du théorème 1.1. on a :

$$\mathbf{e} = \lim_{n\to+\infty} u_n(1)$$

C'est-à-dire :

$$\mathbf{e} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

D'après le théorème 3.3., on a alors pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$:

$$\mathbf{e}^n = (\exp(1))^n = \exp(n)$$

Comme l'exponentielle transforme les sommes en produits, on aura, pour tous entiers relatifs m et n :

$$\mathbf{e}^{n+m} = \exp(n+m) = \exp(n)\exp(m) = \mathbf{e}^n\,\mathbf{e}^m$$

3.5. Notation

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $\mathbf{e}^x$ le nombre $\exp(x)$: $\mathbf{e}^x = \exp(x)$

Cette notation est légitime, elle ne fait que prolonger à tous les réels, une propriété constatée sur les entiers.

Avec cette nouvelle notation, résumons les propriétés de l'exponentielle que nous connaissons :

pour tous x et y dans $\mathbb{R}$ et tout n dans $\mathbb{Z}$:

$$\left(\mathbf{e}^x\right)' = \mathbf{e}^x$$

$$\mathbf{e}^0 = 1$$

$$\mathbf{e}^1 = \mathbf{e}$$

$$\mathbf{e}^x\,\mathbf{e}^{-x} = 1$$

$$\mathbf{e}^x > 0$$

$$\mathbf{e}^x\,\mathbf{e}^y = \mathbf{e}^{x+y}$$

$$\mathbf{e}^{x-y} = \mathbf{e}^x\,\mathbf{e}^{-y} = \frac{\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^y}$$

$$\mathbf{e}^{nx} = (\mathbf{e}^x)^n$$