Cours de Mathématiques

TS

Lycée Henri IV

Table des matières

a. Pour un exposé plus complet sur les isométries du plan, on pourra étudier avec intérêt : www.capes-de-maths.com/lecons/lecon42.pdf

Première partie
Les fonctions

1 Généralités

Définition 1.1. *Une relation de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est une* ***fonction*** *si tout réel* x *est relié à au plus un élément* y *de* $\mathbb{R}$ *:* y *est alors noté* $f(x)$*, et l'on écrit :*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Remarque : On parle de la **fonction f** et non de la **fonction f(x)** : en effet $f(x)$ est un réel et non pas une fonction.
L'ensemble des réels x ayant une image par f est appelé **ensemble de définition de** f, souvent noté $\mathcal{D}$ ou $\mathcal{D}_f$.
Si f est définie sur $\mathbb{R}$, f est une **application** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Réciproquement : Etant donné un réel y, s'il existe un réel x tel que $y = f(x)$, x est alors appelé **antécédent** de y par la fonction f.
Exemple de fonction : La fonction partie entière, qui à tout réel x associe le plus grand entier inférieur à x, notée E ou $\lfloor \cdot \rfloor$.

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in [n; n+1[,\ E(x) = n.$$

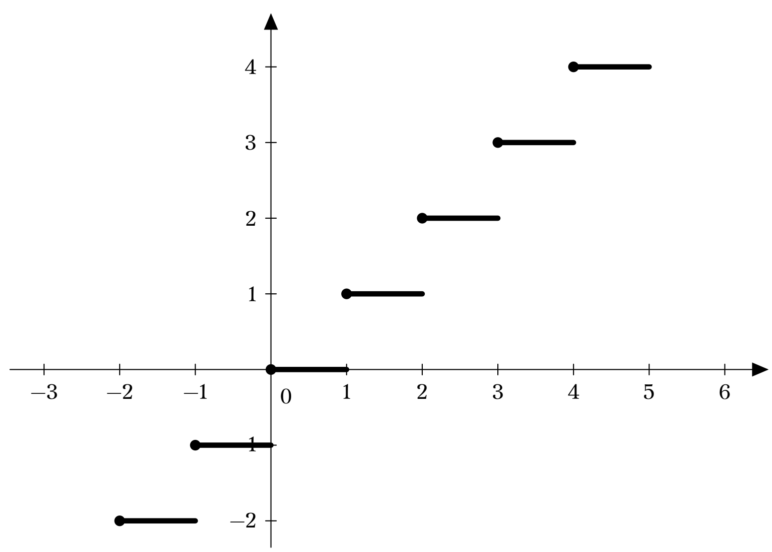
Conséquences :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ E(x) \leqslant x < E(x) + 1.$$

et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ E(x+n) = E(x) + n.$$

Courbe représentative :



1.1 Image d'une partie A

Définition 1.2. *Soit* $A \subset \mathbb{R}$*. On appelle image de* A *par la fonction* f *l'ensemble des réels* $f(x)$ *lorsque* x *décrit* A*.*
On note cet ensemble $f(A)$ *:*

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in A,\ y = f(x).\}$$

Exemple :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \text{et } A = [-1; 4[.$$

Alors $f(A) = [0; 16[$.
Si $A = \mathcal{D}_f$, $f(\mathcal{D}_f)$ est appelé l'image de f et est noté *Im* f. Il s'agit donc de l'ensemble des réels ayant un antécédent par f.

1.2 Image réciproque d'une partie B

Définition 1.3. *Soit* $B \subset \mathbb{R}$*. On appelle image réciproque de* B *par* f *l'ensemble des antécédents par* f *des éléments de* B*. On le note* $f^{-1}(B)$ *:*

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}, /f(x) \in B\}.$$

Exemple
Si $B = \{\alpha\}$, alors $f^{-1}(B) = \{x \in R/f(x) = \alpha\}$ est l'ensemble des antécédents du réel α par f :
Si f est la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\{3\}) = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.
Remarque : la notation $f^{-1}(B)$ ne signifie pas que f est bijective, ni que la fonction f^{-1} existe.

1.3 Egalité de deux fonctions. Comparaisons.

Définition 1.4. *Deux fonctions* f *et* g *sont égales si et seulement si :*
- $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$
- $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = g(x)$.

Définition 1.5. *De même : la relation* $f \leqslant g$ *signifie que :*
- $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$
- $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \leqslant g(x)$.

1.4 Restriction d'une fonction

Définition 1.6. *Soit* A *une partie de l'ensemble de définition* $\mathcal{D}_f$ *d'une fonction* f*. On appelle restriction de* f *à* A *l'application* g *définie sur* A *par :*

$$\forall x \in A,\ g(x) = f(x).$$

g *est notée* $f_{/A}$.

Remarques :
- $f = f_{/A} \Leftrightarrow A = \mathcal{D}_f$.
- La restriction d'une fonction à son ensemble de définition est une application.

1.5 Prolongement d'une fonction

Définition 1.7. *Si une partie* A *de* $\mathbb{R}$ *contient l'ensemble de définition d'une fonction* f*, on appelle prolongement de* f *à* A *toute application* g *définie sur* A *telle que :*

$$g_{/\mathcal{D}_f} = f.$$

Exemple :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2}{|x|} \end{array} \right.$$

f est définie sur $\mathbb{R}^*$.
Tout prolongement g de f à $\mathbb{R}$ est défini par :

$$g : \left\{ \begin{array}{rl} \forall x \in \mathbb{R}^*_-,\ g(x) & = -x \\ \forall x \in \mathbb{R}^*_+,\ g(x) & = x \\ g(0) & = a \end{array} \right. \quad \text{où } a \text{ est un réel quelconque.}$$

Remarque : Si $a = 0$, le prolongement obtenu donne une fonction g continue sur $\mathbb{R}$: la fonction g est appelée prolongement par continuité de f.

1.6 Application injective ou injection

Définition 1.8. *Une fonction* f *est injective si et seulement si tout réel admet* ***au plus*** *un antécédent par* f*, c'est-à-dire : si :*

$$\forall(x;x') \in \mathcal{D}_f^2,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$$

ou bien :

$$\forall(x;x') \in \mathcal{D}_f^2,\ x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$$

Exemple :

La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{cases}$ est injective.

En effet : $\forall(x;x') \in \mathbb{R}^2, : f(x) = f(x') \Leftrightarrow x^3 = x'^3 \Leftrightarrow (x-x')(x^2+xx'+x'^2) = 0$
Or $\forall(x;x') \in \mathbb{R}^2 - \{(0;0)\}$, $x^2+xx'+x'^2 \neq 0$, donc : $\forall(x;x') \in \mathbb{R}^2, : f(x) = f(x') \Leftrightarrow x - x' = 0$.

Contre-exemple : $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$ n'est pas injective car $5 \neq -5$ et $f(5) = f(-5)$.

1.7 Application surjective ou surjection

Définition 1.9. *Une fonction* f *définie sur* $\mathcal{D}_f$ *est surjective de* $\mathcal{D}_f$ *sur un ensemble* B *si tout réel de* B *admet au moins un antécédent par* f*, c'est-à-dire :*

$$\forall y \in B,\ \exists x \in \mathcal{D}_f,\ y = f(x).$$

Exemple :

La fonction $f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{matrix}$ est une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$ car : $\forall y \in \mathbb{R}^+$, $\exists x \in \mathbb{R}, y = x^2$.

Remarque : Une application f est toujours surjective de $\mathcal{D}_f$ sur *Im* f.

1.8 Application bijective ou bijection

Définition 1.10. *Une fonction* f *définie sur* $\mathcal{D}_f$ *est bijective de* $\mathcal{D}_f$ *sur un ensemble* B *si tout réel de* B *possède un unique antécédent par* f*, c'est-à-dire :*

$$\forall y \in B,\ \exists! x \in \mathcal{D}_f, y = f(x).$$

Exemple :

La fonction $f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{matrix}$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ car :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists! x \in \mathbb{R}^+, y = x^2 \text{ avec } x = \sqrt{y}.$$

Théorème 1.1. f *est une bijection de* A *sur* B *si et seulement si* f *est injective et surjective.*

Propriété 1.1. *Si* f *est une application bijective de* A *sur* B*, on peut définir une application de* B *dans* A*, notée* f^{-1}*, appelée application réciproque de* f*, par :*

$$f^{-1} : \begin{matrix} B & \longrightarrow & A \\ y & \longmapsto & f^{-1}(y) = x \text{ avec } y = f(x) \end{matrix}$$

Définition 1.11. *Une application telle que* $f = f^{-1}$ *est appelée application involutive ou involution.*

1.9 Courbe représentative ou graphe d'une fonction

Définition 1.12. *La courbe représentative* $\mathcal{C}$ *ou* $\mathcal{C}_f$ *d'une fonction* f *dans un repère cartésien* $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ *est l'ensemble des points* M *de coordonnées* $(x;f(x))$ *dans ce repère lorsque* x *décrit l'ensemble de définition de* f.

$$\mathcal{C} = \{M(x;f(x))_{(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})} / x \in \mathcal{D}_f\}$$

Proposition 1.1. *:* $\forall M \in \mathcal{C}, \exists x \in \mathcal{D}_f, \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + f(x)\vec{j}$.

Proposition 1.2. *: Si* f *est bijective de* A *vers* B*, le graphe de* f^{-1} *est, dans un repère orthonormé, l'image de la courbe de* f *par la réflexion d'axe la droite d'équation* $y = x$*, appelée première bissectrice.*

Conséquence : le graphe d'une involution est symétrique par rapport à la première bissectrice.
Exemple : graphe de la fonction inverse.

1.10 Changement d'origine

Théorème 1.2. *Soit* $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$ *un repère donné et soit* Ω *le point de coordonnées* $(a; b)$ *dans ce repère (on a donc* $\overrightarrow{O\Omega} = a\vec{i} + b\vec{j}$*).*
Soit $\mathcal{R}' = (\Omega; \vec{i}; \vec{j})$ *un nouveau repère.*
Donnons-nous un point M *dont les coordonnées dans* $\mathcal{R}$ *sont* $(x; y)$ *et dont les coordonnées dans* $\mathcal{R}'$ *sont* $(X; Y)$*.*
Les formules de changement d'origine sont :

$$\begin{cases} x = & X + a \\ y = & Y + b \end{cases}$$

Démonstration . $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ *et* $\overrightarrow{\Omega M} = X\vec{i} + Y\vec{j}$*. Or* $\vec{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ *donc :* $x\vec{i} + y\vec{j} = a\vec{i} + b\vec{j} + X\vec{i} + Y\vec{j}$. $\diamondsuit$

Equation d'une courbe dans les deux repères
Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
$M(x; y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow Y + b = f(X + a) \Leftrightarrow Y = F(X)$ où F est une nouvelle fonction.
$Y = F(X)$ est l'équation de la courbe $\mathcal{C}_f$ dans le repère $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$.
F est la fonction dont le graphe est $\mathcal{C}_f$ dans le repère $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$.

1.11 Domaine d'étude

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.

Définition 1.13.
• f *est paire si et seulement si :*
i) $\forall x \in \mathcal{D}, -x \in \mathcal{D}$ *($\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0).*
ii) $\forall x \in \mathcal{D},\ f(-x) = f(x)$.
$\mathcal{C}_f$ *est invariante par la réflexion d'axe* (Oy) *dans un repère orthogonal.*
On étudie alors f *sur* $\mathcal{D} \cap [0; +\infty[$.
• f *est impaire si et seulement si :*
i) $\forall x \in \mathcal{D}, -x \in \mathcal{D}$ *($\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0).*
ii) $\forall x \in \mathcal{D},\ f(-x) = -f(x)$. $\mathcal{C}_f$ *est globalement invariante par la symétrie de centre* O *quel que soit le repère.*
On étudie alors f *sur* $\mathcal{D} \cap [0; +\infty[$.
• *La droite d'équation* $x = a$ *est un axe de symétrie de la courbe* $\mathcal{C}_f$ *dans un repère orthogonal si et seulement si la fonction* F *définie ci-dessus est paire. Le point* Ω *est un centre de symétrie de* $\mathcal{C}_f$ *si et seulement si la fonction* F *définie ci-dessus est impaire.*
Autre méthode : La droite d'équation $x = a$ *est axe de symétrie de* $\mathcal{C}_f$ *si et seulement si :*

$$\forall x \in \mathcal{D}, 2a - x \in \mathcal{D} \text{ et } \forall x \in \mathcal{D}, f(2a - x) = f(x).$$

Le point $\Omega(a; b)$ *est centre de symétrie de* $\mathcal{C}_f$ *si et seulement si :*

$$\forall x \in \mathcal{D}, 2a - x \in \mathcal{D} \text{ et } \forall x \in \mathcal{D}, f(a - x) + f(a + x) = 2b.$$

• f *est périodique de période* $T \neq 0$ *si et seulement si :*

$$\forall x \in \mathcal{D},\ x + T \in \mathcal{D} \text{ et } x - T \in \mathcal{D},\ \text{ et } \forall x \in \mathcal{D}, f(x + T) = f(x).$$

$\mathcal{C}_f$ *est alors globalement invariante par les translations de vecteur* $kT\vec{i}$*, pour tout* k *de* $\mathbb{Z}$.
Il existe alors une période T *strictement positive :* f *est dite* T*-périodique.*
On étudie alors f *sur* $\mathcal{D} \cap [0; T[$.
On appelle période fondamentale la plus petite période strictement positive.

Exemple : Les fonctions cos et sin ont pour période fondamentale 2π.
Exercice 1. Soit ω et ϕ deux réels donnés. Quelle est la période fondamentale des fonctions $x \mapsto \sin(\omega x + \phi)$ et $x \mapsto \cos(\omega x + \phi)$?

1.12 Changement de base

On note $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un premier repère, et soient $\vec{I} = a\vec{i} + b\vec{j}$ et $\vec{I} = c\vec{i} + d\vec{j}$ deux vecteurs du plan avec (a, b, c, d) un élément de $\mathbb{R}^4$.
Ces deux vecteurs du plan forment une nouvelle base du plan si et seulement si ils ne sont pas colinéaires, ce qui est équivalent au fait que leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, ce qui est équivalent aussi à $ad - bc \neq 0$. Un point M a pour coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et $(X; Y)$ dans le repère $(O; \vec{I}; \vec{I})$.
On a alors :

Théorème 1.3.

$$\begin{cases} x = & aX + cY \\ y = & bX + dY \end{cases}$$

Exemple important :
On suppose que le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est orthonormé direct, et que le repère $(O; \vec{I}; \vec{J})$ est déduit du précédent par la rotation de centre O est d'angle $\theta[2\pi]$.
Dans ce cas : $\vec{I} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$ et $\vec{I} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$.
Equation d'une courbe dans deux repère
Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. $M(x; y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow bX + cY = f(aX + cY)$.
Suivant l'expression de f, il peut ne pas être possible d'exprimer Y en fonction de X.
Exemple : Soit $f : x \mapsto x^2$. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Posons : $\vec{I} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{I} = -\vec{i} + \vec{j}$.
Ces deux nouveaux vecteurs ne sont pas colinéaires, et :

$$M(x; y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = x^2 \Leftrightarrow X + Y = (X - Y)^2 \Leftrightarrow Y^2 - (2X + 1)Y + X^2 - X = 0.$$

La parabole d'équation $y = x^2$ dans le premier repère a pour équation $Y^2 - (2X + 1)Y + X^2 - X = 0$ dans le second. Dans ce cas, elle n'est plus la courbe représentative d'une fonction et correspond à la réunion de courbes de deux fonctions.

1.13 Fonction majorée, minorée, bornée

Définition 1.14. *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}$.
• A *est majorée par le réel* M *si :* $\forall x \in A,\ x \leqslant M$. M *est un majorant de* A.
• A *est minorée par le réel* m *si :* $\forall x \in A,\ m \leqslant x$. m *est un minorant de* A.
Tout réel supérieur à M *est majorant de* A *; tout réel inférieur à* m *est minorant de* A.
• M *est le maximum de* A *si* M *est un majorant de* A *et appartient à* A *: on le note* $\max A$.
• m *est le minimum de* A *si* m *est un minorant de* A *et appartient à* A *: on le note* $\min A$.
Un ensemble majoré n'a pas toujours de maximum.
• *On appelle borne supérieure de* A *le plus petit des majorants de* A*, on le note* $\sup A$.

$$r = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \leqslant r \\ \forall s \in \mathbb{R}, [(\forall x \in A, x \leqslant s) \Longrightarrow r \leqslant s] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \leqslant r \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, r - \varepsilon < x \leqslant r \end{cases}$$

• *On appelle borne inférieure de* A *le plus grand des minorants de* A*, on le note* $\inf A$.

$$r = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \geqslant r \\ \forall s \in \mathbb{R}, [(\forall x \in A, x \geqslant s) \Longrightarrow r \geqslant s] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \geqslant r \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, r \leqslant x < r + \varepsilon \end{cases}$$

Exemple :
Soit $A = \{x \in \mathbb{R}^+ / x^2 < 2\}$. Montrer que A est majorée par $\sqrt{2}$, que $\sqrt{2}$ est la borne supérieure de A mais que A n'a pas de maximum.
Remarque : Si $\max A$ existe, alors $\max A = \sup A$.

Théorème 1.4. • *Toute partie non vide et majorée de* $\mathbb{R}$ *possède une borne supérieure.*
• *Toute partie non vide et minorée de* $\mathbb{R}$ *possède une borne inférieure.*

Définition 1.15. *Soit* f *une fonction définie sur un ensemble* $\mathcal{D}$. *Soit* A *une partie de* $\mathcal{D}$.
• f *est majorée sur* A *si* $\{f(x), x \in A\}$ *est majoré, c'est-à-dire si :* $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, f(x) \leqslant M$.
• f *est minorée sur* A *si* $\{f(x), x \in A\}$ *est minoré, c'est-à-dire si :* $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, f(x) \geqslant m$.
• f *est bornée sur* A *si* $\{f(x), x \in A\}$ *est borné, c'est-à-dire si :* $\exists M \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, m \leqslant f(x) \leqslant M$.
Dans ce cas : $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant k$.
• f *admet un maximum relatif (ou local) en* x_0 *de* $\mathcal{D}$ *s'il existe un voisinage* V *de* x_0*, tel que :* $\forall x \in V,\ f(x) \leqslant f(x_0)$.
• f *admet un minimum relatif (ou local) en* x_0 *de* $\mathcal{D}$ *s'il existe un voisinage* V *de* x_0*, tel que :* $\forall x \in V,\ f(x_0) \leqslant f(x)$.

1.14 Opérations sur les fonctions

Définition 1.16. *Soient* f *et* g *deux fonctions définies sur le même ensemble* $\mathcal{D}$.
Somme *La fonction* $f + g$ *est définie sur* $\mathcal{D}$ *par :* $\forall x \in \mathcal{D},\ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
Produit *La fonction* $f \times g$ *est définie sur* $\mathcal{D}$ *par :* $\forall x \in \mathcal{D},\ (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$.
Produit par un scalaire *Soit* λ *un réel. La fonction* λf *est définie sur* $\mathcal{D}$ *par :* $\forall x \in \mathcal{D},\ (\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$.
Inverse *On appelle zéro d'une fonction* f *tout réel* x *de* $\mathcal{D}$ *tel que* $f(x) = 0$.
Soit A *l'ensemble des zéros de* f. $(A = f^{-1}(0))$.
La fonction $\frac{1}{f}$ *est définie sur* $\mathcal{D} - A$ *par :* $\forall x \in \mathcal{D} - A,\ \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$.
Quotient *La fonction* $\frac{g}{f}$ *est définie sur* $\mathcal{D} - A$ *par :* $\forall x \in \mathcal{D} - A,\ \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$.
Composée ou produit de composition
Soit f *une fonction définie sur* D_f *telle que* g *soit définie sur* $f(D_f)$ *(donc :* $f(D_f) \subset D_g$*).*
On définit la fonction $g \circ f$ *par :* $\forall x \in D_f,\ (g \circ f)(x) = g[f(x)]$.
Le produit de composition n'est pas une opération commutative car en général : $g \circ f \neq f \circ g$.
Par contre, ce produit est associatif :
Si $h \circ (g \circ f)$ *existe, alors :* $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$.

Remarque : Si f est bijective de A sur B, $f^{-1} \circ f = Id_A$ et $f \circ f^{-1} = Id_B$.
f est une involution de A si et seulement si : $f \circ f = Id_A$.

1.15 Exercices

Exercice 2. Montrer qu'un application strictement monotone sur un intervalle I est injective de I dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$, où a, b,c et d sont des réels tels que : • $c \neq 0$
• $ad - bc \neq 0$
est bijective d'un ensemble A sur un ensemble B à déterminer. Expliciter alors $(f_{/A})^{-1}$.

Exercice 4. Soit $f : x \mapsto x^2+4x-3$. Montrer que $f_{/]-\infty;-2]}$ et $f_{/[-2;+\infty[}$ sont des bijections sur des ensembles à définir. Préciser dans chaque cas l'application réciproque de ces restrictions.

Exercice 5. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{|x-1|-3}\cdot$ Déterminer son ensemble de définition et son image.
Même question avec $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin \pi x}\cdot$

Exercice 6. Préciser si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives bijections de A sur B à déterminer.
$f : x \mapsto \sqrt{x+3}$; $\quad g : x \mapsto \sqrt{x^2+2x}$; $\quad h : x \mapsto |x-1|+|x+2|+3x-1\cdot$

Exercice 7. Montrer que la fonction sinus est T-périodique si et seulement si $\cos T = 1$ et $\sin T = 0$.

Exercice 8. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x - E(x)$ est 1-périodique et que l'ensemble de ses périodes est $\mathbb{Z}$.

Exercice 9. On appelle fonction caractéristique d'une partie A de $\mathbb{R}$ l'application χ_A définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in A, \chi_A(x) = & 1 \\ \forall x \notin A, \chi_A(x) = & 0 \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des périodes de la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{Q}$.

Exercice 10. Soit C la courbe d'équation $x^2 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}y - y^2 + \sqrt{3}x + y + 1 = 0$ dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. On considère le repère $(O;\vec{I};\vec{J})$ déduit du premier repère par la rotation de centre O et d'angle $\theta[2\pi]$.

1. Exprimer $\vec{I}$ et $\vec{J}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$, puis les coordonnées $(x;y)$ d'un point M dans le premier repère en fonction des coordonnées $(X;Y)$ du point M dans le second repère.
2. Justifier que l'équation de C dans le second repère est :
$X^2\left(\cos 2\theta - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin 2\theta\right)+Y^2\left(-\cos 2\theta + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin 2\theta\right)+XY\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos 2\theta - 2\sin 2\theta\right)+X(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)+$
$Y(-\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta) + 1 = 0$.
3. En déduire que cette équation peut se mettre sous la forme $aXY + bX + cY + d = 0$ si et seulement si $\tan 2\theta = \sqrt{3}$.
En déduire dans ce cas une valeur de θ et l'équation de C dans le repère $(O,\vec{I},\vec{J})$.
4. Reconnaître C et montrer qu'elle a un centre de symétrie dont on donnera les coordonnées dans le premier repère.

Exercice 11. Soit f et g deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par $f : x \mapsto 2x$ et $g : \begin{cases} x \mapsto \dfrac{x}{2} \text{ si } x \text{ est pair} \\ x \mapsto 0 \text{ si } x \text{ est impair} \end{cases}$

1. f est-elle injective ? est-elle surjective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$?
2. g est-elle injective ? est-elle surjective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$?
3. Déterminer $g \circ f$.
En déduire que $g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$ n'implique pas que f est bijective, ni que $f^{-1} = g$.
4. Montrer que si f est une application de A dans B, g une application de B dans A telles que $g \circ f = Id_A$ et $f \circ g = Id_B$, alors f est bijective de A sur B et $f^{-1} = g$.

Exercice 12. Soit $f : x \mapsto |x-3| + |x+3| - x^2$. Montrer que f est paire, majorée et non minorée.

Exercice 13. Montrer que la courbe d'équation d'équation $y = 9x^5 + 15x^4 + 12x^3 + \dfrac{16}{3}x^2 + \dfrac{38}{9}x + \dfrac{47}{27}$ admet un centre de symétrie.

Exercice 14. Etudier les fonctions suivantes et tracer leur courbe représentative :
$f : x \mapsto (-1)^{E(x)}(x - E(x))$, $g : x \mapsto E(x^2)$ et $f : x \mapsto E\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot$

2 Limite d'une fonction. Continuité

2.1 Limite finie en un point x_0 de $\mathbb{R}$

2.1.1 Définitions

Soit f une fonction définie au moins sur un ensemble $\mathcal{D}$ de la forme $]x_0 - h; x_0 + h[$ ou $]x_0 - h; x_0[$ ou $]x_0 - h; x_0[\cup]x_0; x_0 + h[$ ou $[x_0; x_0 + h[$ ou $]x_0 - h; x_0[$ ou $]x_0; x_0 + h[$ où h est un réel strictement positif.

Définition 2.1. *Un tel ensemble $\mathcal{D}$ est appelé voisinage de x_0.*

Un intervalle I est par conséquent un voisinage du réel x_0 s'i est de la forme : $]x_0 - h; x_0 + h[$ ou $]x_0 - h; x_0[$ ou $[x_0; x_0 + h[$ ou $]x_0 - h; x_0[$ ou $]x_0; x_0 + h[$ où h est un réel strictement positif.

Définition 2.2. *On dit que f a pour limite le réel ℓ en x_0 si $|f(x) - \ell|$ peut être rendu aussi petit que l'on veut lorsque x se rapproche de x_0, c'est-à-dire lorsque $|x - x_0|$ est suffisamment petit. Autrement dit :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}, |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ *ou* $\lim\limits_{x_0} f(x) = \ell$ *ou* $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$

2.1.2 Propriétés

Théorème 2.1. *Les fonctions $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ ont pour limite 0 en 0.*

Proposition 2.1.
1. *Si f a une limite en x_0, cette limite est unique.*
2. *Si $\lim\limits_{x_0} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x_0} |f(x)| = |\ell|$.*

   La réciproque est fausse ! Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|}$. f est définie sur $D = \mathbb{R} - \{1\}$ et $\forall x \in \mathcal{D}$, $|f(x)| = |x + 1|$.

   Donc $\lim\limits_{1} |f| = 2$ mais f n'a pas de limite en 1.
3. *Si f a une limite finie en x_0, f est bornée au voisinage de x_0.*
4. *Si f a une limite finie ℓ **non nulle** en x_0, f garde un signe constant au voisinage de x_0 qui est le signe de ℓ.*

Remarque fondamentale :
Il n'est pas nécessaire que f soit définie en x_0 pour avoir une limite finie en x_0.
Exemple :
$f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x}$: f n'est pas définie en 0 mais $\lim\limits_{0} f = 0$.
Par contre, si f est définie en x_0 et si f possède une limite finie ℓ en x_0, alors nécessairement : $\ell = f(x_0)$.
On dit alors que f est **continue** en x_0.

Théorème 2.2. ***Théorèmes de comparaison***
1. ***Théorème des gendarmes*** *S'il existe deux fonctions g et h de même limite finie ℓ en x_0, et si :*

$$\forall x \in \mathcal{D}, \ g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x),$$

   alors f a une limite finie en x_0 et : $\lim\limits_{x_0} f = \ell$.
2. *Si f et g sont deux fonctions telles que :*

$$\forall x \in \mathcal{D}, \ f(x) < g(x) \qquad \textit{et } \lim_{x_0} f = \ell \qquad \textit{et } \lim_{x_0} g = \ell',$$

   alors $\ell \leqslant \ell'$.

Remarquer qu'il y a affaiblissement des inégalités : l'inégalité concernant les fonction est stricte ; alors que celle concernant les limites est faible.

2.1.3 Exemples de fonctions continues

1. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^+$.
   (a) Si $x_0 = 0$, $\lim\limits_{0} \sqrt{x} = 0 = f(0)$: f est continue en 0.
   (b) Soit $x_0 > 0$. f est définie sur un intervalle I de la forme $]x_0 - h; x_0 + h[$, h étant un réel strictement positif.
   Par exemple, f est définie sur $\left]\dfrac{x_0}{2}; \dfrac{3x_0}{2}\right[$ en ayant posé $h = \dfrac{x_0}{2}$.

$$\forall x \in I,\ |f(x) - f(x_0)| = \frac{|x - x_0|}{\left|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right|} < \frac{|x - x_0|}{\left|\sqrt{x_0}\right|}.$$

Or : $\lim\limits_{x_0} \dfrac{|x - x_0|}{\left|\sqrt{x_0}\right|} = 0$, donc $\lim\limits_{x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0} = f(x_0)$.

2. La fonction $f : x \mapsto \sin x$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

   (a) Soit $x_0 = 0$.

   $$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[,\ 0 \leqslant |\sin x| \leqslant |x|\,.$$

   Donc $\lim\limits_{0} \sin x = 0 = f(0)$: f est continue en 0.

   (b) Soit $x_0 \neq 0$. f est définie sur un intervalle I de la forme $]x_0 - h; x_0 + h[$, h étant un réel strictement positif.

   $$\forall x \in I,\ |f(x) - f(x_0)| = 2\left|\cos \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right|.$$

   Or, $\lim\limits_{x_0} \left|\sin \dfrac{x - x_0}{2}\right| = 0$ car la fonction sinus est continue en 0. Donc : $\lim\limits_{x_0} \sin x = \sin x_0 = f(x_0)$.

3. Une fonction polynôme $f : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, avec $a_n \neq 0$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. f est définie sur un intervalle I de la forme $]x_0 - h; x_0 + h[$, h étant un réel strictement positif fixé.

   $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(x_0)| = |(x - x_0) g(x)|$, où g est une fonction polynôme de degré $n - 1$. Posons par exemple :

   $$g : x \mapsto a_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1.$$

   Il existe deux réels m et M tels que : $\forall x \in I,\ |x| \leqslant m$
   et, via l'inégalité triangulaire :

   $$\forall x \in I, |g(x)| \leqslant |a_n||x^{n-1}| + |b_{n-1}||x^{n-2}| + \cdots + |b_2||x| + |b_1| \leqslant M.$$

   Remarques : $m = max(|x_0 - h|\,; |x_0 + h|)$. Le réel M est fonction de m et des coefficients de g.
   Donc : $\forall x \in I, 0 \leqslant |f(x) - f(x_0)| \leqslant M|x - x_0|$ et par conséquent : $\lim\limits_{x_0} f(x) = f(x)$.

2.1.4 Prolongement par continuité

Définition 2.3. *Si f n'est pas définie en x_0 et si f possède une limite finie ℓ en x_0, on peut alors prolonger f en x_0 en définissant la fonction g par :*

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ g(x) = f(x) \qquad \textit{et} \qquad g(x_0) = \ell.$$

g est continue en x_0 car : $\lim\limits_{x_0} g = \lim\limits_{x_0} f = \ell = g(x_0)$.
g est le prolongement par continuité de f en x_0.

Exemple :
La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ se prolonge par continuité en 0. En effet :
$\forall x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$, donc :
$\forall x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $1 \leqslant \dfrac{x}{\sin x} \leqslant \dfrac{1}{\cos x}$ et par parité : $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $1 \leqslant \dfrac{x}{\sin x} \leqslant \dfrac{1}{\cos x}$.
Par conséquent : $\lim\limits_{0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
Le prolongement par continuité en 0 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad \text{et} \qquad g(0) = 1.$$

2.2 Limite à droite en un point x_0 de $\mathbb{R}$. Limite à gauche en x_0

2.2.1 Définitions

Définition 2.4. *On dit que* f *a pour limite à droite en* x_0 *le nombre réel* ℓ *si la restriction de* f *à* $\mathcal{D}\cap]x_0;+\infty[$ *a pour limite* ℓ *en* x_0.
On note alors $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$ *ou* $\lim\limits_{x_0^+} f(x)=\ell$ *ou* $f(x) \underset{x\to x_0^+}{\longrightarrow} \ell$ *ou* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x)=\ell$.

Remarque importante Si f est définie en x_0, on n'a pas nécessairement $\ell=f(x_0)$.

Définition 2.5. • *Si* f *est définie en* x_0 *et si* $\lim\limits_{x_0^+} f=f(x_0)$, *on dit que* f *est continue à droite de* x_0.

• *Si* f *est définie en* x_0 *et si* $\lim\limits_{x_0^+} f\neq f(x_0)$, *on dit que* f *n'est pas continue à droite de* x_0.

Définition 2.6. *On dit que* f *a pour limite à gauche en* x_0 *le nombre réel* ℓ *si la restriction de* f *à* $\mathcal{D}\cap]-\infty;x_0[$ *a pour limite* ℓ *en* x_0.
On note alors $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\ell$ *ou* $\lim\limits_{x_0^-} f(x)=\ell$ *ou* $f(x) \underset{x\to x_0^-}{\longrightarrow} \ell$ *ou* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x)=\ell$.

Exemple : $f:x\mapsto\lfloor x\rfloor$: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0\neq f(1)$. La fonction partie entière n'est donc pas continue à gauche de 1.

Définition 2.7. • *Si* f *est définie en* x_0 *et si* $\lim\limits_{x_0^-} f=f(x_0)$, *on dit que* f *est continue à gauche de* x_0.

• *Si* f *est définie en* x_0 *et si* $\lim\limits_{x_0^-} f\neq f(x_0)$, *on dit que* f *n'est pas continue à gauche de* x_0.

2.2.2 Prolongement par continuité à gauche ou à droite

Exemple Soit $f:x\mapsto \dfrac{x^2-1}{|x-1|}\cdot$ La fonction f est définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$.

Ecrivons $f(x)$ sans employer les valeurs absolues : $\begin{cases} f(x)=-x-1 \text{ si } x<1 \\ f(x)=x+1 \text{ si } x>1\end{cases}$

$\lim\limits_{1^-} f=-2$ et $\lim\limits_{1^+} f=2$.
Il est donc possible de définir :
• le prolongement par continuité à gauche g_1 de f :
$g_1 : \begin{cases} g_1(x)=-x-1 \text{ si } x<1 \\ g_1(x)=x+1 \text{ si } x>1 \\ g_1(1)=-2\end{cases}$ que l'on peut aussi écrire $g_1 : \begin{cases} g_1(x)=-x-1 \text{ si } x\leqslant 1 \\ g_1(x)=x+1 \text{ si } x>1\end{cases}$
• le prolongement par continuité à droite g_2 de f :
$g_2 : \begin{cases} g_2(x)=-x+1 \text{ si } x<1 \\ g_2(x)=x+1 \text{ si } x>1 \\ g_2(1)=2\end{cases}$ que l'on peut aussi écrire $g_2 : \begin{cases} g_2(x)=-x-1 \text{ si } x<1 \\ g_2(x)=x+1 \text{ si } x\geqslant 1\end{cases}$

Théorème 2.3. *Si* f *n'est pas définie en* x_0 *:*

$$\lim_{x_0} f=\ell \Leftrightarrow \lim_{x_0^-} f=\lim_{x_0^+} f=\ell.$$

Théorème 2.4. *Si* f *est définie en* x_0 *:*
• *si* $\lim\limits_{x_0^+} f\neq\lim\limits_{x_0^-} f$, f *n'a pas de limite en* x_0.
• *si* $\lim\limits_{x_0^+} f=\lim\limits_{x_0^-} f=\ell\neq f(x_0)$, f *n'a pas de limite en* x_0.
• *si* $\lim\limits_{x_0^+} f=\lim\limits_{x_0^-} f,=f(x_0)$, f *a une limite en* x_0 *qui est égale à* $f(x_0)$ *et donc est continue en* x_0.

Définition 2.8. *On dit qu'une fonction* f *est continue sur un intervalle* I *si elle est continue en tout point de* I.

3 Extension de la notion de limite

3.1 Limite finie d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$

3.1.1 Définitions

Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ avec $a > 0$ (resp. sur $]-\infty;b[$ avec $b < 0$).

Définition 3.1. *f a pour limite le réel ℓ en $+\infty$ (resp. vers $-\infty$) si le réel $|f(x)-\ell|$ peut être rendu aussi petit que l'on veut lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$), c'est-à-dire si :*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in]a;+\infty[,\ [x > A \Longrightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon].$$

resp :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in]-\infty;b[,\ [x < -A \Longrightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon].$$

On note alors :
- *Pour les limites en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.*
- *Pour les limites en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \ell$.*

Remarque Nous avons les définitions équivalentes :
f a pour limite le réel ℓ en $+\infty$ (resp. vers $-\infty$) si :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in]a;+\infty[,\ [x > A \Longrightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon].$$

resp :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in]-\infty;b[,\ [x < -A \Longrightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon].$$

Théorème 3.1.
- *Les fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ ont pour limite 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.*
- *La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ a pour limite 0 en $+\infty$.*

Démonstration . *Claire* ♢

3.1.2 Propriétés

Théorème 3.2. ***Théorème de comparaison*** *S'il existe un réel A strictement positif, un réel ℓ et une fonction ϕ de limite nulle en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) tels que :*

$$\forall x \in]a;+\infty[,\ [x > A \Longrightarrow |f(x)-\ell| < \phi(x)]$$

resp :

$$\forall x \in]-\infty;b[,\ [x < -A \Longrightarrow |f(x)-\ell| < \phi(x)]$$

alors f a pour limite ℓ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

Exemple
Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}\cdot$ La fonction sinus n'a pas de limite ni en $+\infty$ ni en $-\infty$ mais :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ |f(x)| \leqslant \frac{1}{|x|}\cdot$$

Ceci permet de conclure que f possède une limite en $+\infty$ ainsi qu'une limite en $-\infty$ avec :

$$\lim_{-\infty} f = 0 \text{ et } \lim_{+\infty} f = 0.$$

Théorème 3.3.

1. *Une fonction croissante et majorée sur $]a;+\infty[$ avec $a > 0$ possède une limite finie en $+\infty$*
2. *Une fonction décroissante et minoré sur $]a;+\infty[$ avec $a > 0$ possède une limite finie en $+\infty$*
3. *Une fonction croissante et minorée sur $]-\infty;b[$ avec $b < 0$ possède une limite finie en $-\infty$*
4. *Une fonction décroissante et majorée sur $]-\infty;b[$ avec $b < 0$ possède une limite finie en $-\infty$*

3.2 Fonction de limite $+\infty$ en x_0, à droite en x_0, à gauche en x_0

Soit f une fonction définie au moins sur un ensemble $\mathcal{D}$ de la forme $]x_0 - h; x_0 + h[$ ou $]x_0 - h; x_0[$ ou $]x_0-h; x_0[\cup]x_0; x_0+h[$ ou $[x_0; x_0+h[$ ou $]x_0-h; x_0[$ ou $]x_0; x_0+h[$ où h est un réel strictement positif, **sauf en** x_0.

Définition 3.2. *1. On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut lorsque $|x - x_0|$ est suffisamment petit, c'est-à-dire si :*

$$\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D},\ [|x - x_0| < \alpha \Longrightarrow f(x) > A]$$

On note alors $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty$.

2. On dit que f admet $+\infty$ pour limite à droite en x_0 (resp. à gauche de x_0) si la restriction de f à $]x_0; +\infty[$ (resp.à $]-\infty; x_0[$) a pour limite $+\infty$ en x_0.
On note alors pour la limite à droite en x_0 :
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim\limits_{x_0^+} f(x) = +\infty$ *ou* $f(x) \underset{x\to x_0^+}{\longrightarrow} +\infty$ *ou* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty$.

3.3 Fonction de limite $-\infty$ en x_0, à droite en x_0, à gauche en x_0

Soit f une fonction définie au moins sur un ensemble $\mathcal{D}$ de la forme $]x_0 - h; x_0 + h[$ ou $]x_0 - h; x_0[$ ou $]x_0-h; x_0[\cup]x_0; x_0+h[$ ou $[x_0; x_0+h[$ ou $]x_0-h; x_0[$ ou $]x_0; x_0+h[$ où h est un réel strictement positif, **sauf en** x_0.

Définition 3.3. *1. On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si $f(x)$ peut être rendu aussi petit que l'on veut lorsque $|x - x_0|$ est suffisamment petit, c'est-à-dire si :*

$$\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D},\ [|x - x_0| < \alpha \Longrightarrow f(x) < -A]$$

On note alors $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} -\infty$.

2. On dit que f admet $-\infty$ pour limite à droite en x_0 (resp. à gauche de x_0) si la restriction de f à $]x_0; +\infty[$ (resp.à $]-\infty; x_0[$) a pour limite ∞ en x_0.
On note alors pour la limite à droite en x_0 :
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ *ou* $\lim\limits_{x_0^+} f(x) = -\infty$ *ou* $f(x) \underset{x\to x_0^+}{\longrightarrow} -\infty$ *ou* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = -\infty$.

et pour la limite à gauche : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ *ou* $\lim\limits_{x_0^-} f(x) = -\infty$ *ou* $f(x) \underset{x\to x_0^-}{\longrightarrow} -\infty$ *ou* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = -\infty$.

Théorème 3.4. *f admet $-\infty$ pour limite à droite en x_0 si et seulement si $-f$ admet $+\infty$ pour limite à droite en x_0.*

3.4 Fonction de limite $+\infty$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$)

Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ avec $a > 0$ (resp. sur $]-\infty; b[$ avec $b < 0$).

Définition 3.4. *On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (resp. en $]-\infty[$) si $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut lorsque x est suffisamment grand (resp. petit), c'es-à-dire si :*

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x > a, [x > B \Longrightarrow f(x) > A]$$

resp :

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x < b, [x < -B \Longrightarrow f(x) > A]$$

Les notations suivent ici aussi le même modèle que précédemment : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$...

Théorème 3.5. *Les fonctions $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.*

3.5 Fonction de limite $-\infty$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$)

Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ avec $a > 0$ (resp. sur $]-\infty;b[$ avec $b < 0$).

Définition 3.5. *On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si $f(x)$ peut être rendu aussi petit que l'on veut lorsque x est suffisamment grand (resp. petit), c'es-à-dire si :*

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x > a, [x > B \Longrightarrow f(x) < -A]$$

resp :

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x < b, [x < -B \Longrightarrow f(x) < -A]$$

Théorème 3.6. *f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$ si et seulement si $-f$ admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$.*

3.6 Propriétés des limites infinies

Théorème 3.7. ***Théorèmes de comparaison***

1. *S'il existe une fonction g telle que :*
   - *il existe un voisinage de x_0 (ou de $-\infty$ ou de $+\infty$) sur lequel on ait : $f > g$ ou $f \geqslant g$*
   - $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$ *(resp.* $\lim\limits_{-\infty} g = +\infty$ *)*

   Alors f a pour limite $+\infty$ en x_0 (ou en $-\infty$ ou en $+\infty$).
2. *S'il existe une fonction g telle que :*
   - *il existe un voisinage de x_0 (ou de $-\infty$ ou de $+\infty$) sur lequel on ait : $f < g$ ou $f \leqslant g$*
   - $\lim\limits_{x_0} g = -\infty$ *(resp.* $\lim\limits_{-\infty} g = -\infty$

   Alors f a pour limite $-\infty$ en x_0 (ou en $-\infty$ ou en $+\infty$).

Théorème 3.8.
1. *Une fonction croissante et non majorée sur $]a;+\infty[$, $a > 0$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.*
2. *Une fonction croissante et non majorée sur $]a;b[$ admet $+\infty$ à gauche en b*
3. *Une fonction décroissante et non minorée sur $]a;+\infty[$, $a > 0$ a pour limite $-\infty$ en $+\infty$*
4. *Une fonction décroissante et non minorée sur $]a;b[$ admet $-\infty$ pour limite à gauche en b*

4 Opérations sur les limites

Les tableaux suivants sont valables pour les limites en x_0, à droite et à gauche en x_0, en $+\infty$ et en $-\infty$.

Somme

lim f	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
lim g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
lim (f+g)	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Produit

lim f	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$\ell = 0$	$\ell = 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
lim g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
lim (fg)	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	?	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Inverse

lim f	$\ell \neq 0$	0 et $f > 0$	0 et $f < 0$
lim $\frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$

Quotient

$\lim f$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\varepsilon\infty$	$\varepsilon\infty$ $\varepsilon \in \{-1;1\}$	$\varepsilon \in \{-1;1\}$
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	0 et $g > 0$ au voisinage de x_0	0 et $g < 0$ au voisinage de x_0	$\pm\infty$	0	0 et $g > 0$	0 et $g < 0$ au voisinage de x_0	au voisinage de x_0
$\lim \dfrac{f}{g}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$	F.I	F.I	$\varepsilon\infty$	$-\varepsilon\infty$	

Deuxième partie
Dérivation

Dans tout ce qui suit, f désigne une fonction définie sur un intervalle I voisinage d'un réel x_0, contenant x_0.

1 Dérivée en un point. Fonction dérivable

1.1 Définitions

1.1.1 Développement limité d'ordre 1

Définition 1.1. *Une fonction f admet un développement limité d'ordre 1 au point x_0 s'il existe un réel A et une fonction ε définie sur I tels que :*

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x), \qquad \textit{avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Ce qui peut s'écrire aussi en posant $x = x_0 + h$:
$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + h\varepsilon(h)$*avec* $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Définition 1.2. *L'application affine $x \mapsto f(x_0) + A(x - x_0)$ est appelée fonction tangente à f en x_0.*

Exemples :
• $f : x \mapsto x^2$ admet un développement limité à l'ordre 1 en 2 , car :
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - f(2) = (x - 2)(x + 2)$ soit : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2) + 2(x - 2) + (x - 2)x$.
Donc ici : $A = 2$ et $\varepsilon : x \mapsto x$. La fonction tangente correspondante est
• Toute fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ possède un développement limité d'ordre 1 en tout point x_0 de $\mathbb{R}$:
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$.
Donc ici : $A = a$ et $\varepsilon : x \mapsto 0$.
• La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ ne possède pas de développement limité à l'ordre 1 en 0.
En effet, nous aurions : $\forall x \in]0; +\infty[, \ \varepsilon(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.
Or $\lim_{x \to 0^+} \varepsilon(x) = \lim_{x \to 0+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, ce qui contredit donc la définition de ε.
Remarque : Exemple d'un développement d'ordre 2
Soit ε la fonction définie par $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, & \varepsilon(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2} - \dfrac{1}{2} \\ & \varepsilon(0) = 0 \end{cases}$
Cette fonction possède une limite nulle en 0 car $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$. Elle est donc continue en 0 et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Cette égalité est le développement limité d'ordre 2 de la fonction cosinus en 0, car l'exposant de $(x - x_0)$ dans le dernier terme est égal à 2.

1.1.2 Fonction différentiable- Nombre dérivé

Définition 1.3. *Une fonction f est différentiable-ou dérivable- en x_0 si et seulement si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ possède une limite finie en x_0.*

Théorème 1.1. *La fonction f est différentiable en x_0 si et seulement si elle y admet un développement limité d'ordre 1.*

Démonstration . *Si f est dérivable en x_0, alors :*

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x), \qquad \textit{avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

soit : $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \varepsilon(x)$ *et donc :* $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$. $\diamondsuit$

1.2 Fonction dérivée

Définition 1.4. *On dit qu'une fonction* f *est dérivable sur un intervalle ouvert* I *si et seulement si elle est dérivable en tout point de* I.
On appelle alors fonction dérivée de f *et on note* f', *l'application de* I *vers* $\mathbb{R}$, *qui à tout réel* x *de* I *associe le nombre dérivé au point* x *:*

$$\begin{aligned} f' : \quad & I \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f'(x) \end{aligned}$$

Notation différentielle : On note aussi : $f' = \dfrac{df}{dx}$.

Définition 1.5. *On dit qu'une fonction* f *est dérivable sur un intervalle* $[a; b]$ *si et seulement si elle est dérivable sur* $]a; b[$*, dérivable à droite au point* a *et dérivable à gauche au point* b.

Exemples
• Toute fonction polynomiale est dérivable sur $\mathbb{R}$.
• Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
• La fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
• La fonction racine carrée est dérivable sur $]0; +\infty[$.
• Une fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

Théorème 1.2. *Toute fonction dérivable continue sur un intervalle* I *y est continue.*

Remarque : La réciproque est fausse ! La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'y est pas dérivable !

2 Dérivée d'une fonction réciproque

Nous admettrons le théorème suivant :

Théorème 2.1. *Soit* f *une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle]a ;b[.*
Sa fonction réciproque f^{-1} *est dérivable en tout point* $y_0 = f(x_0)$ *de* $f <]a; b[>$ *tel que* $f'(x_0) \neq 0$ *et :*

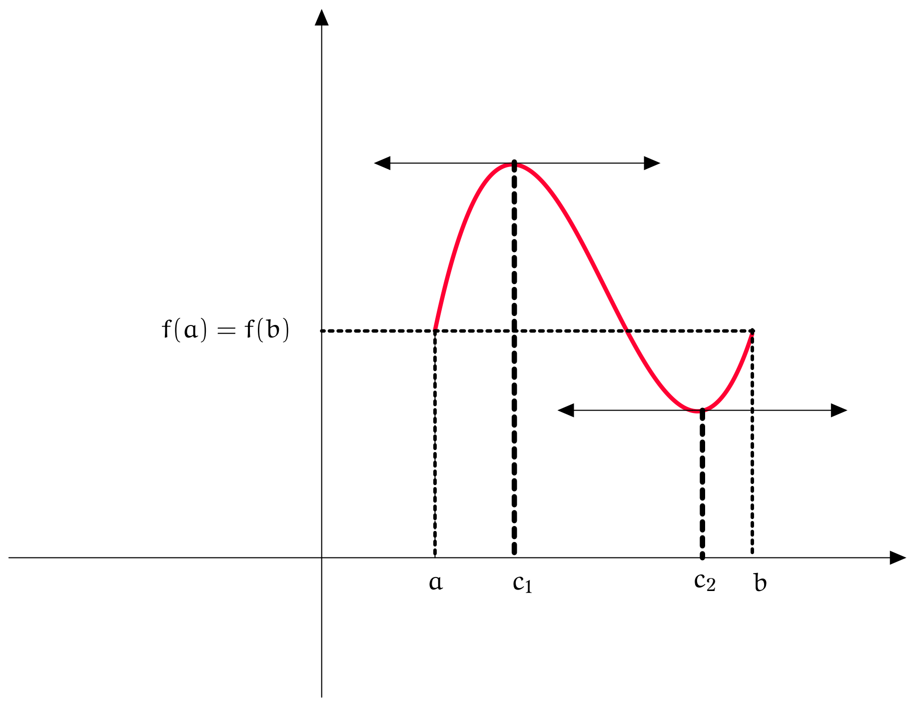
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Remarque Si $f'(x_0) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en y_0 mais la courbe représentative de f^{-1} possède une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(y_0; f^{-1}(y_0)$.
Afin d'étudier l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} il convient donc dans l'ordre :
• De résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
• De déterminer l'image par f des solutions ainsi trouvées.
f^{-1} est alors dérivable sur l'intervalle $f <]a; b[>$ dont on aura exclu les images trouvées ci-dessus.

3 Accroissements finis

3.1 Théorème de Rolle

Théorème 3.1. *Soit f une fonction définie sur intervalle [a ;b] avec a < b, telle que :*
• *continue sur [a ;b] ;*
• *dérivable sur]a ;b[;*
• *f(a)= f(b).*
Alors, il existe un réel c de]a ;b[tel que f(c) =0.



Remarque : Ce théorème assure l'existence mais pas l'unicité d'un tel réel comme le montre la figure ci-dessus.

3.2 Inégalité des accroissements finis

Théorème 3.2. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. S'il existe deux réels m et M tels que $m \leqslant f' \leqslant M$ sur I, alors pour tous réels a et b de I avec $a \leqslant b$:*

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$

Démonstration . *Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = Mx - f(x)$. Alors g est dérivable sur I et pour tout x de I : $g'(x) = M - f'(x)$. La fonction g' est donc positive sur I.*
La fonction g est donc croissante sur I :

$$\forall (a,b) \in I^2, a \leqslant b \Longrightarrow g(a) \leqslant g(b).$$

Ce qui implique :

$$\forall (a,b) \in I^2, a \leqslant b \Longrightarrow Ma - f(a) \leqslant Mb - f(b),$$

et donc finalement :

$$\forall (a,b) \in I^2, a \leqslant b \Longrightarrow f(a) - f(b) \leqslant M(b-a).$$

L'autre inégalité se démontre de même en utilisant la fonction h définie sur I par $h(x) = mx - f(x)$. $\diamondsuit$

Corollaire Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. S'il existe un réel M tel que $|f'| \leqslant M$ sur I, alors :

$$\forall (a,b) \in I^2, |f(a) - f(b)| \leqslant M\,|b-a|\,.$$

Remarquons que l'inégalité est vraie, que $a \leqslant b$ ou $a \geqslant b$.
Exemple

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, |\sin a - \sin b| \leqslant |b-a|\,.$$

3.3 Exercices

Exercice 15. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
On sait seulement que $f(0) = 0$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

1. Dresser le tableau de variation de f. En déduire le signe de f.
2. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant f'(x) \leqslant 1.$$

3. Soit x un réel positif. En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur $[0;x]$, montrer que $0 \leqslant f(x) \leqslant x$.

Exercice 16. Appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[10000;10001]$ et en déduire un majorant de l'erreur commise en remplaçant $\sqrt{10001}$ par 100.

Exercice 17. Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Exercice 18. f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle $[b;+\infty[$ tel que :

$$\exists a > 0, \forall x \geqslant b, f'(x) \geqslant a.$$

1. Montrer que pour tout x de $[b;+\infty[$: $f(x) \geqslant a(x-b) + f(b)$.
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 19. Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{\frac{1}{u_n}}$.

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.
   (a) Déterminer f' et f''.
   (b) Etudier le sens de variation de f.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique L strictement positive. Justifier que $L \in]\frac{3}{2};2[$.
3. (a) Tracer, dans un repère orthonormé, la courbe représentative C de f.
   (b) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite u.
4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [\frac{3}{2};2]$.
   (b) Montrer que : $\forall x \in [\frac{3}{2};2], \frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}} \leqslant f'(x) \leqslant -\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}}$.
   (c) En déduire qu'il existe k dans $]0;1[$, tel que : $\forall x \in [\frac{3}{2};2], |f'(x)| \leqslant k$.
   (d) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $|u_{n+1} - L| \leqslant k\,|u_n - L|$.
   (e) Montrer que la suite u converge vers L.
   (f) Montrer, en utilisant les variations de f, que les réels $|u_{n+1} - L|$ et $|u_n - L|$ sont de signes contraires. En déduire que pour tout n entier naturel, L est compris entre u_n et u_{n+1}.
   En justifiant la méthode utilisée, donner une valeur approchée de L à 10^{-2} près.

3.4 Une application de l'inégalité des accroissements finis : demi-tangentes à une courbe

Théorème 3.3. *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle [a ;b] (a<b) et dérivable sur]a ;b[.*
Si f' admet une limite finie à droite ℓ en a, alors f est dérivable à droite en a et :

$$f'_d(a) = \ell$$

.

Démonstration . *f' admet une limite ℓ à droite de a, donc :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]a;b[, |x-a| < \alpha \Longrightarrow |f'(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Posons alors $b' = \inf(a; b-a)$. f' est alors bornée sur $]a;b'[$ par $\ell - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon$.
Il est donc possible d'appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction f sur tout intervalle $[a,x]$ où x appartient à $]a;b'[$. Ce qui donne :

$$\forall x \in]a;b'[, \ell - \varepsilon < \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \ell + \varepsilon.$$

Au final nous avons donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists b' > 0, \forall x \in]a; b[, |x-a| < b' \Longrightarrow \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell \right| < \varepsilon.$$

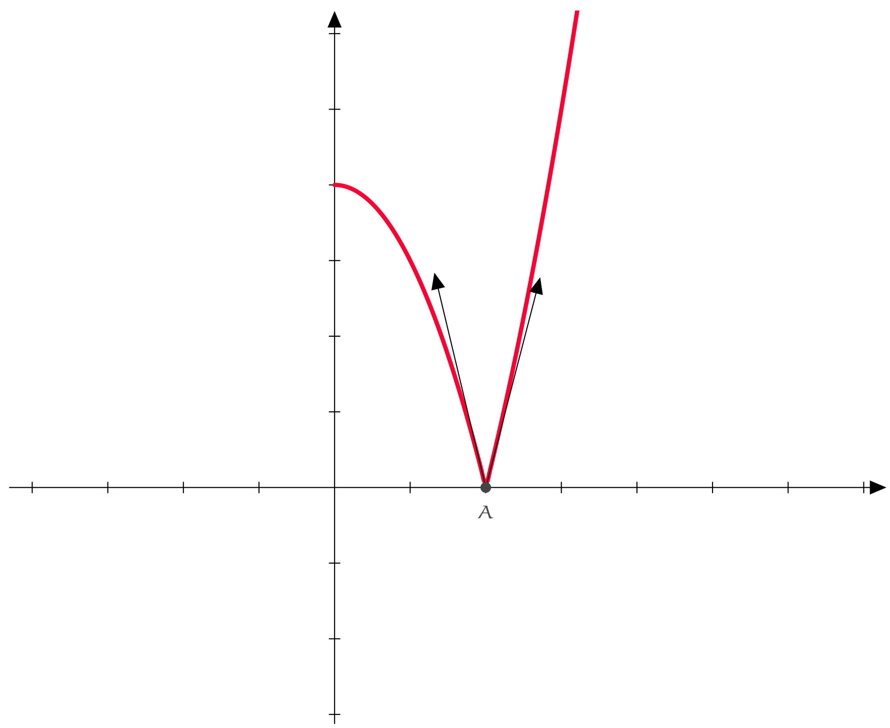
c'est-à-dire :

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell.$$

c'est ce qu'il fallait démontrer. $\diamondsuit$

Exemple f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $x \mapsto \left|x^2-4\right|$.
Nous avons :
- $\forall x \in [0;2]$, $f(x) = 4 - x^2$ et : $\forall x \in [0;2[$, $f'(x) = -2x$. Donc : $\lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = -4$.
- $\forall x \in [2;+\infty[$, $f(x) = x^2 - 4$ et : $\forall x \in [2;+\infty[$, $f'(x) = 2x$. Donc : $\lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = 4$.

La courbe représentative de f admet donc au point $A(2;0)$ une demi-tangente à gauche de coefficient directeur -4 et une demi-tangente à droite de coefficient directeur 4 .
A est un point *anguleux*.



Remarque importante La réciproque fausse, c'est-à-dire que f peut être dérivable en a sans que f' ne possède une limite en a.
Exemple

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

f est continue sur $\mathbb{R}$. Pour s'assurer de sa continuité en 0, qui seule pose problème, nous pouvons remarquer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $|f(x)| \leqslant x^2$, ce qui implique que f a une limite égale à 0 en 0.
D'autre par , f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}.$$

La fonction $x \mapsto 2x \sin \dfrac{1}{x}$ possède une limite nulle en 0, alors que $x \mapsto \sin \dfrac{1}{x}$ n'en possède pas. Par conséquent, f' n'a pas de limite en 0.
Par contre :

$$\left| \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \right| \leqslant |x| \Longrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0.$$

Par conséquent f est dérivable en 0 en $f'(0) = 0$.

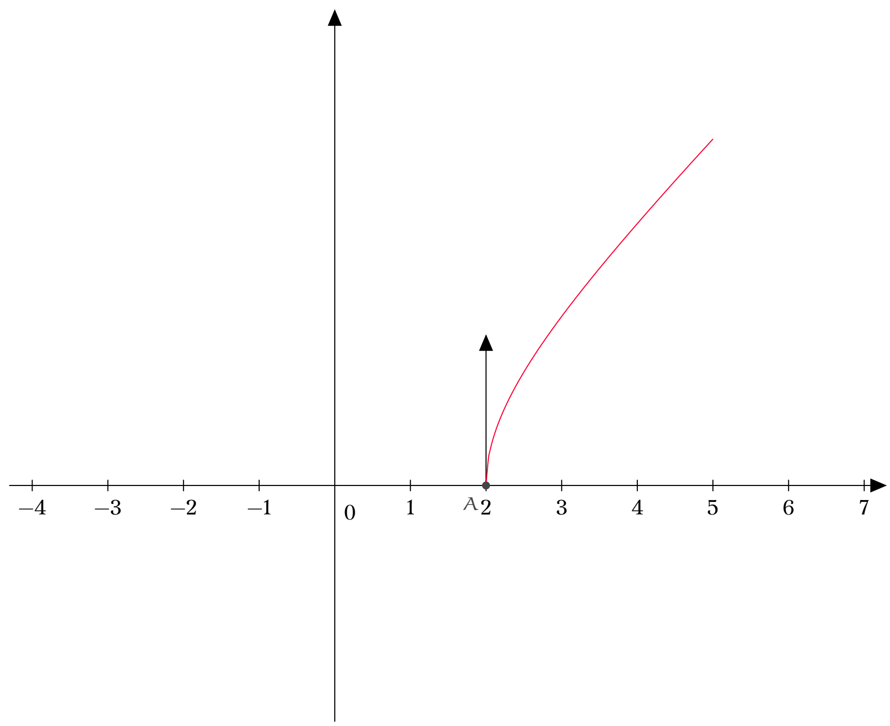
Nous admettrons le théorème suivant, analogue au théorème précédent :

Théorème 3.4. *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle [a ;b] (a<b) et dérivable sur]a ;b[. Si ′ admet une limite infinie à droite en a, alors f est dérivable à droite en a et :*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} f'(x).$$

Interprétation graphique

La courbe représentative de f possède au point $A(a; f(a))$ une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées. En particulier, f n'est pas dérivable au point a.



Troisième partie

Fonctions u^v

1 Présentation

L'objet de cette section est de définir sous forme de questions les fonctions de la forme u^v où u et v désignent deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Nous connaissons déjà les fonctions puissances de la forme $x \mapsto x^n$, n désignant un nombre entier relatif non nul.
En partant de la propriété :

$$\forall a > 0, a = e^{\ln a}$$

et en la généralisant, nous obtenons la définition suivante :

Définition 1.1. ***Soient u et v deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, u étant strictement positive sur I.***
La fonction u^v est définie par :

$$\forall x \in I, (u^v)(x) = u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}.$$

2 Fonctions puissances

Définition 2.1. *Soit α un réel donné. La fonction f_α est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

1. Etude de f_α.
   Suivant les valeurs de α, étudier :
   • la continuité de f_α (est-elle prolongeable par continuité en 0 ?) ;
   • sa dérivabilité (on déterminera l'expression de $f'_\alpha(x)$) ;
   • les variations de f_α ;
   • sa limite en $+\infty$ (on étudiera en particulier les branche infinies). Construire la courbe representative de f_α.
2. Montrer que pour tout α diffférent de 0, f_α admet une fonction réciproque à déterminer.

3 Fonctions exponentielles de base a

Définition 3.1. *a étant un réel strictement positif, on appelle fonction exponentielle de base a, la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = a^x = e^{x \ln a}.$$

1. Faire l'étude complète de f_a sur $\mathbb{R}$ (cf. question 2.2).
2. **Règles de calculs**
   Pour tous a et b réels strictement positifs et pour tous x et y réels, démontrer les égalités suivantes :
   $a^{x+y} = a^x a^y \qquad a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y} \qquad a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} \qquad (a^x)^y = a^{xy} \qquad \dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$
3. Déterminer la limite en $+\infty$ du quotient $\dfrac{a^x}{x^\alpha}$, a étant un réel strictement positif et α étant un réel quelconque.

4 Autres fonctions

Etudier les fonctions suivantes

1. $f : x \mapsto x^x$. Justifier la notation $0^0 = 1$.
2. $f : x \mapsto (\ln x)^x$.

5 Exercices

Exercice 20. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(x+1))^x$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^n}{e^{px}}$, n et p étant des rationnels positifs.

Exercice 21. Soit f la fonction définie par : $f(x)=\left(1-\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Etudier la limite de f en 1.
3. Montrer que $\ln f(x)=\frac{1}{x}(\ln(1+h(x))$, avec :
$$h(x)=\frac{\ln(1+x)}{\ln\frac{1}{x}}.$$
4. Etudier la limite de h en 0. En déduire la limite en 0 de $\ln f(x)$ puis celle de f.

Exercice 22.

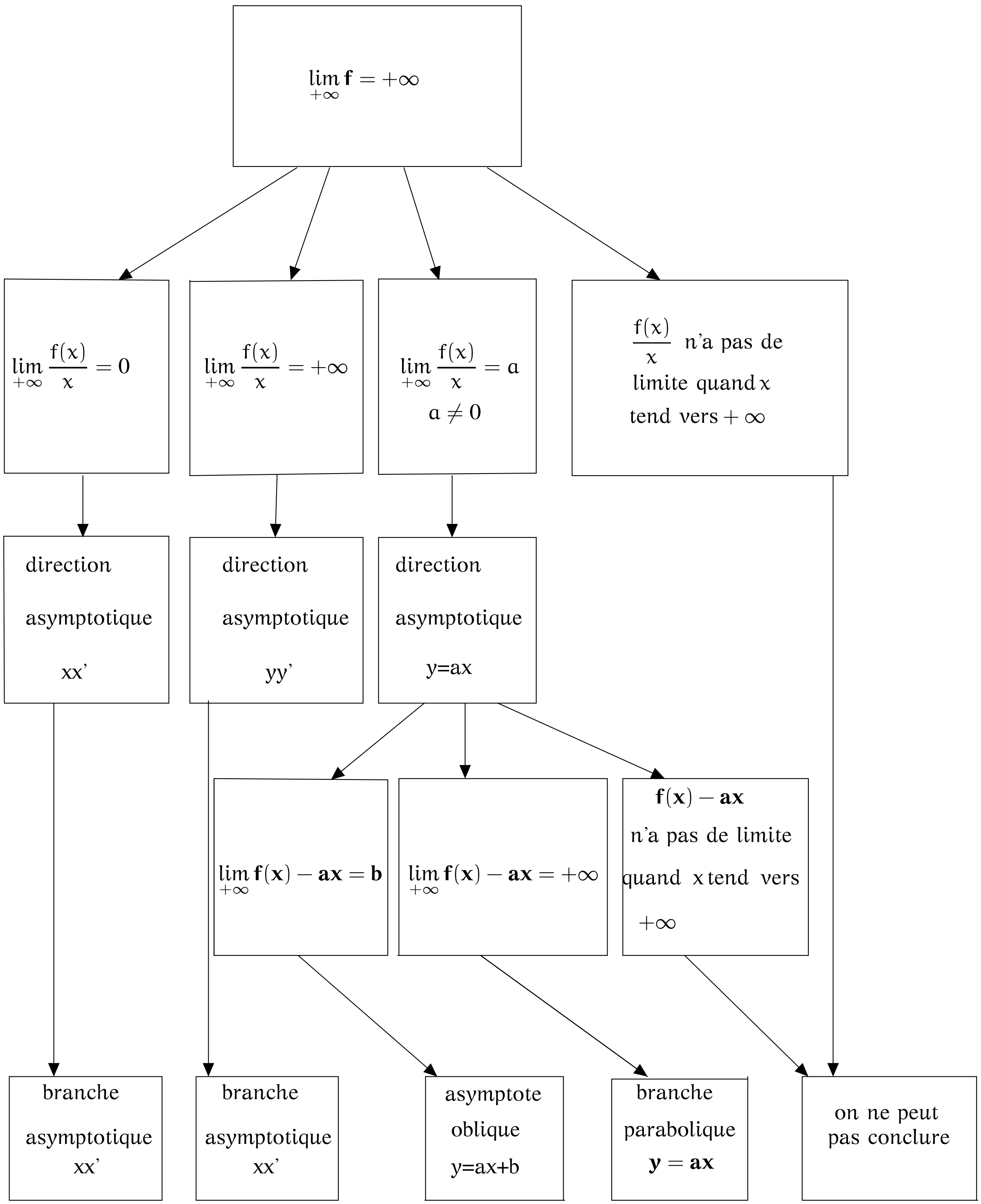
1. Démontrer que, quels que soient les réels positifs a et b, et quel que soit l'entier naturel non nul p :
$$(a-b)=(a^{\frac{1}{p}}-b^{\frac{1}{p}})(\sum_{k=1}^{p}a^{\frac{p-k}{p}}b^{\frac{k-1}{p}}).$$
2. Soit f la fonction définie par :
$$f(x)=x\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{p}}-1\right].$$
Etudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. Soit, pour n entier naturel supérieur à 2, la fonction f_n définie par :
$$f_n(x)=\frac{(\sqrt{\cos x}-1)(\sqrt[3]{\cos x}-1)\dots(\sqrt[n]{\cos x}-1)}{x^{2n-2}}.$$
Donner la limite de cette fonction en 0.

Exercice 23. Soit f la fonction définie par :
$$f(x)=|x|^{\frac{1}{x-1}}.$$

1. Indiquer les intervalles sur lesquels f est continue.
2. Quelle est la limite de f en 0 ?
3. Quelle est la limite de f en 1 ? Soit F le prolongement par continuité de f sur $\mathbb{R}^*$.
4. Quelles sont les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$?
5. Quelle est la dérivée de F ?
6. Etudier les variations de f.
7. Construire la courbe de F dans un repère orthonormé.

Quatrième partie
étude de fonction

1 Etude des branches infinies d'une courbe



2 Exercices

1. $f(x) = x^3+3x-2$; $g(x) = \frac{1}{4}x^4-2x^2+2$. $h(x) = x^2+|x-1|$; $\phi(x) = \sup(-x^3+x^2+5x, 2x^3+x)$.
2. $f(x) = \dfrac{2x-3}{3x+3}$; $g(x) = \dfrac{|x+1|-2x}{|x-1|}$. $h(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{x^2+6x+8}$; $\phi(x) = \left|\dfrac{x^2-2x}{x-1}\right|$.
3. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4x+5}$; $g(x) = \dfrac{-3x+2}{x^2-3x+2}$; $h(x) = x^{\frac{1}{3}} + \dfrac{1}{x}$; $\phi(x) = x+\sqrt{x-1}$.
4. $f(x) = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{\dfrac{1}{x}}$; $g(x) = \sqrt{\dfrac{-x^3}{x+1}}$; $h(x) = \sqrt{\dfrac{x^2(x+1)}{x-1}}$; $\phi(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x+1}$.
5. $f(x) = \sqrt{|2-x|}$; $g(x) = x^2-6x+5$; $h(x) = 2\dfrac{x^2+4}{x+2+\sqrt{x^2+4}}$; $\phi(x) = \dfrac{|x^2+x|+1}{|x|+1}$.
6. $f(x) = (1-x)\sqrt{x+1}$; $g(x) = x\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$; $h(x) = (-1)^{E(x)}(x-E(x))$; $\phi(x) = E(2x)-x$;
7. $f(x) = \dfrac{1}{x-E(x)}$. $g(x) = 2x-1+\sqrt{x-4}$; $h(x) = x+3+\dfrac{1}{2}\sqrt{6x^2+24x}$; $\phi(x) = \dfrac{2x^3}{(2x-1)^3}$.
8. $f(x) = \sqrt{(x+1)^2}+\dfrac{1}{x+2}$; $g(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}$; $h(x) = x+\sqrt{x(2-x)}$; $\phi(x) = \sin x+\sqrt{3}\cos x$.
9. $f(x) = \cos^2 x$. $g(x) = 2\cos 3x+1$; $h(x) = 3\sin 2x+2\cos 3x-3$; $\phi(x) = \dfrac{\cos 3x}{1+\cos 2x}$.
10. $f(x) = \dfrac{\cos 3x}{(\cos x-1)^2}$; $g(x) = \dfrac{\cos^3 x}{(\cos x-1)^2}$; $h(x) = \sqrt{\dfrac{1-2\sin x}{1+2\sin x}}$; $\phi(x) = \dfrac{\cos 2x}{\sin x}$.
11. $f(x) = \sin^2 x-2\cos x$; $g(x) = x-\sin x$; $h(x) = \dfrac{1}{\sin x}$; $\phi(x) = \dfrac{\sin x+\cos x}{\sin 2x}$.
12. $f(x) = \dfrac{4\cos x-3}{2\cos x}$; $g(x) = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{1+\cos x}}$; $h(x) = \cos^2 x+\sin x\cos x$; $\phi(x) = \dfrac{\tan x}{1-2\sin x}$.
13. $f(x) = \tan\dfrac{x}{2}+\sin x$; $g(x) = \tan x+\cos x$.

Exercice 24. Résoudre :

1. $\ln(150-25x-x^2) = 3\ln(5-x)$.
2. $2\ln(3x-5)+\ln(10x-4) = \ln(5x-2)$.
3. $\begin{cases} xy+x+y = 2 \\ \ln(x+1)+\ln(y-1) = 1 \end{cases}$
4. $\ln(150-25x-x^2) = 3\ln(5-x)$.
5. $\sqrt{\ln x} > 2$.
6. $\ln|2x+1| \geqslant 1$.
7. $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -10 \\ \ln x+\ln y = 3 \end{cases}$
8. $\ln(x^2-1) \geqslant \ln(x-2)+\ln(x-3)$.
9. $\begin{cases} x^2+y^2 = 4a^2 \\ \ln x+\ln y = 2\ln 3a-3\ln 2 \end{cases}$
10. $\sqrt{\ln x} > 2$.kk $(\ln x)^4-34(\ln x)^2-225 = 0$.
11. $2(\ln x)^3-3(\ln x)^2-3\ln x+2 = 0$.
12. $(\ln x)^2-(\ln x^2)-3 = 0$.
13. $\begin{cases} 5x+4y = 7 \\ \ln x+\ln y = \ln 3-\ln 5 \end{cases}$
14. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

Exercice 25. Trouver les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sqrt{\dfrac{\ln x-1}{\ln x+1}}$.
2. $x \mapsto \ln(\ln(\ln x)))$.

Exercice 26. Calculer les dérivées des fonctions suivantes après avoir donné leurs ensembles de définition :
$f(x) = x\ln x$; $g(x) = \ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|$; $h(x) = \ln\left|\tan(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4})\right|$.
Quelles primitives peut-on ainsi trouver ?

Exercice 27.
Démontrer :

$$\forall x > 0, \qquad x-\frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x.$$

Exercice 28.
Montrer que pour tout n entier strictement positif :

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1)-\ln n < \frac{1}{n}.$$

Aide : On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis.

En déduire que :

1. La suite u de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ a pour limite $+\infty$.
2. La suite v de terme général$v_n = u_n - \ln n$ est minorée et décroissante. En déduire qu'elle converge vers un réel noté γ.
   Ecrire un algorithme (avec Algobox) et le tester pour conjecturer une valeur approchée de γ à 0,01 près.
   Cette limite est-elle rationnelle? (Bon courage.......)

Exercice 29. Démontrer que $\frac{\ln 2}{\ln 5}$ est irrationnel.

Exercice 30. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \to 0^+} \frac{x \ln x}{\ln(1+ax)}$ $\quad (a \neq 0)$.
2. $\lim_{x \to e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$.

Exercice 31. Etudier la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{\ln|x+1|}$.

Exercice 32. Partie A

1. f est une application dérivable de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$; a est un réel strictement positif donné.
   Soit g_a l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
   $$x \mapsto f(ax) - f(x).$$
   Montrer que g_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée.
2. On se propose de déterminer l'ensemble $\mathfrak{F}$ des applications f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :
   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, f(xy) = f(x) + f(y). \qquad (1)$$
   (a) Vérifier que, pour tout réel k, la fonction k.ln appartient à $\mathfrak{F}$.
   (b) Si f est un élément de $\mathfrak{F}$ montrer que f(1)=0.
   (c) Si f est un élément de $\mathfrak{F}$ que peut-on dire de toute fonction g_a introduite au 1°) ? En déduire que :
   $$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ af'(a) - f'(1) = 0.$$
   (d) Conclure alors que f est une fonction de la forme :
   $$x \mapsto k \ln x.$$
   (k désignant une constante réelle) puis donner $\mathfrak{F}$.

Partie B Soit A l'ensemble des couples de réels (a, α) où a est strictement positifs et α un réel. On définit une opération $\bigstar$ de la façon suivante :

$$(a, \alpha) \bigstar (b, \beta) = (ab, a\beta + b\alpha).$$

1. Montrer que A muni de cette opération est un groupe abélien.
2. f est une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans A, l'application ϕ par : $\phi(a) = (a, f(a))$.
   A quelle condition $\mathfrak{H}$ sur f cette application ϕ définit-elle un morphisme de groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(A, \bigstar)$.
3. (a) f étant de dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifiant $\mathfrak{H}$, soit h l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
   $$\forall x > 0, \qquad h(x) = \frac{f(x)}{x}.$$
   Montrer que h est un élément de $\mathfrak{F}$.
   (b) Montrer que l'ensemble des applications de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$,dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifiant $\mathfrak{H}$ est l'ensemble des applications :
   $$x \mapsto kx \ln x \qquad (k \in \mathbb{R}).$$

Exercice 33. Soient u et v les suites définies par :

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n = \ln u_n.$$

1. Démontrer que la suite u converge et déterminer sa limite.
2. En déduire que u converge. Quelle est sa limite ?

Exercice 34. Soit a et b deux réels tels que 0<a<b.
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(ax+1)}{\ln(bx+1)}.$$

1. Trouver l'ensemble de définition de f.
2. Calculer f'(x).
3. On pose :
$$g(x) = a(bx+1)\ln(bx+1) - b(ax+1)\ln(ax+1).$$
Calculer g'(x) et en déduire le sens de variations de f.
4. Démontrer que : $\ln\left(\frac{a}{b}+1\right)\ln\left(\frac{b}{a}+1\right) < (\ln 2)^2$.

Exercice 35. Démontrer que pour tout entier n supérieur à 8 :

$$n^{\sqrt{n+1}} > (n+1)^{\sqrt{n}}$$

Exercice 36. Déterminer la limite et le plus grand terme de la suite u définie par : $u_n = \sqrt[n]{n}$.

Exercice 37. [83] Soit $f_a : x \mapsto \ln(x^2 + a)$ où a est un réel donné.

1. Déterminer, suivant les valeurs de a l'ensemble de définition de f_a ainsi que les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition.
2. Etudier suivant les valeurs de a les variations de f_a sans utiliser la dérivée de cette dernière. Dresser les différents tableaux de variation de f_a suivant les valeurs de a.
3. Montrer que pour tout x positif, $f_a(x) = \ln x^2 + \ln\left(1+\frac{a}{x^2}\right)$.
En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_a}{x}$.

Exercice 38. [Bac C-Lyon 1973]
Résoudre le système :
$$\begin{cases} 2\log_x + 2\log_y & = & -5 \\ xy & = & e \end{cases}$$

Exercice 39. [85 suite]
Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{\frac{1}{u_n}}$.

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.
   (a) Déterminer f' et f".
   (b) Etudier le sens de variation de f.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique L strictement positive. Justifier que $L \in]\frac{3}{2};2[$.
3. (a) Tracer, dans un repère orthonormé, la courbe représentative C de f.
   (b) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite u.
4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [\frac{3}{2};2]$.
   (b) Montrer que : $\forall x \in [\frac{3}{2};2], -\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}} \leqslant f'(x) \leqslant -\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}}$.
   (c) En déduire qu'il existe k dans]0;1[, tel que : $\forall x \in [\frac{3}{2};2], |f'(x)| \leqslant k$.
   (d) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $|u_{n+1} - L| \leqslant k\,|u_n - L|$.
   (e) Montrer que la suite u converge vers L.
   (f) Montrer, en utilisant les variations de f, que les réels $u_{n+1} - L$ et $u_n - L$ sont de signes contraires.
   En déduire que pour tout n entier naturel, L est compris entre u_n et u_{n+1}.
   En justifiant la méthode utilisée, donner une valeur approchée de L à 10^{-2} près.

Exercice 40. [85 INTEGRALE Somme riemann SUITE]

1. Calculer $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

2. n étant un entier naturel non nul, on pose : $S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}e^{-\frac{k}{n}}$. Montrer que S(n) a une limite lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$. Préciser cette limite.

Exercice 41. [dijon sept 1979]

1. (a) Etudier les variations de la fonction f de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$f : x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}e^x$$
Construire sa courbe dans un repère orthonormé.
   (b) Déduire de l'étude précédente, suivant les valeurs du paramètre réel a, le nombre de racines réelles de l'équation :
$$1 - axe^{-x} = 0.$$

2. On se propose d'étudier la famille de fonctions g_m de la variable réelle x, définies sur $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$g_m : x \mapsto g_m(x) = x^m e^{-x}.$$
où m désigne un paramètre réel strictement positif.
Le plan est muni d'un repère orthonormé (on prendra 5 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée).
   (a) Etudier la limite de g_m en 0.
   (b) Soit la famille de fonctions f_m de $[0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définies par :
   $f_m(x) = g_m(x)$ si $x>0$ et $f_m(0) = 0$.
   On désigne par C_m la courbe représentatitve de f_m. Montrer que les fonction f_m sont continues en 0.
   (c) Calculer la limite de f_m en $+\infty$. En déduire que les courbes C_m possèdent une asymptote commune.
   (d) Etudier les variations de f_m.
   (e) En considérant la définition de la dérivée à droite, étudier la tangente à C_m en 0 (on sera amené à distinguer les cas suivants : $0<m<1$, $m=1$ et $m>1$).
   (f) Etudier les cas particulier m=1; m=0,5 et m=2. Tracer les courbes correspondantes. Montrer que toutes les courbes C_m passent par un point fixe autre que l'origine.

Exercice 42. [Bac C et E, Amiens 1982]

1. Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}*, \qquad \phi(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} + 1.$$
Déduire de l'étude des variations de ϕ dans $\mathbb{R}^*$, celle du signe de $\phi(x)$ dans $\mathbb{R}^*$.

2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}. \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
   (a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
   (b) Déterminer le tableau de variations complet de f dans $\mathbb{R}$.
   (c) Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
   Etudier la limite de $f(x) - \frac{x}{2}$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$.
   Montrer que C admet une asymptote et construire C.
   Montrer que C se trouve tout entière au-dessus de son asymptote.

Exercice 43. [Bac C, Caen, 1982, partiel]
Soit λ un réel non nul, on considère la fonction f_λ, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_\lambda(x) = x + \lambda(x+1)e^{-x}.$$

On désigne par C_λ la courbe représentative de la fonction f_λ dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer f'_λet f''_λ les dérivées première et seconde de f_λ.
2. Discuter, suivant le réel λ, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x :

$$f'_\lambda(x) = 0.$$

   Préciser la position de ces solutions par rapport à 0 et 1 (on distinguera les 4 cas : λ<0, 0<λ<e, λ=e, λ>0).
3. Déduire de ce qui précède, le sens de variations de f_λ suivant les valeurs du réel λ.
4. Etudier les limites de f_λ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   Préciser les branches infinies de la C_λ.
5. Montrer qu'il existe un unique point commun A à toutes les courbes C_λ.
6. Soit I_λ le point de C_λ dont l'abscisse est 1. Ecrire une équation de la tangente D_λà C_λ au point I_λ.
   Montrer que les droites D_λ ont un point commun B.
7. On se propose de construire avec précision les courbes C_{-1}, C_e, C_4.
   Les courbes seront tracées sur une même figure sur papier millimétré en prenant 2 cm comme unité.
   (a) On prend $\lambda = -1$. Montrer que l'équation d'inconnue x, $f'_{-1}(x) = 0$ n'a qu'une seule solution notée x_1 comprise entre - 0,57 et - 0,56.
   Construire la courbe C_{-1}.
   (b) Construire la courbe C_e.
   (c) Montrer que l'équation d'inconnue x, $f'_4(x) = 0$ a deux solutions : x_1, comprise entre 0,35 et 0,36 et x_2 comprise entre 2,15 et 2,16.
   Tracer C_4.

Cinquième partie

Intégration

Sauf mention contraire, (a, b) désigne un couple de réels tels que $a < b$. Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1 Intégration des fonctions en escalier sur un segment $[a; b]$

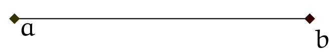
1.1 Fonctions en escalier sur un segment $[a; b]$

Définition 1.1. *Soit* $[a; b]$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$. *On appelle subdivision de* $[a; b]$ *toute famille finie de réels* $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ *telle que :*

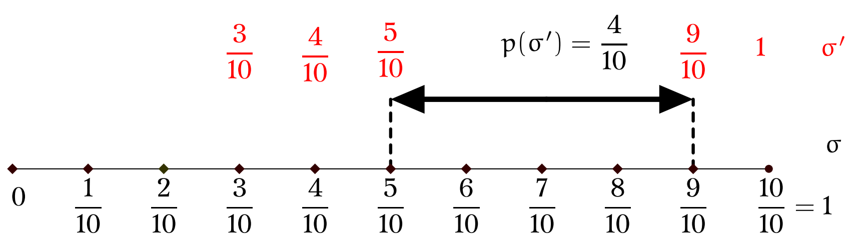
$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b.$$

Les réels $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ sont appelés les points de la subdivision σ.
Le segment $[a; b]$ est ainsi découpé en n intervalles $[a; a_1]$, $[a_1; a_2], \cdots, [a_{n-1}; b]$.
Exemple :
• $\sigma = (a, b)$ est une subdivision de $[a, b]$.

•$\sigma = (a, b)$ est une subdivision de $[a; b]$.



• $[a; b] = [0; 1]$:



$\sigma = \left(0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}, \frac{9}{10}, 1\right)$: σ est une *subdivision à pas constant* égal à $\frac{1}{10}$.
$\sigma' = \left(0, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{9}{10}, 1\right)$
σ' est une subdivision dont le pas $p(\sigma')$ est défini par $p(\sigma') = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} (a_{i+1} - a_i)$.

Ici : $p(\sigma') = \frac{4}{10}$.
σ et σ' sont deux subdivisions du même segment. Tous les points de σ' sont des points de σ : la subdivision σ est dite *plus fine* que σ'.
• Toute subdivision de $[a; b]$ à pas constant est de la forme $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ avec :

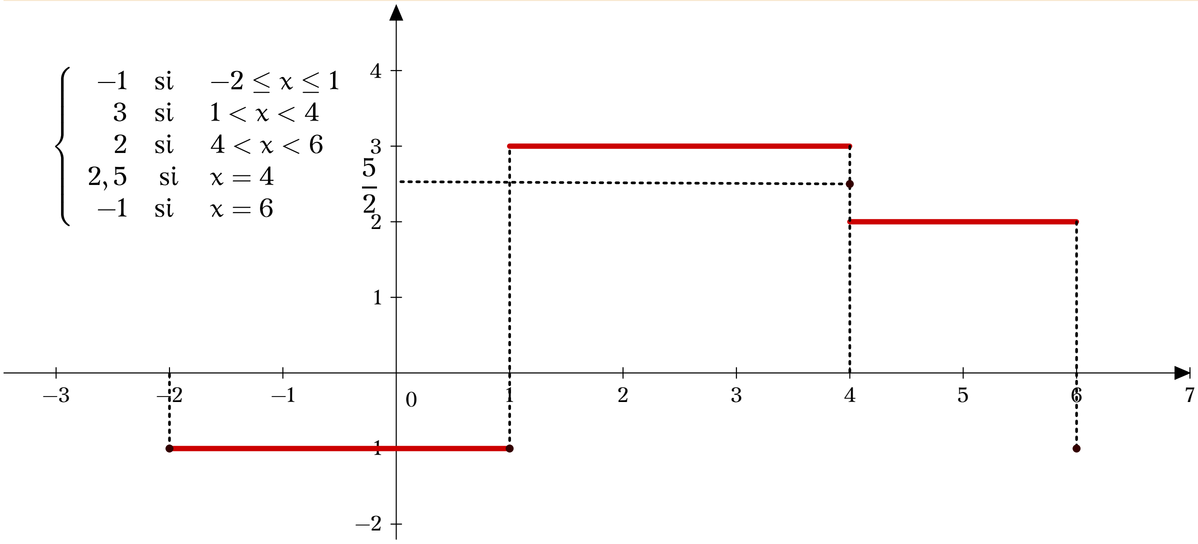
$$\forall i \in [\![0; n]\!],\ a_i = a + i\frac{b-a}{n}.$$

Définition 1.2. *Une fonction* $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite en escalier si et seulement s'il existe une subdivision* $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ *telle que pour tout* i *de* $[\![0; n-1]\!]$, f *restreinte à* $]a_i; a_{i+1}[$ *est constante :*

$$\forall i \in [\![0; n-1]\!], \exists c_i \in \mathbb{R},\ \forall x \in]a_i; a_{i+1}[, f(x) = c_i.$$

Définition 1.3. *Une telle division σ est dite **adaptée** à f.*

$$\begin{cases} -1 & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 1 \\ 3 & \text{si} \quad 1 < x < 4 \\ 2 & \text{si} \quad 4 < x < 6 \\ 2,5 & \text{si} \quad x = 4 \\ -1 & \text{si} \quad x = 6 \end{cases}$$



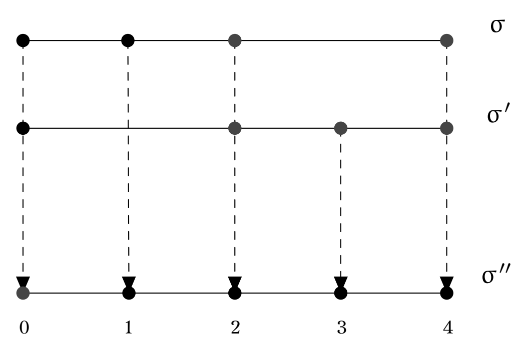
Dans cet exemple, il est possible de prendre $\sigma = (-2, 1, 4, 6)$. Dans ce cas : $n = 3$, $c_0 = -1\, c_1 = 3$, $c_2 = 2$.
Bien entendu, toute subdivision de $[-2, 6]$ plus fine que σ est aussi adaptée à f (par exemple : $\sigma' = (-2, 1, 2, 3, 4, 6)$).
Par contre, la subdivision $\sigma = (-2, 0, 4, 6)$ n'est pas adaptée car f n'est pas constante sur l'intervalle $]0\,;4[$.

1.1.1 Propriétés

Propriété 1.1. *Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions en escalier sur un segment $[a; b]$ donné. Alors :*
• $\mathbb{1}_{[a;b]} : x \mapsto 1$ *appartient à* $\mathcal{E}$.
• $\forall (f, g) \in \mathcal{E}^2, \begin{cases} f + g & \in & \mathcal{E} \\ fg & \in & \mathcal{E} \end{cases}$
• $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{E}, \lambda f \in \mathcal{E}$.
• $\forall f \in \mathcal{E}, |f| \in \mathcal{E}$.

Démonstration . *:*
• *Il suffit de prendre la subdivision $\sigma = (a, b)$.*
• *Soient $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ et $\sigma' = (\alpha_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}$ deux subdivisions adaptées respectivement à f et g. Nous allons construire une subdivision $\sigma' = (\beta_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ adaptée à $f + g$ et à fg.*
Par définition, il est nécessaire de poser : $\beta_0 = a_0 = \alpha_0 = a$.
Ensuite il est possible d'ordonner par ordre strictement croissant les valeurs des points des deux subdivisions σ et σ'. Cette nouvelle suite de points est finie et permet de définir une nouvelle subdivision σ''adaptée à f et g, et plus fine que σ et σ'.
Exemple :

$$\begin{aligned}]\beta_0; \beta_1[&=]0; 1[\\ ]\beta_1; \beta_2[&=]1; 2[\\ ]\beta_2; \beta_3[&=]2; 3[\\ ]\beta_3; \beta_4[&=]3; 4[\end{aligned}$$



Si $\sigma = (0, 1, 2, 4)$ et $\sigma' = (0, 2, 3, 4)$, alors $\sigma'' = (0, 1, 2, 3, 4)$.

f et g étant constantes sur les intervalles $]\beta_i;\beta_{i+1}[$, où i appartient à $[\![0;p-1]\!]$, il en est de même pour les fonctions $f+g$ et fg qui sont donc des éléments de $\mathcal{E}$.
•*Toute subdivision $\sigma=(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ adaptée pour f l'est aussi pour λf :*

$$\forall i\in[\![0;n-1]\!], \exists\, c_i\in\mathbb{R},\ \forall x\in]a_i;a_{i+1}[, \lambda f(x)=\lambda c_i.$$

• *Toute subdivision $\sigma=(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ adaptée pour f l'est aussi pour $|f|$:*
$\forall i\in[\![0;n-1]\!], \exists\, k_i\in\mathbb{R}^+,\ \forall x\in]a_i;a_{i+1}[, |f(x)|=k_i$. $\diamondsuit$

Propriété 1.2. *Si f est un élément de $\mathcal{E}$ et si $[\alpha;\beta]$ est inclus dans $[a;b]$, alors f est une fonction en escalier sur $[\alpha;\beta]$.*

Démonstration . *Soit $\sigma=(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision adaptée à f sur $[a;b]$.*
Il faut construire une subdivision σ' adaptée à f sur $[\alpha;\beta]$. Il existe une famille finie, éventuellement vide [a] $(a_i)_{p\leqslant i\leqslant q}$ de points de σ, telle que :

$$\alpha\leqslant a_p<\cdots<a_q\leqslant\beta.$$

La subdivision $\sigma'=(\alpha,a_p,\cdots,\beta)$ convient. $\diamondsuit$

Remarque Une fonction en escalier sur $[a;b]$ y possède un nombre fini de points de discontinuité, lesquels appartiennent à l'ensemble des points communs à toute subdivision adaptée à f.
De plus, f n'en possède aucun si et seulement si elle est constante sur $[a;b]$.

1.2 Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment $[a;b]$

1.2.1 Définitions et exemples

Définition 1.4. *Soit f une fonction en escalier sur $[a;b]$ et soit une subdivision $\sigma=(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ adaptée à f telle que :*

$$\forall i\in[\![0;n-1]\!],\ \forall x\in]a_i;a_{i+1}[, f(x)=c_i.$$

• *Le réel $I(f)=\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)c_i$ est appelé intégrale de f sur $[a;b]$ et est noté : $\mathbf{I(f)}=\int_a^b \mathbf{f(x)dx}$,*
*qui se lit : **" somme de a à b de $f(x)dx$" ou " intégrale de a à b de $f(x)dx$".***
• *a est la borne inférieure de l'intégrale et b est la borne supérieure de l'intégrale.*

Remarques
• x est une variable muette : elle peut être remplacée par tout autre lettre. Ainsi :

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du=\cdots$$

• $I(f)$ ne dépend pas des valeurs prises par f en ses points éventuels de discontinuité.
Exemples à connaître :
• Si f est une fonction nulle sur $[a;b]$ sauf en un nombre fini de points $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $[a;b]$ en lesquels elle des valeurs quelconques, alors :

$$\int_a^b f(x)dx=0.$$

• Si f est constante égale à k sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx=k(b-a)$.

• $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{si} & -2\leq x\leq 1\\ 3 & \text{si} & 1<x<4\\ 2 & \text{si} & 4<x<6\\ 2,5 & \text{si} & x=4\\ -1 & \text{si} & x=6\end{cases}$ $\quad\int_a^b f(x)dx=-1\times(1-(-2))+3\times(4-1)+2\times(6-4)=10.$

Démonstration . *: laissée en exercice.* $\diamondsuit$

a. Ce qui se produit lorsque α et β sont compris entre deux points consécutifs de σ : $\sigma'=[\alpha;\beta]$ convient.

Interprétation graphique
► Cas d'une fonction positive sur $[a;b]$.
Dans ce cas : $\forall i \in [\![0; n-1]\!], c_i \geqslant 0$.
De la définition de l'intégrale, il vient alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

Propriété 1.3. *L'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *est égale à l'aire du domaine* $(\mathfrak{D})$ *compris entre la courbe représentative de* f*, l'axe* $x'Ox$*, et les droites d'équations* $x = a$ *et* $x = b$.
Cette aire est exprimée en unité d'aire (souvent notée u.a) correspondant à l'aire du rectangle formé par les points O, I, J *et* K *de cordonnées* $(1;1)$.

Démonstration . *:* $\mathfrak{D}$ *est la réunion de* n *rectangles d'aires* $(a_{i+1} - a_i)c_i$. ♢

► Cas d'une fonction négative sur $[a;b]$. Dans ce cas : $\forall i \in [\![0; n-1]\!], c_i \leqslant 0$.
Ceci entraine que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est un réel négatif. Cette intégrale correspond à l'*aire algébrique* limitée par la courbe représentative de f, l'axe $x'Ox$, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
► Cas d'une fonction de signe quelconque sur $[a;b]$.
L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est égale à la somme des aires algébriques (positives ou négatives) des rectangles $(R_i)_{(1\leqslant i\leqslant n)}$.

Définition 1.5. *Soit* f *une fonction en escalier sur* $[a, b]$*. Par définition :*
i) $\displaystyle\int_a^a \mathbf{f(x)dx} = 0$.
ii) $\displaystyle\int_b^a \mathbf{f(x)dx} = -\int_a^b \mathbf{f(x)dx}$.

1.2.2 Propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier

Rappel : $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des fonctions en escalier sur un segment $[a;b]$ donné.

Propriété 1.4. *L'application :* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(x)dx \end{array}\right.$ *est linéaire, c'est-à-dire :*

- $\forall (f, g) \in \mathcal{E}^2$, $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)$.
- $\forall f \in \mathcal{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$.

Démonstration . *:*
• *Il existe une subdivision* $\sigma = (\alpha_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ *adaptée simultanément à* f, g *et à* $f + g$ *telle que :*

$$\forall i \in [\![0; n-1]\!], \exists\, (\gamma_i, \delta_i) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in]\alpha_i; \alpha_{i+1}[,\ f(x) = \gamma_i \textit{ et } g(x) = \delta_i.$$

σ *est adaptée à* $f + g$ *donc :*

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b (f+g)(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i)(\gamma_i + \delta_i)$$

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i)\gamma_i}_{I_1} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i)\delta_i}_{I_2}$$

Mais σ *est adaptée à* f*, donc* $I_1 = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$*, et* σ *est adaptée à* g*, donc* $I_2 = \displaystyle\int_a^b g(x)dx$.
• *Soit* $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ *adaptée à* f*. Elle l'est aussi pour* λf *:*

$$\forall i \in [\![0; n-1]\!],\ \exists\, c_i \in \mathbb{R},\ \forall x \in]a_i; a_{i+1}[,\ \lambda f(x) = \lambda c_i.$$

Ainsi : $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\lambda c_i = \lambda\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)c_i = \lambda\int_a^b f(x)dx$ ♢

Propriété 1.5. ***Propriété* : Relation de Chasles**

Soit f *un élément de* $\mathcal{E}$. *Pour tout réel* c *de* $[a;b]$ *:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Démonstration . *:*
Si c *est égal à* a *ou* b, *l'égalité est triviale.*
Si $c \in]a;b[$
Lemme *: Il est possible de construire une subdivision* $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ *adaptée à* f *sur* $[a;b]$ *contenant* c, *c'est-à-dire telle que :*

$$\exists k \in [\![0;n]\!], c = a_k.$$

Démonstration . *: laissée en exercice.* ♢

Les points $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ *(resp.*$(a_i)_{k\leqslant i\leqslant n}$*), forment une subdivision adaptée à* f *sur* $[a;c]$ *(resp. sur* $[c;b]$*). La suite de la démonstration est laissée en exercice.* ♢

Propriété 1.6. ***Croissance de l'intégrale***
Soient f *et* g *deux élément de* $\mathcal{E}$. *Soient* a *et* b *deux réels tels que* $a \leqslant b$.

- *Si* $\forall x \in [a;b], f(x) \geqslant 0$, *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.
- *Si* $\forall x \in [a;b], f(x) \leqslant g(x)$, *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)$.

Remarque importante : La condition $a \leqslant b$ est essentielle pour appliquer ces propriétés.

Démonstration . *:*
• *Ce point a été vu lors de l'interprétation graphique de l'intégrale.*
• *La fonction* $\phi = g - f$ *appartient à* $\mathcal{E}$ *et est positive sur* $[a;b]$.*Par linéarité de l'intégrale :*
$\displaystyle\int_a^b \phi(x)dx \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \geqslant \int_a^b f(x)dx$. ♢

Propriété 1.7. ***intégrale et valeur absolue***
Pour toute fonction f *de* $\mathcal{E}$ *(avec* $a \leqslant b$*),*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Démonstration . *Par propriété de la valeur absolue :*

$$-|f| \leqslant f \leqslant |f|$$

La croissance de l'intégrale, avec $a \leqslant b$ *permet ainsi d'écrire :*

$$-\int_a^b |f(x)|\, dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Ce qui revient à[a] *:* $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx$.

Corollaire *: Si* $|f|$ *est majorée par* M *sur* $[a;b]$, *alors :* $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\, dx \leq (b-a)M$. ♢

a. Vous aurez remarqué qu'il est fait aussi usage de la linéarité de l'intégrale pour faire apparaître le signe - devant l'intégrale dans le premier membre de l'intégrale.

2 Intégrale d'une fonction continue

Ici commence le programme officiel du cours de TS.

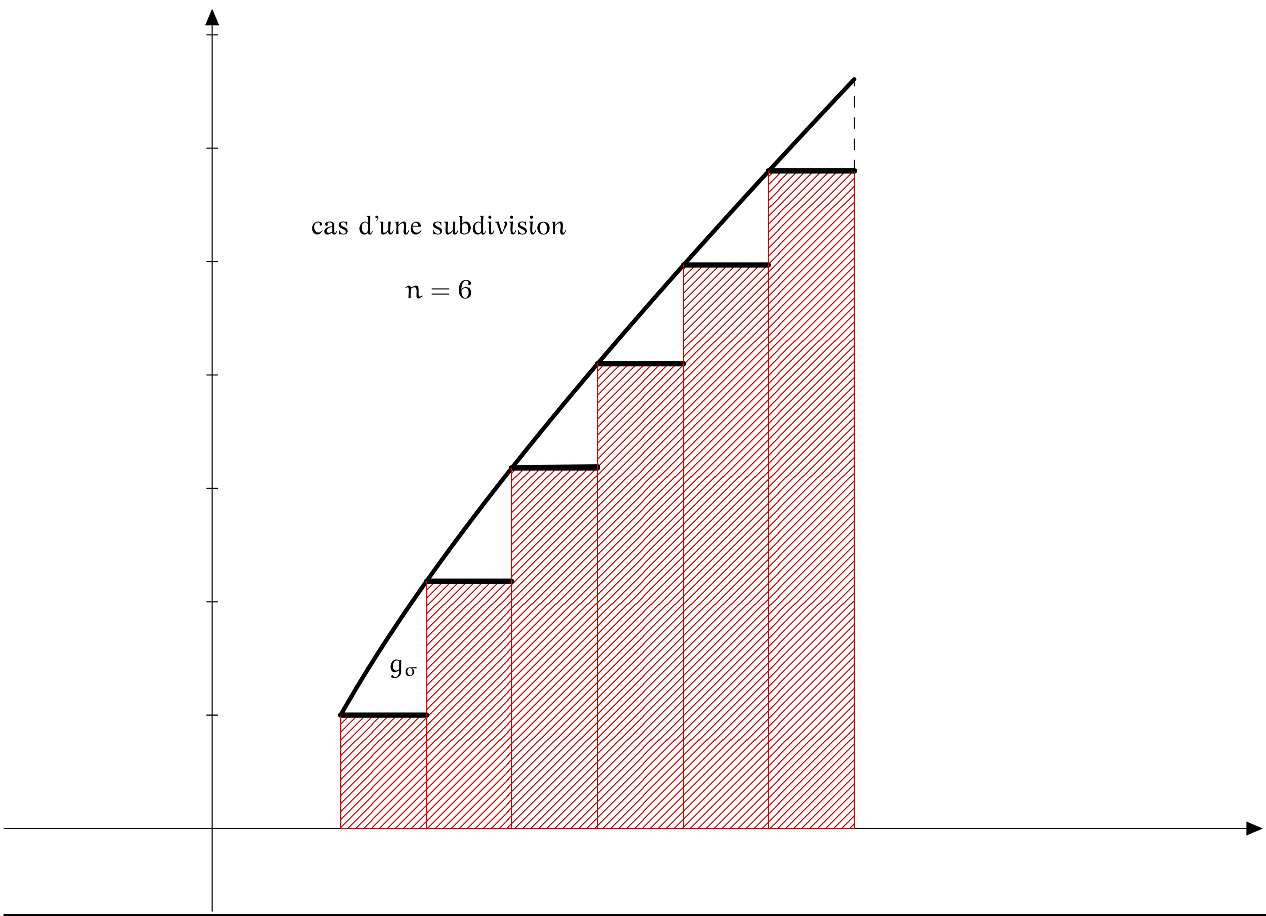
2.1 Intégrale d'une fonction continue et monotone sur $[a;b]$

L'intégrale d'une fonction en escalier positive sur $[a;b]$ étant égale à "l'aire sous la courbe"; l'idée pour définir l'intégrale d'une fonction continue sur $[a;b]$ est de l'encadrer par une suite de fonctions en escalier sur $[a;b]$. Dans ce qui suit, nous supposerons que f est croissante sur $[a;b]$.

2.1.1 Fonctions en escalier minorant f

Soit $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision quelconque du segment $[a;b]$. Soit g_σ la fonction en escalier sur $[a;b]$ définie par :

$$\forall k \in [\![1;n]\!], \forall t \in [a_{k-1}, a_k[,\ g_\sigma(t) = f(a_{k-1}) \quad \text{et} \quad g_\sigma(b) = f(a_{n-1}).$$



Propriété 2.1. g_σ *minore* f*, c'est-à-dire :* $\forall t \in [a;b], g_\sigma(t) \leqslant f(t)$.

Démonstration . *La fonction* f *est croissante sur* $[a;b]$*, donc a fortiori sur les intervalles* $[a_{k-1}, a_k[$*.*
Par conséquent :

$$\forall t \in [a;b[, \exists k \in [\![1;n]\!], t \in [a_{k-1}, a_k[\text{et} : g_\sigma(a_{k-1}) \leq f(a_{k-1}) \leq f(t).$$

De plus, $g_\sigma(b) \leq f(b)$*. Ceci prouve que* f *est minorée par* g_σ*.* ♢

Propriété 2.2. *Pour une subdivision donnée* σ *de* $[a;b]$*, la fonction* g_σ *définie précédemment est la meilleure fonction minorante de* f *en ce sens :*
Si ϕ *est une fonction en escalier sur* $[a;b]$ *pour laquelle* σ *est adaptée. Si de plus,* ϕ *minore* f *alors :* $\phi \leqslant g_\sigma$*.*

Démonstration . *: laissée en exercice.* ♢

Corollaire Avec les notations précédentes :

$$\int_a^b \phi(x)dx \leq \int_a^b g_\sigma(x)dx.$$

Démonstration .

$$\forall x \in [a;b],\ \phi(x) \leq g_\sigma(x) \qquad (1)$$

L'encadrement cherché est obtenu en utilisant la croissance de l'intégrale à (1), qui peut être appliquée car $a < b$. ♢

Propriété 2.3. *Quelle que soit la subdivision* σ *adaptée à* f *:*

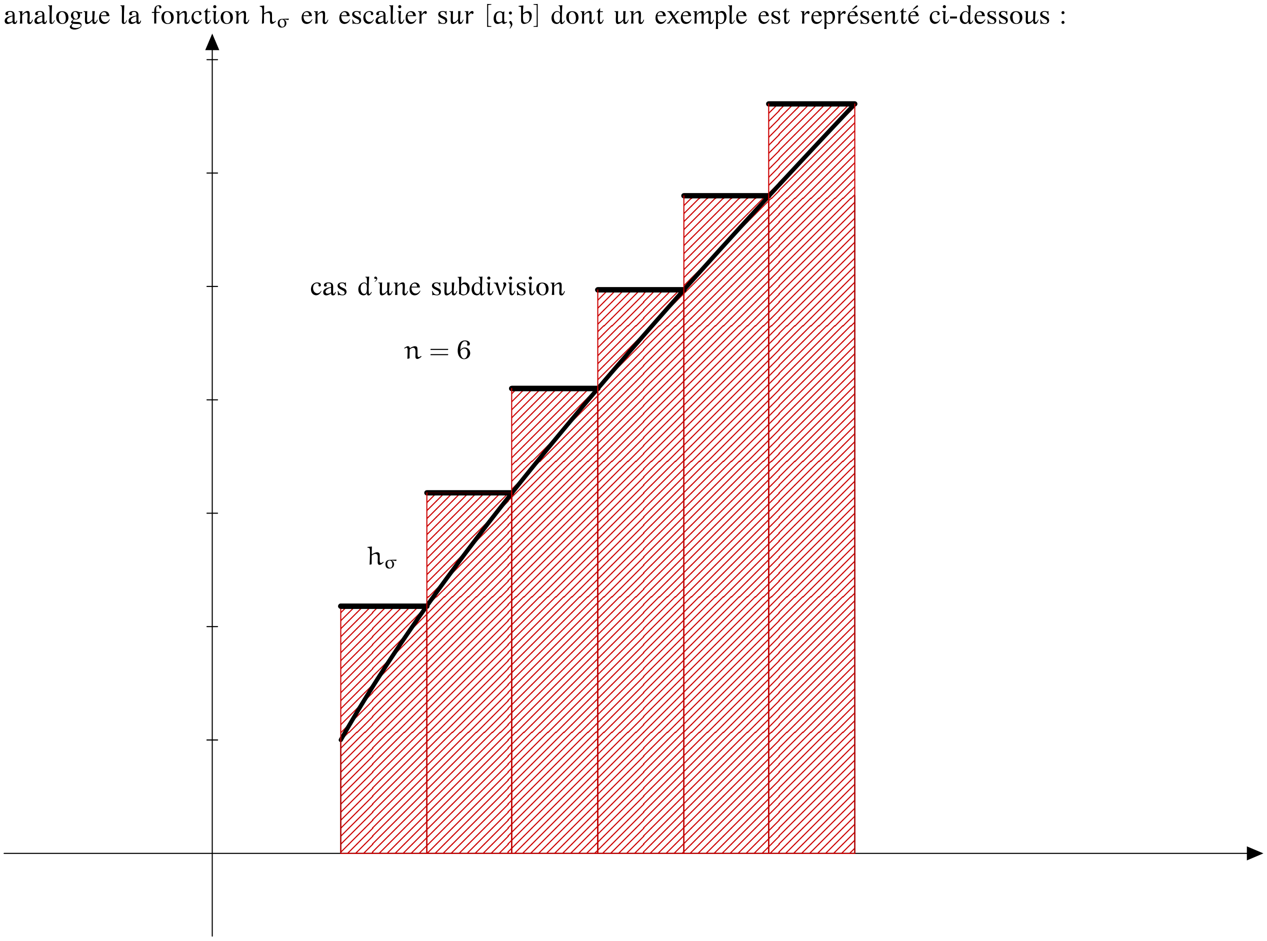
$$\int_a^b g_\sigma(x)dx \leq (b-a)f(b).$$

Démonstration . f *étant croissante sur* $[a;b]$ *:* $\forall x \in [a;b]$, $g_\sigma(x) \leq f(x) \leq f(b)$.
L'inégalité voulue est obtenue en utilisant la croissance de l'intégrale. ♢

Lorsque σ parcourt toutes les subdivisions adaptées à f, l'ensemble $\{\int_a^b g_\sigma(x)dx\}$ forme une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$: elle possède donc une borne supérieure, notée I_-.

2.1.2 Fonctions en escalier majorant f

Soit $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision quelconque du segment $[a;b]$. Il est possible de définir de manière analogue la fonction h_σ en escalier sur $[a;b]$ dont un exemple est représenté ci-dessous :



En adaptant les résultats de la section précédente [a], on obtient le résultat suivant :

Théorème 2.1. *Lorsque* σ *parcourt toutes les subdivisions adaptées à* f*, l'ensemble* $\{\int_a^b h_\sigma(x)dx\}$ *possède une borne inférieure, notée* I_+.

a. travail laissé en exercice.

2.1.3 Conclusion et généralisation

Théorème 2.2. $I_+ = I_-$

Démonstration . *Montrons que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* σ *telle que :* $\int_a^b h_\sigma(x)dx - \int_a^b g_\sigma(x)dx < \varepsilon$.

Or : $\int_a^b h_\sigma(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1})$ *et* $\int_a^b g_\sigma(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$.

Par suite : $\int_a^b h_\sigma(x)dx - \int_a^b g_\sigma(x)dx = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1}].[x_k - x_{k-1}]$.

Désignons par σ_ε *une subdivision telle que :* $\forall k, |x_k - x_{k-1}| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$.

Alors : $\int_a^b h_\sigma(x)dx - \int_a^b g_\sigma(x)dx < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} . \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1}]$, *soit :* $\int_a^b h_\sigma(x)dx - \int_a^b g_\sigma(x)dx < \varepsilon$.

le réel ε *étant arbitrairement petit,* $I_+ = I_-$. ♢

Définition 2.1. *Le nombre* $\mathbf{I_+ = I_-}$ *est l'intégrale de f sur* $[a; b]$. *Il est noté :* $\int_a^b \mathbf{f(x)dx}$.

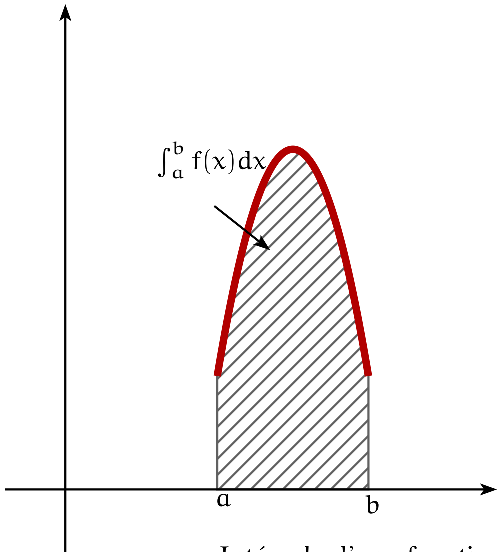
Propriété 2.4. $\int_a^b f(x)dx$ ***correspond à l'aire du domaine du plan, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan délimité par la courbe représentative de*** f***, l'axe des abscisses ; et les droites d'équation*** $x = a$ ***et*** $x = b$.

Démonstration . *admise*♢

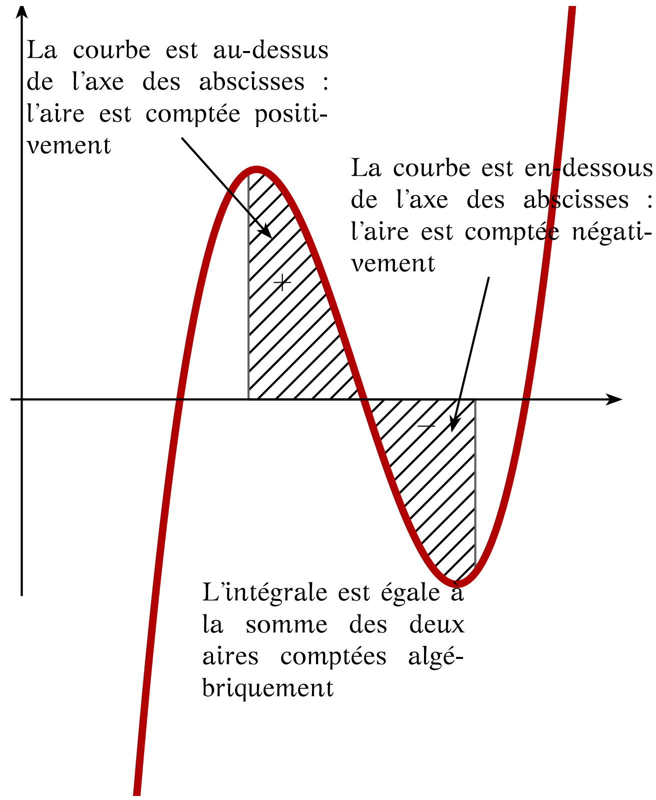
Généralisation

Il est possible de reprendre la méthode qui vient d'être détaillée pour une fonction positive et croissante sur $[a; b]$ pour toute fonction f continue sur le segment $[a; b]$, ce qui donne la définition suivante :

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, le réel noté $\int_a^b f(x)dx$ est égal à l'aire *algébrique* comprise entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.



Intégrale d'une fonction positive



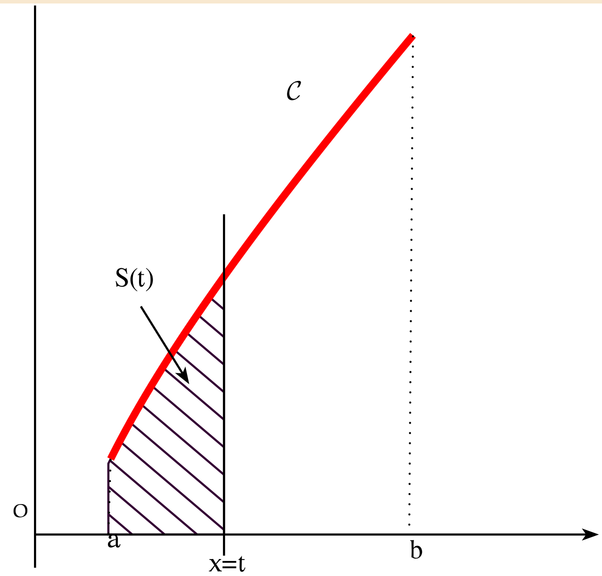
2.2 Lien entre intégrale et primitive

Soit f une fonction continue, positive et strictement croissante sur un intervalle $[a;b]$ représentée par la courbe $\mathcal{C}$. Pour t appartenant à $[a;b]$, on note $S(t)$ l'aire [a] du domaine hachuré $\mathfrak{D}$ sous la courbe.

Propriété 2.5. *$\mathfrak{D}$ est la partie du plan délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$:*

$$M(x;y) \in \mathfrak{D} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant & x & \leqslant b \\ 0 \leqslant & y & \leqslant f(x) \end{cases}$$

Propriété 2.6. *Si f est continue sur $[a;b]$, il en est de même pour S.*



Théorème 2.3. *La fonction S est la primitive de f sur $[a;b]$ qui s'annule en a.*

Démonstration . *(cf. graphiques ci-dessous)*
Soit t_0 un réel fixé dans l'intervalle [a ;b[. Nous allons montrer que S est dérivable à droite en t_0.
Soient R_{inf} le rectangle $ABCD$ et R_{sup} le rectangle $AB'C'D$.
L'aire de R_{inf} est égale à $(t - t_0)f(t_0)$ et l'aire de R_{sup} est égale à $(t - t_0)f(t)$.
L'aire $S(t) - S(t_0)$ est comprise entre les aires de R_{inf} et de R_{sup}, donc :
$(t - t_0)f(t_0) \leqslant S(t) - S(t_0) \leqslant (t - t_0)f(t)$.
Par conséquent ($t - t_0 < 0$) :

$$f(t_0) \leqslant \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} \leqslant f(t).$$

f *étant continue en* t_0 *:* $\lim\limits_{t \to t_0^+} f(t) = f(t_0)$, donc :

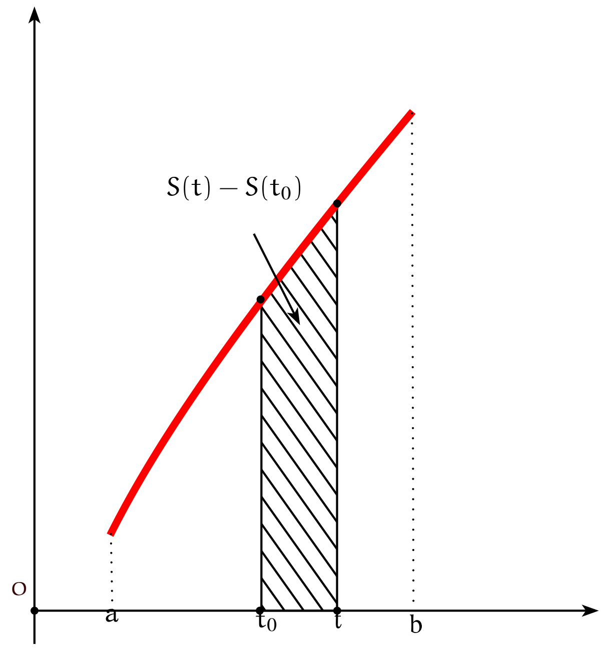
$$\lim_{t \to t_0^+} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} = f(t_0)$$

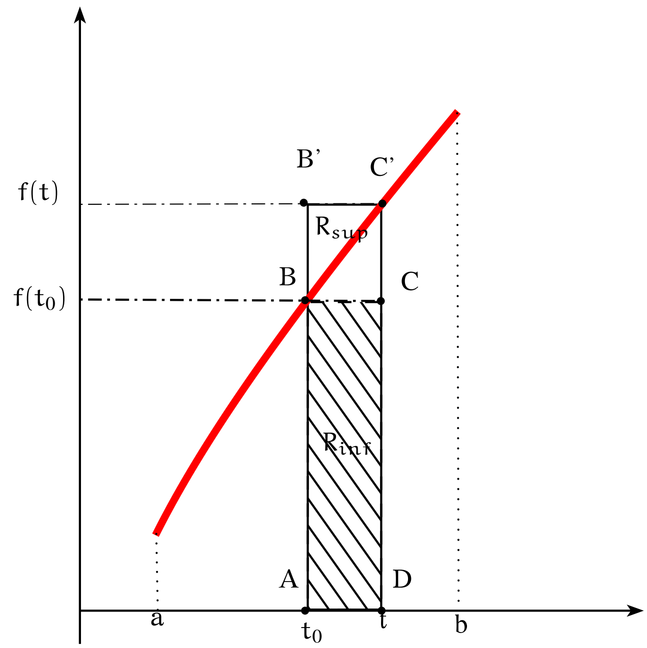
On démontre de même que S est dérivable à gauche en t_0, élément de $]a;b]$ et que :

$$\lim_{t \to t_0^-} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} = f(t_0)$$

Par conséquent : $\forall t_0 \in]a;b[, S'_d(t_0) = S'_g(t_0)$.
De plus S est continue sur $[a;b]$. Par conséquent S est dérivable sur $[a;b]$ et $S' = f$.
Pour finir la démonstration, il suffit de remarquer $S(a) = 0$. $\diamondsuit$

a. aire géométrique - et donc algébrique- car $\mathcal{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses.





Conséquence

$$\int_a^b f(x)dx = S(b).$$

> **Théorème 2.4.** *Soit* f *une fonction continue sur* $[a, b]$. *Soit* F *l'une de ses primitive sur* $[a; b]$. *Alors :*
>
> $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$
>
> *Le réel* $F(b) - F(a)$ *est souvent noté* $[F(x)]_a^b$ *(cf. exemples ci-dessous).*

Démonstration . *Il existe un réel* k *tel que* $F = S + k$. *Par conséquent :*
$F(b) - F(a) = (S(b) + k) - (S(a) + k) = S(b)$ *car* $S(a) = 0$. $\diamondsuit$

Remarque
• Cette dernière égalité peut servir de définition à l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.
• Dans le programme de TS, on ne considère que l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.
Exemples :
• $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 - (-1) = 2.$
• Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\|$=2 cm et $\|\vec{j}\|$= 3 cm. Déterminer l'aire $\mathfrak{A}$ en cm^2 de la partie du plan définie par :

$$\begin{cases} 0 \leqslant & x & \leqslant 2 \\ 0 \leqslant & y & \leqslant e^{-x} \end{cases}$$

Dans un premier temps, il faut déterminer $\mathfrak{A}$ en unité d'aire. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ étant positive et 0<2 :

$$\mathfrak{A} = \int_0^2 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^2 = 1 - e^{-2}.$$

Une unité d'aire étant égale à $2 \times 3 = 6$cm^2, l'aire recherchée est égale à $6(1 - e^{-2})$cm^2.

2.3 Propriétés

Toutes les propriétés prouvées pour les intégrales de fonctions en escalier sont encore vraies.
Dans tout ce qui suit, toutes les fonctions introduites sont continues sur un intervalle I quelconque. F désigne une primitive quelconque de f sur I, G désigne une primitive quelconque de g sur I.

Relation de Chasles Pour TOUS réels a, b et c de I :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Démonstration . $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(c) - F(a) - (F(c) - F(b)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$. ♢

Propriété 2.7. ***Linéarité de l'intégrale***
Pour TOUS réels a, b de I, pour tous réels α et β :

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Démonstration . $\alpha F + \beta G$ *est une primitive sur* I *de* $\alpha f + \beta g$ *donc :*

$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)dx = (\alpha F(b) - \beta G(b)) - (\alpha F(a) - \beta G(a)) = \alpha(F(b) - F(a)) + \beta(G(b) - G(a))$

$= \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)$. ♢

Propriété 2.8. ***Positivité de l'intégrale***

- *Si* f *est positive sur* $[a;b]$ *et si* $a \leq b$, *alors :* $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- *Si* f *est négative sur* $[a;b]$ *et si* $a \leq b$, *alors :* $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

Propriété 2.9. • $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
• $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Démonstration . • $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b))$.
• $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$. ♢

Propriété 2.10. ***Croissance de l'intégrale***
• *Si* a *et* b *sont deux réels tels que* $a \leqslant b$ *;*
• *Si* $\forall x \in [a;b], f(x) \leqslant g(x)$ *;*
alors $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$.

Propriété 2.11. ***intégrale et valeur absolue***
Si $a \leqslant b$, *alors pour toute fonction f continue sur* $[a;b]$ *:*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Théorème 2.5. ***Théorème fondamental***
La fonction définie sur $I : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ *est la primitive de* f *sur* I *qui s'annule en* a.

Propriété 2.12. ***Inégalité de la moyenne***
Si f *est bornée par* m *et* M *(i.e* $m \leq f \leq M$*) et si* $a \leq b$*, alors :*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Démonstration . *Il suffit d'utiliser la croissance de l'intégrale sur l'encadrement* $m \leq f \leq M$. $\diamondsuit$

Définition 2.2. ***valeur moyenne de f***
Si $a < b$*, la valeur moyenne de la fonction f sur* $[a;b]$ *est le réel noté* μ *défini par :*

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Interprétation en physique :
Si f est la vitesse instantanée d'un mobile en mouvement, on sait que la fonction $d : t \mapsto d(t)$ ou $d(t)$ est la distance parcourue à l'instant t, est une primitive de f. Alors le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ peut s'écrire :$\frac{d(b)-d(a)}{b-a}$.
Ce nombre correspond à la vitesse moyenne du mobile sur l'intervalle de temps $[a;b]$, c'est-à-dire la vitesse constante qu'il faudrait donner au mobile pour qu'il parcoure la même distance pendant la même durée.

2.4 Intégration par parties

Cette partie n'est plus au programme de la Terminale S depuis la rentrée 2012. Elle l'est tout de même pour vous.

2.4.1 Etude d'un exemple

Posons : $I = \int_1^e \ln x dx$.

Pour calculer I, il faut trouver une primitive de la fonction ln ...
De la formule : $(FG)' = fG + Fg$, nous pouvons affirmer que FG est une primitive de $fG + Fg$, ce qui revient à dire que :

$$\int_a^b f(x)G(x)dx = [(FG)(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g(x)dx$$

(Ceci est licite car fG et gF sont continues sur $[a;b]$).
Posons donc : $f(x) = 1$ et $G(x) = \ln x$, cela donne : $F(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ et :

$$I = [x\ln x]_1^e - \int_1^e x.\frac{1}{x}dx$$

Le miracle se réalise devant nos yeux puisque nous obtenons :

$$I = [x\ln x]_1^e - \int_1^e 1dx$$

Ce qui tout calcul fait nous donne la valeur exacte de I : $I = 1$.
Mieux, en reprenant cette méthode avec $I = \int_1^x \ln t dt$, nous obtenons que la primitive de ln sur $]0;+\infty[$ s'annulant en 1 est $x \mapsto x\ln x - x + 1$.
Commentaire : cette méthode, dite d'intégration par parties, est motivée par le fait qu'il n'existe pas pas de formule générale donnant les primitives de fg connaissant F et G. Elle permet de trouver beaucoup de primitives, mais ne fonctionne pas à tout coup car la nouvelle intégrale obtenue n'est pas toujours aussi agréable que dans cet exemple. Par exemple, elle est inopérante pour la fonction $x \mapsto e^{x^2}$ pour laquelle il est possible de montrer que les primitives ne peuvent pas s'exprimer à l'aide des fonctions classiques que nous connaissons.

2.4.2 Formule d'intégration par parties

Théorème 2.6. *Si* u *et* v *deux fonctions dérivables sur* $[a;b]$, *et si les fonctions* u' *et* v' *sont continues sur* $[a;b]$, *alors :*

$$\int_a^b \mathbf{u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.}$$

Démonstration .

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx = \int_a^b u(x)v'(x) + u'(x)v(x)dx = \int_a^b (uv)'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b.$$

♢

Remarques
• L'hypothèse u, u', v et v' continues sur $[a;b]$ est primordiale pour appliquer ce théorème. Il faut absolument le mentionner pour pour pouvoir l'appliquer!
• Par contre, l'ordre des bornes d'intégration peut être quelconque.

2.5 Formule de changement de variables

Théorème 2.7. *Soient* $u : I \to J$ *une fonction dérivable sur* I *et de dérivée continue sur* I. *Soit* f *une fonction continue sur* J.
Alors pour tous réels a *et* b *de* I *:* $\displaystyle\int_a^b \mathbf{f(u(t))u'(t)dt} = \int_{u(a)}^{u(b)} \mathbf{f(x)dx}.$

Démonstration . $F(u)$ *est une primitive de* $u'.f(u)$ *donc....* ♢

Exemples :
Exemple 1
Calcul de $\displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t + t\ln t}$
On utilise le changement de variable $x = \ln t$. On écrit [a] alors $dx = \dfrac{dt}{t}$.
Pour $t = 1$, $x = 0$ et pour $t = e$, $x = 1$.
On obtient alors : $\displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t + t\ln t} = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln 2.$
Exemple 2
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ telle que : $\forall x \in [a;b], f(a + b - x) = f(x)$.
• Montrer que $\displaystyle\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$
Application (nécessitant la connaissance de la fonction arctan) :
• En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$

3 Intégrale généralisée : recherche d'un équivalent simple d'une série de Riemann

α désigne un réel donné de $]1;+\infty[$. Le but de cet exercice est de montrer que la suite S définie par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

est convergente et de donner un équivalent simple de son reste de rang n.

1. En utilisant la méthode des rectangles, montrer que :

$$\forall k \geqslant 2, \quad \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

a. Voir explications en classe

2. En déduire que :

$$\forall n \geqslant 1, \forall m \geqslant n+1, \quad \int_{n+1}^{m+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{n}^{m} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

3. Montrer l'existence de l'intégrale : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$.
4. Montrer que S est croissante et qu'elle est convergente. Sa limite sera notée $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.
5. Justifier l'existence de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ appelé reste de la série de rang n, où n désigne un entier naturel donné.
6. Justifier l'encadrement suivant :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant R_n \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

7. En déduire que :

$$R_n \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Rappel : Suites équivalentes. Si la suite v ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors :

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \to 1.$$

4 Exercices

Exercice 44. Noyau de Dirichlet

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note D_n le *noyau de Dirichlet*, défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx.$$

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $x \not\equiv 0[2\pi]$, on a :

$$D_n(x) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}.$$

2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note L_n l'intégrale :

$$L_n = \int_0^\pi x D_n(x) dx.$$

   (a) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi x \cos(kx) dx$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

   (b) En déduire que :

$$L_n = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k^2}.$$

3. On note f le prolongement par continuité en 0 de la fonction définie sur l'intervalle $]0;\pi]$ par :

$$x \mapsto \frac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Démontrer que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $[0;\pi]$.

4. Soit $\phi : [0;\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[0;\pi]$. Démontrer que :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^\pi \phi(x) \sin(\lambda x) dx = 0.$$

5. Démontrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} L_n = 0$.

Exercice 45. [85 EXP SUITE]

1. Calculer $\int_0^1 xe^{-x}dx$.
2. n étant un entier naturel non nul, on pose : $S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} e^{-\frac{k}{n}}$.

   Montrer que $S(n)$ a une limite lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$. Préciser cette limite.

Exercice 46. [85 INTEGRALE] Pour tout entier naturel n on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$$

1. Montrer qu'il existe des réels a et b tels que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \qquad \frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x}.$$

   En déduire le calcul de I_0.
2. Montrer, par une intégration par parties, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}.$$

   En déduire le calcul de I_2.

Exercice 47. [83 INTEGRALES]

1. Pour tout entier n strictement positif, on pose : $I_n = \frac{1}{2^{n+1}n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} dt$.
2. Calculer I_1.
3. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$.
4. En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} + I_n$.
5. Montrer qu'il existe une constante A telle que $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2^n n!} A$.

   (On pourra étudier la fonction $t \mapsto (1-t)e^{\frac{t}{2}}$ sur $[0;1]$).
6. En déduire la limite de la suite u telle que $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!}$.

Exercice 48. [Dijon bac E, 1974] Le but du problème est la détermination d'un encadrement de π en calculant de deux façons l'intégrale :

$$I = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Partie A : Méthode donnant la valeur exacte de I.

1. Calculer $\tan\theta$ en fonction de $\tan \frac{\theta}{2}$. En déduire que $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.
2. Soit f l'application de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \tan x$. Démontrer que f admet un application réciproque F de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.Dresser le tableau de variations de F.
3. Déterminer F'.

   En déduire que :

$$I = \frac{\pi}{12}$$

Partie B : Méthode donnant un encadrement de I.

1. (a) Calculer $(2-\sqrt{3})^3$ et $(2-\sqrt{3})^4$ en fonction de $\sqrt{3}$.

(b) Vérifier que pour tout x réel :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{1+x^2}.$$

2. Calculer en fonction de $\sqrt{3}$:

$$J = \int_0^{2-\sqrt{3}} 1 - x^2 dx.$$

3. On désigne par K l'intégrale :

$$K = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{x^4}{1+x^2} dx.$$

(a) Démontrer que pour tout x réel positif :

$$\frac{x^4}{1+x^2} \leqslant \frac{x^3}{2}.$$

(b) En déduire que :

$$0 \leqslant K \leqslant \frac{97}{8} - 7\sqrt{3}.$$

4. Trouver une relation simple entre I, J et K. En déduire :

$$4\sqrt{3} - \frac{20}{3} \leqslant I \leqslant \frac{131}{24} - 3\sqrt{3}.$$

Sachant que $1,73205 \leqslant \sqrt{3} \leqslant 1,73206$, déterminer le meilleur encadrement de π possible en utilisant les données du problème.

Exercice 49. Soit f une fonction continue à dérivée continue sur [a ;b]. On pose : $I = \int_a^b f(t)\sin(nt)dt$.
Montrer à l'aide d'une intégration par parties que la suite (I_n) tend vers 0.

Exercice 50. Liban 1978

L'objet de ce problème est de calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt$

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f : x \mapsto f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x}{\cos^2 t}} dt$.

   Montrer que : $\forall x \geq 0, f(x) \leq e^{-x}$.
   Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. (a) Montrer que pour tout réel b strictement positif :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \leq b \Longrightarrow e^x - 1 - x \leq \frac{1}{2}e^b x^2.$$

   Montrer que pour tout réel b strictement positif :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq -b \Longrightarrow e^x - 1 - x \geq \frac{1}{2}e^{-b} x^2.$$

   (b) Montrer que pour tout réel a, il existe une application ϕ_a de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en a, telle que $\phi_a(a) = 0$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - f(a) = (x-a)\left[-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-\frac{a}{\cos^2 t}}}{\cos^2 t} dt + \phi_a(x)\right].$$

   En déduire que f est dérivable, et donner l'expression de f'.

3. Soit P une primitive sur $\mathbb{R}$ de l'application $u :\mapsto e^{-u^2}$ (on ne cherchera pas à la calculer).
   A tout réel x, on associe l'application Q_x de $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $t :\mapsto Q_x(t) = P(x\tan t)$, où x est un paramètre.
   Montrer que Q_x est dérivable sur I, et expliciter sa dérivée, c'est-à-dire $\frac{dQ_x}{dt}$.
   Prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_0^x e^{-u^2} du = x\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2\tan^2 t}}{\cos^2 t} dt$$

4. Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x^2)$.
   Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$
   Que peut-on dire de la fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $h(x) = g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$?
   Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$

Exercice 51. [exo 7] Soit $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt$.

1. Quel est l'ensemble de F ?
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to1^+} F(x)$ en comparant F à $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt$.

Exercice 52. Soit la suite numérique $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par :
$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x\,dx.$$

1. Calculer I_1
2. Par intégration par parties, exprimer I_n en fonction de I_{n-1} pour $n \geqslant 2$.
   En déduire que : $I_n = e - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ pour $n \geqslant 1$.
3. Majorer la fonction $x \mapsto (1-x)^n e^x$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.
   En déduire de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et montrer que :
$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

Exercice 53. Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
A tout entier n, on associe la fonction f_n définie sur $]-1;+\infty[$ par :
$$f_n(x) = x^n \ln(1+x).$$
Le problème est consacré à l'étude de la famille des fonctions f_n et à celle d'une suite liée à ces fonctions f_n.
On désigne par C_n la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphique 2 cm.
I. Etude des fonctions f_n.

1. Soit h_n la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :
$$h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$
   Etudier le sens de variation de h_n. En utilisant la valeur de $h_n(0)$, déterminer le signe de h_n sur $]-1;+\infty[$.
2. (a) Pour tout x appartenant à $]-1;+\infty[$ vérifier que :
$$f_1'(x) = h_1(x),$$
   et que pour tout n strictement supérieur à 1,
$$f_n'(x) = x^{n-1}h_n(x).$$
   (b) On suppose n impair. Pour tout x de appartenant à $]-1;+\infty[$ justifier que $f_n'(x)$ et $h_n(x)$ sont de même signe.
   Dresser alors le tableau de variations de la fonction f_n lorsque n est impair, en précisant ses limites en -1 et $+\infty$.

(c) On suppose n pair. Dresser de même le tableau de variations de f_n en précisant ses limites en -1 et $+\infty$.

3. (a) Etudier la position relative des courbes C_1 et C_2.

   (b) Tracer ces deux courbes.

II. Etude d'une suite.

Dans cette partie, u désigne la suite définie pour n supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx.$$

1. Etude de la convergence.

   (a) Démontrer que :
   $$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\ln 2}{n+1}.$$

   (b) En déduire que la suite u est convergente et donner sa limite.

   (c) A l'aide de l'encadrement obtenu précédemment, déterminer un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait :
   $$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\ln 2}{100}.$$

2. Calcul de u_1.

   (a) En remarquant que pour tout x appartenant à $[0;1]$, on a :
   $$\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{x+1}.$$
   Calculer :
   $$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx.$$

   (b) Calculer u_1 au moyen d'une intégration par parties.

3. Calcul de u_n.

   Pour tout x de $[0;1]$ et pour tout $n \geqslant 2$, on pose :
   $$S_n(x) = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n. \qquad (1)$$

   (a) Démontrer que :
   $$\forall n \geqslant 2,\ \forall x \in [0;1],\ S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}\,. \qquad (2)$$

   (b) En déduire que :
   $$\forall n \geqslant 2,\ \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx.$$

   (c) En utilisant une intégration par parties, montrer que :
   $$u_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p+1}\right].$$

4. Application

   Soit E l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifiant :
   $$0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad f_2(x) \leqslant y \leqslant f_1(x).$$
   Calculer u_2 et en déduire l'aire de E en cm^2.

Exercice 54. [BordeauxC 1991]
Le problème a pour objet :
• Dans la partie A. d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle [0 ;1] par :

$$f(x) = \frac{-x^2 \ln x}{1+x} \text{ si } x \neq 0, \text{ et } f(0) = 0.$$

• Dans la partie B. de calculer une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_0^1 f(t)dt$.

• Partie A. **Etude et représentation graphique de** f. le plan est rapporté au repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 10 cm sur $x'x$ et 20 cm sur $y'y$)
On désigne par C la courbe représentative de f dans ce repère.
I. **Etude d'une fonction auxiliaire.**
Soit u la fonction définie sur $]0;1]$ par :

$$u(x) = \frac{1+x}{2+x} + \ln x.$$

1. Montrer que la fonction u est strictement croissante sur ensemble de définition. Donner son tableau de variations en précisant la limite en 0 et la valeur en 1.
2. En déduire que u s'annule pour un unique nombre réel β compris entre 0 et 1.
   Monter que :
   $$0,54 < \beta < 0,55.$$

II. **Etude et représentation graphique de f.**
1. (a) Etudier la limite de f en 0.
   (b) Montrer que la fonction f est continue sur [0;1].
2. (a) Etudier la dérivabilité de f en 0.
   (b) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et vérifier que $f'(x)$ et $-u(x)$ ont le même signe.
3. Donner le tableau de variations de f.
4. Construire la courbe C en précisant les tangentes aux points d'abscisses respectives 0 et 1.

• Partie B. Justifier l'existence de l'intégrale I. (On ne cherchera pas à déterminer une primitive de f).
I. **Etude d'une intégrale auxiliaire.**
Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. On désigne par g_n la fonction numérique définie sur [0;1] par :

$$g_n(t) = -t^n \ln t \quad \text{si} \quad t > 0 \quad \text{et} \quad g_n(0) = 0.$$

1. Démontrer que g_n est continue sur [0;1].
2. Soit G_n la fonction définie sur [0;1] par : $\begin{cases} G_n(t) = -\dfrac{t^{n+1}\ln t}{n+1} + \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)^2} & \text{si } t > 0 \\ G_n(0) = 0 \end{cases}$.
   (a) Montrer que G_n est une primitive de g_n sur [0;1].
   (b) En déduire la valeur de l'intégrale :
   $$I_n = \int_0^1 g_n(t)dt.$$

II. **Etude de** I.
1. Soit t un nombre réel et n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
   (a) Calculer le produit :
   $$P_n(t) = (1+t)(1-t+t^2+\cdots+(-1)^n t^n).$$
   (b) En déduire que pour tout nombre t différent de 1 :
   $$\frac{1}{1+t} = 1-t+t^2+\cdots+(-1)^n t^n + (-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{1+t}.$$

(c) Montrer que pour tout réel t de $[0;1]$:

$$f(t) = g_2(t) - g_3(t) + \cdots + (-1)^{n+1} g_{n+1}(t) + (-1)^n \frac{g_{n+2}(t)}{t+1},$$

puis que :

$$I = I_2 - I_3 + \cdots + (-1)^{n+1} I_{n+1} + (-1)^n \int_0^1 \frac{g_{n+2}(t)}{t+1} dt.$$

(d) Montrer que :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{g_{n+2}(t)}{t+1} dt \leqslant \frac{1}{(n+3)^2}.$$

2. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. On pose :

$$S_n = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+2)^2}.$$

(a) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} S_n = I$.

(b) Montrer que $S_8 \leqslant I \leqslant S_9$.

(c) En déduire une valeur approchée de I à 5.10^{-3} près.

Exercice 55. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \, dt \quad \text{et} \quad b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t \, dt.$$

1. (a) Calculer a_0 et b_0 et montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n > 0.$$

(b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} a_n.$$

2. (a) Montrer que :

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \ t \leqslant \frac{\pi}{2} \sin t.$$

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leqslant b_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}(a_n - a_{n+1}).$$

(c) En déduire :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0.$$

3. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = (2n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{2n+1} t \, dt.$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{n+1}}{n+1} = (2n+1) b_n - (2n+2) b_{n+1}.$$

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2\left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

4. Prouver que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5 Les intégrales au baccalauréat

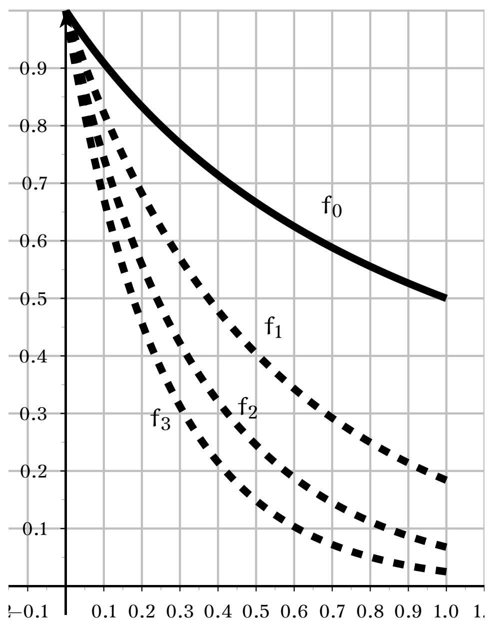
Pondichery avril 2012 On considère les suites (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}\,dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2}\,dx.$$

1. Sont représentées ci-dessous les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[0~;~1]$ par

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+x}$$

pour différentes valeurs de n :



(a) Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en expliquant la démarche.

(b) Démontrer cette conjecture.

2. (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0~;~1]$:

$$0 \leqslant \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \frac{e^{-nx}}{1+x} \leqslant e^{-nx}.$$

(b) Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

3. (a) Montrer, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$I_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{e^{-n}}{2} - J_n\right).$$

(b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n$.

Amérique du Nord mai 2012
Soit f une fonction définie et dérivable sur $[0~;~1]$ telle que :

$$f(0) = 0 \text{ et } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ pour tout } x \text{ de } [0~;~1].$$

On ne cherchera pas à déterminer f.
Partie A

1. Déterminer le sens de variation de f sur $[0~;~1]$.
2. Soit g la fonction définie sur $\left[0~;~\frac{\pi}{4}\right]$ par $g(x) = f(\tan(x))$.

(a) Justifier que g est dérivable sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$, puis que, pour tout x de $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$, $g'(x) = 1$.

(b) Montrer que, pour tout x de $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$, $g(x) = x$, en déduire que $f(1) = \frac{\pi}{4}$.

3. Montrer que, pour tout x de $[0\ ;\ 1]$, $0 \leq f(x) \leqslant \frac{\pi}{4}$.

Partie B Soit (I_n) la suite définie par $I_0 = \int_0^1 f(x)dx$ et, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \int_0^1 x^n f(x)dx$.

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, $I_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n \geqslant 0$.

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n \leqslant \frac{\pi}{4(n+1)}$.

   (c) En déduire la limite de la suite (I_n).

Sixième partie

Lois de probabilités continues

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1 Densité de probabilité

Dans tout ce qui suit, I désigne un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1. *:*
• *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle de la forme* $[a;+\infty[$, *sauf éventuellement en un nombre fini de points.*
Si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ *possède une limite finie* $\mathcal{L}$ *quand* x *tend vers* $+\infty$, *on pose alors :*

$$\mathcal{L} = \int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt.$$

• *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle de la forme* $]-\infty;a]$, *sauf éventuellement en un nombre fini de points.*
Si la fonction $x \mapsto \int_x^a f(t)dt$ *possède une limite finie* $\mathcal{L}'$ *quand* x *tend vers* $-\infty$, *on pose alors :*

$$\mathcal{L}' = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)dt.$$

Exemples

• $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [-1;1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ Alors : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2.$

Notation et définition : $f = \mathbb{1}_{[-1;1]}$ est la fonction indicatrice, ou caractéristique de [-1;1].

• $f(t) = \begin{cases} e^{-t} \text{ si } t \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ Alors : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.$

Remarque : $f(t) = e^{-t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$.

• $f(t) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}e^{-t} + \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}e^{t}$. Alors : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2.$

Définition Une fonction f est une *densité de probabilité sur* I si :
- f est continue sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points de cet intervalle
- f est positive sur I : $\forall t \in I$, $f(t) \geqslant 0$
- $\int_I f(t)dt = 1.$

Exemples

• La fonction f définie par $f(t) = \begin{cases} e^{-t} \text{ si } t \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ car :

1) f est continue sur $\mathbb{R}^*$
2) f est positive sur $\mathbb{R}$
3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.$

Remarque : f est aussi une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^+$ car $\int_{\mathbb{R}^+} f(t)dt = 1.$

• La fonction f définie par $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } t \in [-1;1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est une densité sur $\mathbb{R}$, mais aussi sur $[-1;1]$.

Exercice 56.

n désigne un entier naturel non nul. Trouver la valeur du réel a, si cela est possible, pour que la fonction f définie par
$f(t) = \begin{cases} \dfrac{a}{t^n} \text{ si } t \geqslant 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

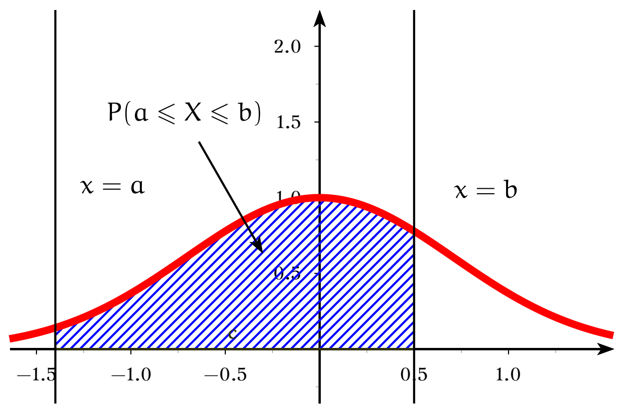
Exercice 57.
Calculer la valeur de k pour que la fonction $f(t) = \begin{cases} ke^x \text{ si } x < 0, \\ \mid x - 2 \mid e^{-x} \text{ sinon} \end{cases}$ soit une densité sur $\mathbb{R}$.

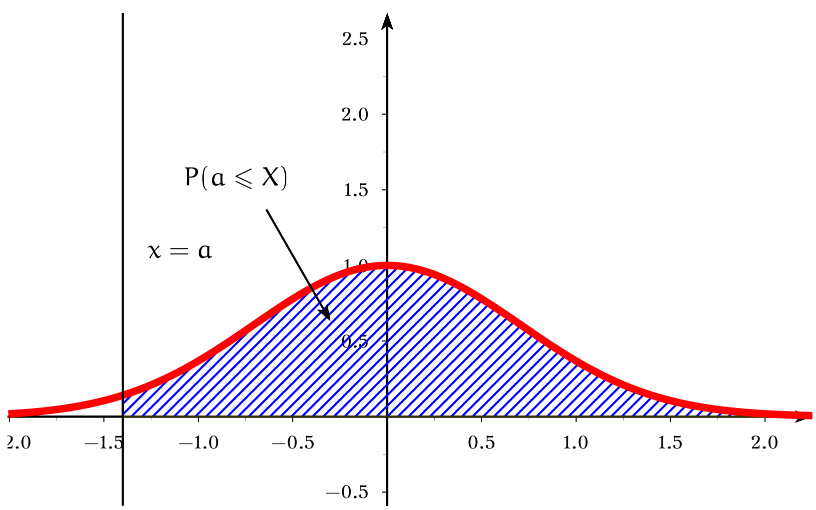
2 Loi de probabilité

2.1 Définition

Définition
Soit f une densité de probabilité sur I. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans I. X suit une loi de probabilité de densité f sur I si pour tout intervalle J inclus dans I :

$$P(X \in J) = \int_J f(t)dt.$$





Exemples

- La fonction f définie par $f(t) = \begin{cases} 4t^3 \text{ si } t \in [0;1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ et :

$P(-2 \leqslant X \leqslant 3) = 1$.
$\forall [a; b] \subset [0; 1], \quad P(a \leqslant X \leqslant b) = b^4 - a^4$.

- Soit X une variable aléatoire de densité $f_X(t) = \begin{cases} e^{-t} \text{ si } t \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$\forall [a;b] \subset \mathbb{R}+, \quad P(a \leqslant X \leqslant b) = e^{-a} - e^{-b}.$

Remarques importantes :
• Soient f et g deux densités de probabilités sur I ne différant qu'en un nombre fini de points.
Si f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X, alors il en est de même pour g.
Le cours d'intégration assure en effet que :

$$\forall J \subset I, \int_J f(t)dt = \int_J g(t)dt.$$

• Deux variables aléatoires ayant la même loi ne sont pas forcément égales.

2.2 Propriétés

Théorème 2.1. *Soit* X *une variable aléatoire à densité sur* I. *Soient* J *et* K *deux intervalles inclus dans* I.
• $P(X \in I) = 1$.
• $\forall x \in I, P(X = x) = 0$
• $\forall [a;b] \subset I, P(a < X < b) = P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b)$.
• $\forall a \in \mathbb{R}, \quad P(X \geqslant a) = P(X > a)$.
• *Si* $P(X \in J) \neq 0$*, alors :*

$$P_{(X \in J)}(X \in K) = \frac{P[(X \in J) \cap (X \in K)]}{P(X \in J)}.$$

• $P[(X \in J) \cup (X \in K)] = P(X \in J) + P(X \in K) - P[(X \in J) \cap (X \in K)]$.
• *Si de plus,* J *et* K *sont disjoints :*

$$P[(X \in J) \cup (X \in K)] = P(X \in J) + P(X \in K).$$

2.3 Fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité

Définition
Soit X une variable aléatoire à densité sur I.
La fonction de répartition de X est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = P(X \leqslant x).$$

Autrement dit, si f est définie sur $\mathbb{R}$: $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Propriété 2.1. *i) F est croissante sur* $\mathbb{R}$.
ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

Démonstration . *Propriété : La relation de Chasles est encore licite pour une fonction continue sur* I*, sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs.*
i) Soit $]-\infty; x] \subset]-\infty; y]$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \leqslant \int_{-\infty}^{x} f(t)dt + \int_{x}^{y} f(t)dt \leqslant \int_{-\infty}^{y} f(t)dt \leqslant F(y).$$

F est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
ii) Par définition :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 1,$$

ce qui se réécrit :

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

D'autre part, soit x *un réel quelconque donné. La relation de Chasles nous permet d'écrire :*

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt + \int_{x}^{+\infty} f(t)dt = 1$. *Soit :*

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 1 - \int_{x}^{+\infty} f(t)dt.$$

En faisant tendre x *vers* $-\infty$, *nous obtenons :*

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0.$$

♢

Théorème 2.2.

$$\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2, a \leqslant b, \quad P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a).$$

Démonstration .

$$F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(t)dt - \int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{b} f(t)dt - \int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(t)dt.$$

♢

Théorème 2.3. *Soit* X *une variable aléatoire à densité de probabilité la fonction* f *sur* I. *Soit* F *sa fonction de répartition.*
Alors pour tout x *où* f *est continue,* F *est dérivable en* x *et :*

$$F'(x) = f(x).$$

2.4 Densité de $\alpha X + \beta$

Exemples

• U est une variable aléatoire ayant pour densité : $f_X(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [0;1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

On définit la variable aléatoire Y par $Y = 2U - 3$.
Les valeurs prises par Y sont les réels de l'intervalle $[-3;-1]$. En effet, U est à valeurs dans $[0;1]$ et l'application $t \mapsto 2t-3$ réalise une bijection de $[0;1]$ dans $[-3;-1]$.
Soit $[a;b]$ un intervalle inclus dans $[-3;-1]$. Nous avons :

$$P(a \leqslant Y \leqslant b) = P(a \leqslant 2U-3 \leqslant b) = P(a+3 \leqslant 2U \leqslant b+3) = P(\frac{a+3}{2} \leqslant U \leqslant \frac{b+3}{2}) = \int_{\frac{a+3}{2}}^{\frac{b+3}{2}} 1dt = \frac{b-a}{2}.$$

Ceci montrer que Y a pour densité la fonction $f_Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } t \in [-3;-1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

• X est une variable aléatoire de densité : $f_X(t) = \begin{cases} e^{-t} \text{ si } t \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = -X$.
X est à valeurs positives, donc Y est à valeurs négatives.
Donc :
►Si $[a;b]$ est inclus dans $\mathbb{R}^+$, alors $P(Y \in [a;b]) = 0$.
► Si $[a;b]$ est inclus dans $\mathbb{R}^-$, alors $P(Y \in [a;b]) = P(X \in [-b;-a]) = \int_{-b}^{-a} e^{-t}dt$. Via le changement de variable $u = -t$ dans cette dernière intégrale, nous obtenons :

$$P(Y \in [a;b]) = \int_{a}^{b} e^{u}du.$$

Y a donc pour densité $f_Y(t) = \begin{cases} e^{t} \text{ si } t \leqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ Ceci permet donc d'écrire : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_Y(t) = f_X(-t)$.

Théorème 2.4. *Soit* X *une variable aléatoire à densité* f_X *sur* I. *Soient* $(\alpha;\beta)$ *élément de* $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. *La variable aléatoire* $Y = \alpha X + \beta$ *est une variable à densité admettant pour densité la fonction* g *définie par :*

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad g(y) = \frac{1}{|\alpha|} f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right).$$

Démonstration . *Supposons* $\alpha > 0$.
$\forall y \in \mathbb{R}, Y \leqslant y \Leftrightarrow \alpha X + \beta \leqslant y \Leftrightarrow X \leqslant \dfrac{y-\beta}{\alpha}$.
Par conséquent : $\forall y \in \mathbb{R}, F_Y(y) = F_X\left(\dfrac{y-\beta}{\alpha}\right)$.
Si f_X *est continue en y, alors* F_X *l'est en* $\dfrac{y-\beta}{\alpha}$ *et dans ce cas :*
$F'_Y(y) = \dfrac{1}{\alpha}F'_X\left(\dfrac{y-\beta}{\alpha}\right)$. F'_X *coïncide avec* f_X *sur* I *privé des points pour lesquels* f_X *n'est pas continue et qui sont en nombre fini.*
De plus, $y \mapsto \dfrac{1}{\alpha}f_X\left(\dfrac{y-\beta}{\alpha}\right)$ *est à valeurs positives. Il s'agit donc d'une densité de* Y.
Supposons maintenant que $\alpha < 0$.
$\forall y \in \mathbb{R}, P(Y \leqslant y) \Leftrightarrow P(\alpha X + \beta \leqslant y) \Leftrightarrow P\left(X \geqslant \dfrac{y-\beta}{\alpha}\right)$.
On en déduit donc que : $\forall y \in \mathbb{R}, \quad F_Y(y) = 1 - F_X\left(\dfrac{y-\beta}{\alpha}\right)$.
Un raisonnement analogue au cas précédent permet de conclure qu'une densité de Y *est la fonction :*

$$f_Y : y \mapsto = -\frac{1}{\alpha}f_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) = \frac{1}{|\alpha|}f_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right).$$

♢

3 Espérance mathématique. Variance. Ecart-type

3.1 Espérance mathématique

Définition 3.1. *Soit* X *une variable aléatoire continue de densité de probabilité* f *sur* I. *L'espérance mathématique de* X, *notée* E(X) *ou* μ, *est, s'il existe, le réel défini par :*

$$E(X) = \int_I tf(t)dt.$$

Remarque : En toute rigueur, il faut s'assurer que l'intégrale généralisée $\int_I |tf(t)|dt$ est convergente, ce qui le cas lorsque I est un segment et dans le cas des lois usuelles que nous étudierons cette année. Pour ceux que cela intéresse, vous pourrez rechercher des renseignements sur la *loi de Cauchy*, qui ne possède pas d'espérance mathématique.
Exemple
Soient a et b deux réels tels que : $a < b$. Soit f la fonction définie par :
$f : \begin{cases} t \mapsto \dfrac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a;b] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.
$E(X) = \displaystyle\int_a^b \frac{t}{b-a}dt = \frac{a+b}{2}$.

Définition Une variable aléatoire X est dite *centrée* si $E(X) = 0$.

Propriété 3.1. *: Linéarité de l'espérance.*
Soient X *et* Y *deux variables aléatoires à densité. Soient* λ *et* μ *deux réels donnés.*
Si les variables X, Y *possèdent une espérance, alors il en est de même pour* $\lambda X + \mu Y$ *et :*

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

Démonstration : Admise

Théorème 3.1. *: Théorème de transfert.*
Soit ϕ une fonction continue sur I, changeant un nombre fini de fois de signe sur I.
Soit f une fonction de densité sur I.
Sous couvert d'existence de l'intégrale ci-dessous, l'espérance de la variable $\phi(X)$ est donnée par :

$$E(\phi(X)) = \int_I \phi(t)f(t)dt.$$

Exemple
$E(X^2) = \int_I t^2 f(t)dt.$

3.2 Variance. Ecart-type

Définition 3.2. *Soit X une variable aléatoire continue possédant une espérance.*
On dit que X possède une variance, notée $V(X)$, si et seulement si la variable aléatoire $(X - E(X))^2$ possède une espérance. On a dans ce cas :

$$V(X) = E[(X - E(X))^2].$$

Théorème 3.2. $V(X) \geqslant 0$.

Démonstration . *Admise*$\diamondsuit$

Théorème 3.3. ***Théorème de Koenig-Huygens***
En reprenant les notations et les hypothèses de la définition précédente, nous avons :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Démonstration

$$V(X) = E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2. \quad \diamond$$

Propriété 3.2. *Soit X une variable aléatoire à densité possédant une variance.*
Alors pour tout couple $(a; b)$ de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, la variable aléatoire $aX + b$ possède une variance et :

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Démonstration
En exercice. Utiliser la linéarité de l'espérance.

Définition 3.3. *Soit X une variable aléatoire continue possédant une variance.*
L'écart-type σ_X de X est le réel défini par :

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}.$$

Définition 3.4. *Une variable X est dite réduite si $\sigma_X = 1$.*

Exemple : Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff
Soit X une variable aléatoire réelle. Soit a un réel donné strictement positif. Alors :
$P(|X - E(X)| > a) \leqslant \dfrac{Var(X)}{a^2}\cdot$

Démonstration $P(|X - E(X)| > a) = \displaystyle\int_{|X-E(X)|>a} f(t)dt.$

Or, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|t - E(X)| > a \Rightarrow 1 < \dfrac{t - E(x)}{a^2}$ donc :

$$P(|X - E(X)| > a) \leqslant \frac{1}{a^2}\int_{|X-E(X)|>a} f(t)dt \leqslant \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt\cdot$$

C'est-à-dire :
$P(|X - E(X)| > a) \leqslant \dfrac{Var(X)}{a^2}\cdot$ $\diamond$

Ceci signifie que plus σ - et donc $Var(X)$ - est petit plus les grandes valeurs de $|X - E(X)|$ sont improbables, et donc moins X est dispersée autour de son espérance.

4 Lois usuelles

4.1 Loi uniforme

Définition Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
La variable aléatoire réelle X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$ si elle a une densité f constante sur $[a; b]$ et nulle en dehors. On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a;b]}$$

Propriété 4.1. *La fonction de répartition F de X est affine par morceaux :*

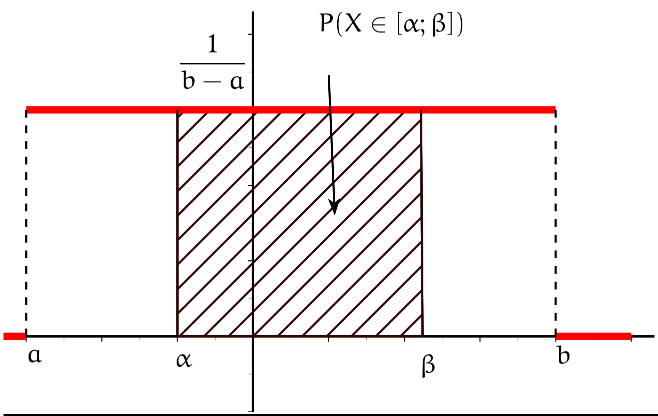
$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ si } a < x \leqslant b \\ 1 \text{ si } b < x \end{cases}.$$

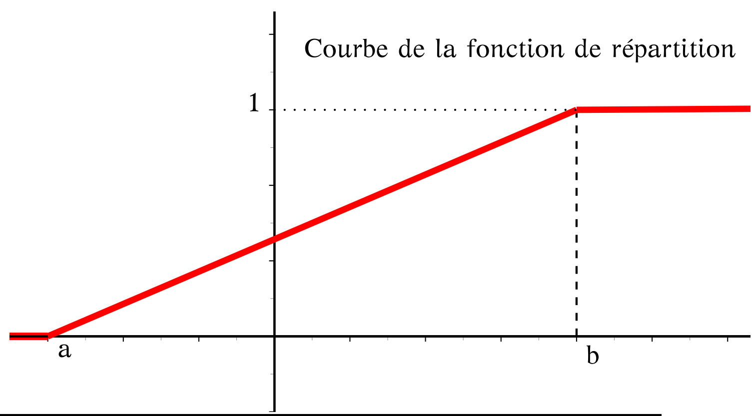
Théorème 4.1. • *Si $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$,* $\quad P(X \in [\alpha; \beta]) = \dfrac{\beta - \alpha}{b-a}$.
• *Pour tout intervalle J de $\mathbb{R}$:*

$$P(X \in J) = \frac{L([a; b] \cap J)}{L([a; b])},$$

où $L(J)$ est égal à la longueur de l'intervalle J.

Représentations graphiques :





Théorème 4.2. ***Espérance mathématique et variance***

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Démonstration . *L'espérance ne pose pas de problème et est laissée en exercice.*
Pour calculer la variance on utilise la formule de Koenig-Huygens :
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
Par le théorème de transfert : $E(X^2) = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b t^2 dt = \dfrac{1}{3} \dfrac{b^3 - a^3}{b-a} = \dfrac{a^2 + ab + b^2}{3}$.
D'autre part, $E(X)^2 = \dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{4}$.
Tout calcul fait : $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.
♢

4.2 Loi exponentielle

Les lois exponentielles sont souvent utilisées pour modéliser des temps d'attente : prochaine désintégration d'un atome de radium, la durée entre deux orages, deux crues...

Définition 4.1. *Soit λ un réel strictement positif.*
La variable aléatoire réelle X suit la loi exponentielle de paramètre λ si elle a pour densité

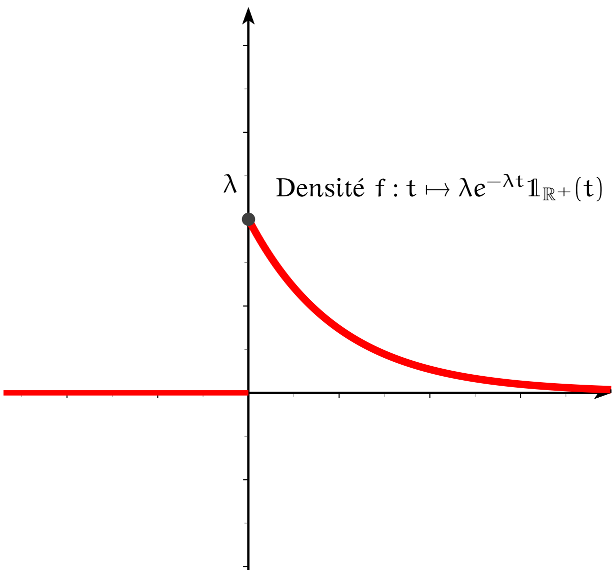
$$f : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t).$$

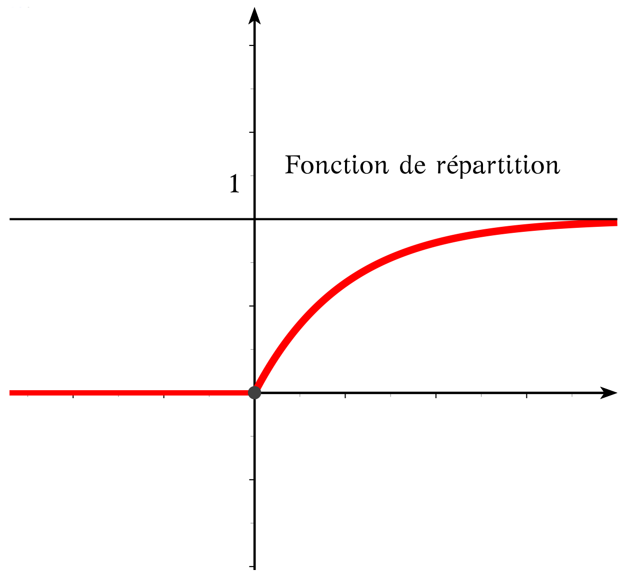
Théorème 4.3. • *Si* $[a;b] \subset \mathbb{R}^+$, $\qquad P(X \in [a;b]) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.
• $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad P(X > x) = e^{-\lambda x}$.
• *La fonction de répartition F est donnée par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = (1 - e^{-\lambda x})\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

Démonstration . *: Facile, laissée en exercice.* $\diamondsuit$

Représentations graphiques :





Théorème 4.4. ***Espérance mathématique et variance***

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Démonstration .
• *Pour calculer l'espérance mathématique, une intégration par parties donne :*

$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = [-te^{-\lambda t}]_0^x - \int_0^x -e^{-\lambda t} dt = -\lambda x e^{-\lambda x} - [\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}]_0^x = -\lambda x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}.$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.
• *Pour calculer la variance on utilise la formule de Koenig-Huygens :*
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
En utilisant le théorème de transfert :

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt.$$

Une double intégration par parties donne : $E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$.

D'autre part, $E(X)^2 = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

La conclusion est alors immédiate. ♢

Théorème 4.5. *Soit* X *une variable aléatoire à densité, suivant une loi exponentielle de paramètre* λ.
Pour tout (t,h) *de* $(\mathbb{R}^+)^2$ *:* $\quad P_{(X>t)}(X > t+h) = P(X > h)$.
On dit que X *suit une loi de durée de vie sans vieillissement , ou que* X *est sans mémoire.*

Exemple Soit X une variable aléatoire modélisant la durée de vie d'un composant électronique. Si celui-ci est encore en fonctionnement à l'instant t, la probabilité pour qu'il fonctionne encore dans h heures est la même qu'au début de sa vie (donc à $t = 0$).

Démonstration

$$P_{(X>t)}(X > t+h) = \frac{P[(X > t+h) \cap (X > t)]}{P(X > t)} = \frac{P(X > h)}{P(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(X > h).$$

Théorème 4.6. *Les lois exponentielles sont les seules lois continues sans mémoire.*

4.3 Lois normales

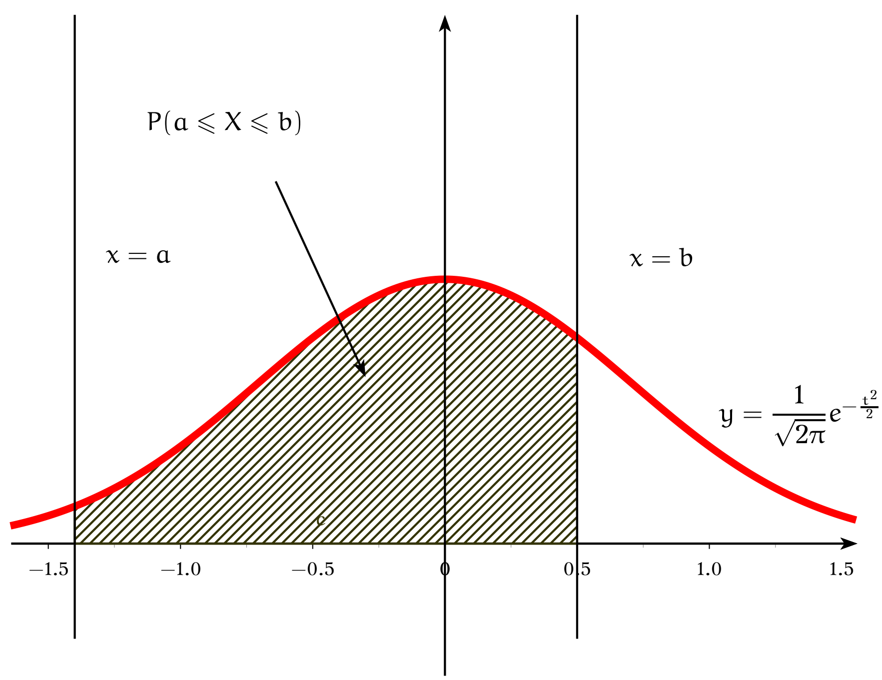
4.3.1 Loi normale centrée réduite

Définition 4.2. *On dit que la variable aléatoire* X *suit la loi normale centrée réduite* $\mathcal{N}(0;1)$ *si elle a pour densité la fonction f définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Remarque Il est en effet possible de démontrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$.

Représentation graphique



Théorème 4.7. *Soit* F *la fonction de répartition de* X.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(-x) = 1 - F(x).$$

Démonstration

En utilisant le changement de variable u=-t, nous avons :

$$F(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-x} e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{+\infty} e^{\frac{-u^2}{2}}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt = 1 - F(x).$$

Rappel

$$\forall [a;b] \subset \mathbb{R}, \qquad P(X \in [a;b]) = F(b) - F(a).$$

Le calcul de $P(X \in [a;b])$ se fait à partir d'une table indiquant les valeurs approchées de la fonction de répartition F dont le calcul direct est impossible (la fonction $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ n'ayant pas de primitive exprimable à l'aide des fonctions usuelles).

t	0.000	0.0100	0.0200	0.0300	0.0400	0.0500	0.0600	0.070	0.0800	0.0900
0.0000	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5159	0.51994	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1000	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2000	0.5793	0.5831	0.587	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6140
0.3000	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6330	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4000	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5000	0.6915	0.6950	0.6984	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6000	0.7257	0.7290	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7000	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.770	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8000	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9000	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1,000	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1,100	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1,200	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1,300	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1,400	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1,500	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1,600	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9345
1,700	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1,800	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1,900	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2,000	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2,100	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2,200	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2,300	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9816
2,400	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2,500	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2,600	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2,700	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2,800	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2,900	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Valeurs pour les grandes valeurs :

3,00	3,10	3,20	3,30	3,40	3,50	3,60	3,8	4,00	4,50
0,99865	0,99903	0,99931	0,99952	0,99966	0,99977	0,99984	0,99993	0,99997	0,999997

Exemples

- Pour déterminer F(0,45) il suffit de regarder la case située à l'intersection de la ligne 0.4 et 0.05 : on lit ainsi $F(0,45) \simeq 0,6736$.
- Pour déterminer F(-0,45), il suffit d'appliquer la formule $F(-0.45) = 1 - F(0.45) \simeq 0.3264$.
- Et donc par conséquent, $P(-0,45 < X < 0,45) = 0,6736 - 0,3264 = 0,3472$.

Théorème 4.8. *Si* X *suit la loi normale* $\mathcal{N}(0,1)$, *alors :*

$$E(X) = 0 \qquad \textit{et} \qquad V(X) = 1.$$

Démonstration

• La fonction $t \mapsto te^{-\frac{t^2}{2}}$ étant impaire, il en résulte que l'intégrale $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{x} te^{-\frac{t^2}{2}}dt$ est nulle quelle que soit la valeur de x. Par conséquent , $E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt = 0$.

• Par application du théorème de Koenig-Huygens (l'espérance de X est nulle) et du théorème de transfert, et sous couvert de la convergence de l'intégrale suivante, nous avons successivement que :

$$V(X) = E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Posons maintenant pour tout $x > 0$: $I(x) = \int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

Posons alors : $u(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ et $v'(t) = \sqrt{2\pi}$. En appliquant la formule d'intégration par parties, il vient :

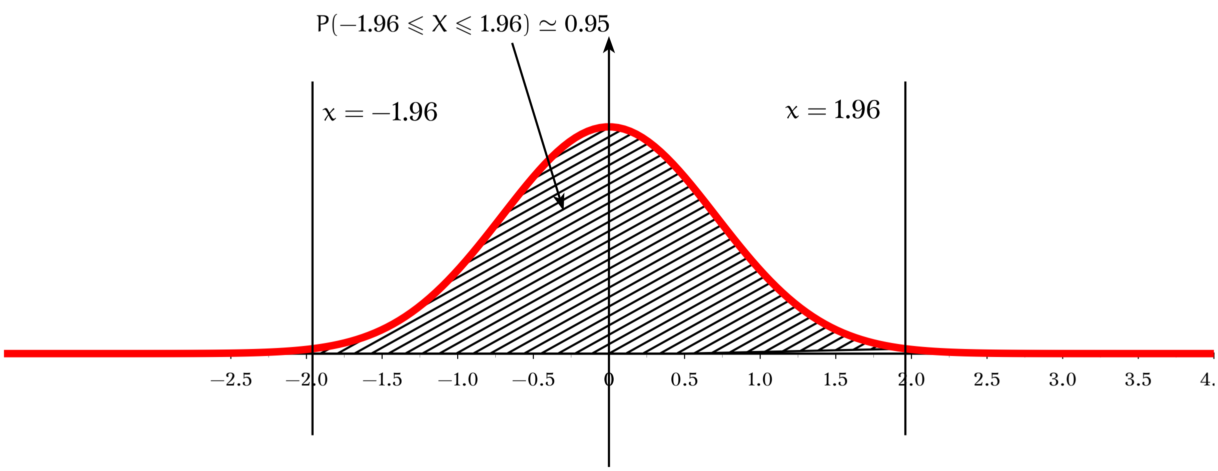
$$I(x) = \left[\frac{t}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_{-x}^{x} - \int_{-x}^{x} \frac{-t^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

En faisant alors tendre x vers $+\infty$, nous obtenons finalement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 1.$$

Théorème 4.9. *Soit* X *une variable aléatoire suivant la loi normale* $\mathcal{N}(0;1)$.
Pour tout $\alpha \in]0;1[$, *il existe un unique réel positif* u_α *tel que* $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$.
Valeurs approchées à connaître :
$u_{0,05} \simeq 1,96$ *et* $u_{0,01} \simeq 2,58$.

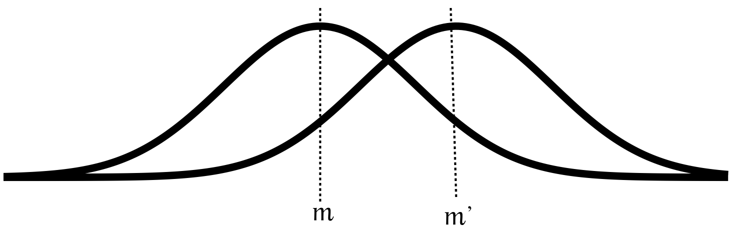
Interprétation graphique : L'aire hachurée est approximativement égale à 0.95 u.a.



4.3.2 Lois normales $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$

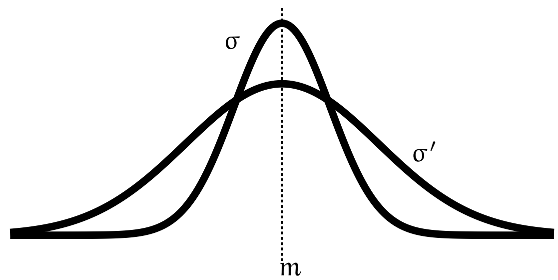
Définition
Soit $(\sigma; m)$ un couple de réels strictement positifs.
On dit que la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$, ou loi gaussienne, si elle a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}.$$



σ constant

$m < m'$



$\sigma < \sigma'$

Interprétation graphique de m et de σ

La courbe représentative est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = m$.
σ caractérise la dispersion de la distribution. Plus il est grand, plus la distribution est étalée de part et d'autre de m.
Le théorème suivant permet de préciser le lien entre une loi $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$ et la loi $\mathcal{N}(0; 1)$:

Théorème 4.10. *Si X suit la loi $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$, alors $\dfrac{X-m}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.*

Démonstration . $P\left(\dfrac{X-m}{\sigma} \in [a; b]\right) = P(X \in [m + a\sigma; m + b\sigma]) = \displaystyle\int_{m+a\sigma}^{m+b\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt.$
Effectuons le changement de variable défini par $u = \dfrac{t-m}{\sigma}$ *:* $du = \dfrac{1}{\sigma} dt$ *et :*
$P\left(\dfrac{X-m}{\sigma} \in [a; b]\right) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$ ♢

Conséquences

Théorème 4.11. *Si X suit la loi $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$, alors :* $E(X) = m$ *et* $V(X) = \sigma^2$.

Exercice 58.
X suit la loi normale $\mathcal{N}(6, 25)$. Donner une valeur approchée de $P(X \leqslant 8,5)$.
Solution $\dfrac{X-6}{5}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(1; 0)$.
Nous avons donc : $P(X \leqslant 9) = P\left(\dfrac{X-6}{5} \leqslant \dfrac{1}{2}\right) \simeq 0,6915.$

Valeurs à connaître
Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$, alors :
- $P(X \in [m - \sigma, m + \sigma]) \simeq 0,68$;
- $P(X \in [m - 2\sigma, m + 2\sigma]) \simeq 0,954$;
- $P(X \in [m - 3\sigma, m + 3\sigma]) \simeq 0,997$.

4.4 Théorème de Moivre-Laplace

Théorème 4.12. ***Théorème de Moivre-Laplace***
Soit $p \in]0;1[$ *et* (S_n) *une suite de variables aléatoires telles que pour tout* n, S_n *suit la loi binomiale* $\mathcal{B}(n,p)$.
Alors pour tout couple $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a \leqslant b$, *on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n - np}{\sigma} \in [a,b]\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

où $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Démonstration Admise. Elle peut-être trouvée dans le cas de $p = 0.5$ à l'adresse suivante :
$http://www.ac-paris.fr/portail/upload/docs/application/pdf/2012-06/demo_moivre_term_207043.pdf$
(il est conseillé d'en étudier au moins les interprétations graphiques).

4.5 Approximation des loi binomiales par des lois normales

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0;1[$. Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n,p)$. Lorsque n est "assez grand", p "ni trop proche de 0, ni trop proche de 1" on peut approcher la loi de X_n en utilisant la loi normale centrée réduite , en écrivant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leqslant k \leqslant n, P(X_n = k) \simeq F\left(\frac{k + 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - F\left(\frac{k - 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Où F désigne la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0;1)$.
Voir le principe de correction de continuité dans le livre à la page 411.

Cette approximation est valable lorsque : $\boxed{n \geqslant 30,\ np \geqslant 5 \,\text{et}\, n(1-p) \geqslant 5}$

Exemple [b]
On effectue un contrôle de fabrication sur des pièces dont une proportion $p = 0,02$ est défectueuse.

1. On contrôle un lot de 1000 pièces :
   Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de pièces défectueuses parmi les 1000 pièces du lot.
   Quel est la loi de X ? Quelle est son espérance ? Son écart-type ?
2. En utilisant une approximation, calculer $P(18 \leqslant X \leqslant 22)$.

Correction

1. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(1000; 0.02)$. Son espérance mathématique est 20 et son écart-type est $\sqrt{19,6}$. [a]
2. $np = 20 > 5$ et $n(1-p) = 980 > 5$, il est donc possible d'approcher la loi de X par celle d'une loi normale de même espérance et écart-type que X, soit de $\mathcal{N}(20; 19,6)$:

$$P(18 \leqslant X \leqslant 22) = P\left[\frac{17,5-20}{\sqrt{19,6}} \leqslant \frac{X-20}{\sqrt{19,6}} \leqslant \frac{22,5-20}{\sqrt{19,6}}\right] \simeq 0,428.$$

   Un calcul direct avec les coefficients binomiaux aurait donné une probabilité égale approximativement à $0,427$.

b. Source : Site exo7, par exemple à l'adresse exo7.emath.fr/ficpdf/fic00154.pdf
a. Rappelons que si X suit une loi $\mathcal{B}(n,p)$, alors $E(X) = np$ et que $Var(X) = \sigma^2 = np(1-p)$.

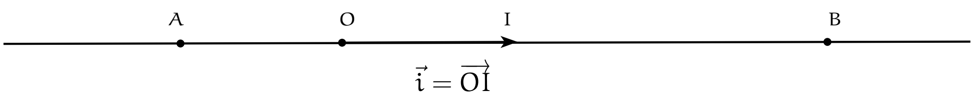
Septième partie

Mesures algébriques

1 Définition

Soient A et B deux points d'un axe $(O, \vec{i})$. La *mesure algébrique* du vecteur $\overrightarrow{AB}$ relativement au vecteur unitaire $\vec{i}$ de cet axe est le réel noté $\overline{AB}$ défini par :

$$\overline{AB} = x_B - x_A.$$



Exercice 59. Soient (O, I) et (O', I') deux repères de la droite (AB). Montrer qu'il existe deux réels α et β avec α non nul, tels que tout point M de (AB) d'abscisse x dans le repère (O, I) a pour abscisse $x' = ax + b$ dans le repère (O', I')

2 Propriétés

A, B et C désignent trois points quelconques d'un même axe $(O, \vec{i})$. Les démonstrations sont laissées en exercice (utiliser les abscisses).

Propriété 2.1.
- $\overline{BA} = -\overline{AB}$
- $\overline{AB}^2 = AB^2$
- *Relation de Chasles :* $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$
- $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$
- $\overline{AB}$ *est indépendant de l'origine choisie sur l'axe*
- $\overline{AB} = 0 \Leftrightarrow A = B$
- $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\vec{i}$
- $x_B = \dfrac{\overline{OM}}{\overline{OI}}$

Propriété 2.2. ***Quotient de mesures algébriques***
Soient A, B, C *et* D *quatre points alignés distincts deux à deux. Alors le quotient* $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ *ne dépend pas du repère choisi sur la droite* (AB).

Démonstration . *Soient* (O, I) *et* (O', I') *deux repères de la droite* (AB). *D'après l'exercice précédent, il existe* α *et* β *réels que tout point* M *de* (AB) *d'abscisse* x *dans le repère* (O, I) *a pour abscisse* $x' = ax + b$ *dans le repère* (O', I'). *Il en résulte donc que :*

$$\frac{\overline{AB}_{(O',I')}}{\overline{CD}_{(O',I')}} = \frac{b' - a'}{d' - c'} = \frac{(\alpha b + \beta) - (\alpha a + \beta)}{(\alpha d + \beta) - (\alpha c + \beta)} = \frac{b - a}{d - c} = \frac{\overline{AB}_{(O,I)}}{\overline{CD}_{(O,I)}}$$

$\diamondsuit$

Cette dernière propriété est fondamentale pour énoncer le théorème de Thalès (cf. infra)

3 Barycentres

Dans cette section, nous nous placerons, sauf mention contraire, indifféremment dans le plan ou dans l'espace qui seront notés E.

3.1 Barycentre d'un système de deux points pondérés

3.1.1 Définitions

Théorème 3.1. *Soit* $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ *un système de deux points pondérés tels que* $\alpha+\beta\neq 0$. *Il existe un unique point* G *tel que :*

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}.$$

Définition 3.1. G *est appelé barycentre du système* $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$.

Démonstration Il suffit d'utiliser la relation de Chasles :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}=\beta\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{(\alpha+\beta)}\overrightarrow{AB}.$$

Cette dernière égalité prouve l'existence et l'unicité de G [a].

Définition 3.2. *Si* $\alpha=\beta\neq 0$, G *est appelé isobarycentre de* A *et de* B.

Propriété 3.1. *L'isobarycentre de deux points* A *et* B *est le milieu du segment* $[AB]$.

Remarques

1. Si A et B sont confondus et si $\alpha+\beta\neq 0$, alors G existe et est confondu avec A et B.
2. Si $\alpha=0$ et $\beta\neq 0$, alors G existe et est confondu avec B.
3. Si $\alpha\neq 0$ et $\beta=0$, alors G existe et est confondu avec A.
4. Si $\alpha+\beta=0$, nous avons dans ce cas :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Leftrightarrow\alpha\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{0}.$$

- Si $\alpha=0$ ou si A et B sont confondus, l'égalité précédente est équivalente à $\vec{0}=\vec{0}$. Dans ce cas, tout point M vérifie l'égalité $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.
- Si $\alpha\neq 0$ et si $A\neq B$, alors $\alpha\overrightarrow{BA}\neq\overrightarrow{0}$. Dans ce cas, il n'existe aucun point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

3.1.2 Propriétés

Soit $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ un système de deux points pondérés tels que $\alpha+\beta\neq 0$. Soit G le barycentre de ce système.

Propriété 3.2. *Pour tout point* M, *on a :*

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}.$$

Propriété 3.3. • *Si* A *et* B *appartiennent à un plan muni d'un repère quelconque, alors :*

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}\qquad\text{et}\qquad y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}.$$

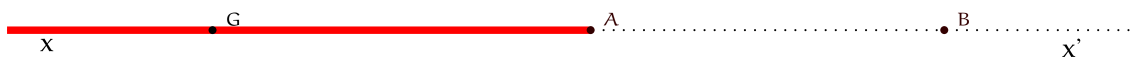
•*Si* A *et* B *appartiennent à l'espace muni d'un repère quelconque, alors :*

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}\qquad\text{et}\qquad y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\qquad\text{et}\qquad z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}.$$

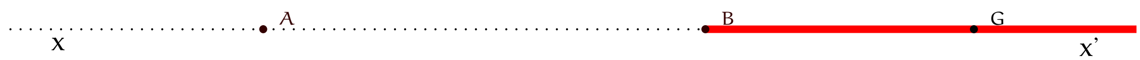
x_G *(reps.* y_G *; resp* z_G*) est donc la moyenne pondérée des réels* x_A *et* x_B *(resp. de* y_A *et* y_B *; resp. de* z_A *et* z_B*) affectés des coefficients* α *et* β.

a. Rappelons cette propriété essentielle, vraie dans le plan et l'espace :
Soit $\vec{u}$ un vecteur donné et soit A un point quelconque. Il existe alors un unique point B tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$

Propriété 3.4. ***Position de*** G
Ici, A et B sont distincts.
• *G appartient à la droite (AB)*
• *Si α et β sont de même signe, alors G appartient au segment $[AB]$. Dans ce cas, G est plus près du point ayant le plus grand poids en valeur absolue que de l'autre point.*
• *Si α et β sont de signes contraires, alors G est à l'extérieur de $[AB]$.*
Plus précisément :
G appartient à $(xA]$ si $|\alpha| > |\beta|$:



G appartient à $[Bx')$ si $|\alpha| < |\beta|$:



Propriété 3.5. ***homogénéité du barycentre***
Soit k un réel non nul. Alors G est aussi barycentre du système $\{(A, k\alpha), (B, k\beta)\}$.

Exemple : les systèmes $\{(A, -4), (B, -8)\}$; $\{(A, 4), (B, 8)\}$; $\{(A, 1), (B, 2)\}$ ont le même barycentre.

Propriété 3.6. *Soient A et B deux points distincts.*
• *L'ensemble des barycentres des points A et B est la droite (AB).*
• *Le segment $[AB]$ est l'ensemble des barycentres de A et B affectés de coefficients positifs ou nuls. C'est aussi l'ensemble des barycentres des systèmes $\{(A, t), (B, 1-t)\}$ lorsque t varie dans $[0; 1]$.*

3.2 Barycentre d'un système de trois points pondérés

3.2.1 Définitions

Théorème et définition
Soit $\{(A, \alpha), (B, \beta); (C, \gamma)\}$ un système de trois points pondérés tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.
Il existe un unique point G tel que :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

G est appelé barycentre du système $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$.

Définition 3.3. *Si $\alpha = \beta = \gamma \neq 0$, G est appelé isobarycentre des points A,B et C.*

3.3 Propriétés

Soit $\{(A, \alpha), (B, \beta); (C, \gamma)\}$ un système de trois points pondérés tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Soit G le barycentre de ce système.

Propriété 3.7. *Pour tout point M, on a :*

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}.$$

Propriété 3.8. *Si* A , B *et* C *appartiennent à un plan muni d'un repère quelconque, alors :*

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \qquad \text{et} \qquad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Si A,B *et* C *appartiennent à l'espace muni d'un repère quelconque, alors :*

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \qquad \text{et} \qquad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \qquad \text{et} \qquad z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

x_G *(resp.* y_G *; resp.* z_G*) est donc la moyenne pondérée des réels* x_A, x_B *et* xC *(resp. de* y_A, y_B *et* y_C *; resp. de* z_A, z_B *et* z_C*) affectés respectivement des coefficients* α,β *et* γ.

Propriété 3.9. ***Position de*** G
- *Si* $A = B = C$, *alors G est confondu avec ces trois points.*
- *Si* A,B *et* C *sont alignés, alors* G *appartient à la droite* (AB).
- *Si Si* A,B *et* C *ne sont alignés, alors* G *appartient au plan* (ABC).

Ce dernier cas -quoique vrai dans le plan- n'a de réel intérêt que dans l'espace : A,B,C et G sont coplanaires.

Propriété 3.10. ***homogénéité du barycentre***
Soit k *un réel non nul. Alors* G *est aussi barycentre du système* $\{(A, k\alpha), (B, k\beta); (C, k\gamma)\}$.

Théorème 3.2. ***Théorème du barycentre partiel- ou d'associativité du barycentre***
Soit $\{(A, \alpha), (B, \beta); (C, \gamma)\}$ *un système de trois points pondérés tels que* $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, *de barycentre* G.
Si $\alpha+\beta \neq 0$, *et si* G' *est le barycentre de* $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$, *alors* G *est le barycentre du système* $\{(G', \alpha+\beta), (C, \gamma)\}$.

Conséquence
L'isobarycentre de trois points A,B et C est le centre de gravité du triangle (ABC).

Propriété 3.11. *Soient* A, B *et* C *trois points non alignés. L'ensemble des barycentres des points* A, B *et* C *est le plan* (ABC).

3.4 Barycentre d'un système de n points pondérés

3.4.1 Fonction vectorielle de Leibniz

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des vecteurs formés par les points de E.

3.4.2 Définition

Définition 3.4. *Soit* n *un entier supérieur ou égal à 1, et* $(A_i; \alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *un système de* n *points pondérés de* E.
La fonction vectorielle de Leibniz f *associée au système* $(A_i; \alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *est l'application définie par :*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \mapsto & \overrightarrow{f(M)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_k}. \end{array} \right.$$

3.4.3 Propriétés

Propriété 3.12.
• *Pour tout couple de points* M *et* M' *, on a :*

$$\overrightarrow{f(M)} - \overrightarrow{f(M')} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MM'}.$$

• *Donc si la somme* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ *est nulle, la fonction* f *est constante.*

Théorème 3.3. *Soit* n *un entier supérieur ou égal à 1, et* $(A_i; \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *un système de* n *points pondérés de* E.
On suppose que la somme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ *est non nulle.*
La fonction vectorielle de Leibniz f *associée au système* $(A_i; \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *est une bijection de* E *sur* $\mathcal{E}$*, c'est- à dire :*

$$\forall \overrightarrow{u} \in \mathcal{E}, \exists!\, M \in E, \overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{u}.$$

En particulier, il existe un unique point G *tel que* $\overrightarrow{f(G)} = \overrightarrow{0}$*, c'est-à-dire tel que* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_k} = \overrightarrow{0}$.

Définition 3.5. *G est appelé barycentre du système* $(A_i; \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Propriété 3.13.

$$\forall M \in E,\ \overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i) \overrightarrow{MA_i}$$

Propriété 3.14. *Si* E *est muni d'un repère dans lequel les points* $(A_i; \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *ont pour coordonnées* $(x_i; y_i)$ *(ou* $(x_i; y_i; z_i)$ *si* E *représente l'espace) ; alors* G *a pour coordonnées :*

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \quad ; \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \quad \text{et éventuellement} \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$

Propriété 3.15. ***Homogénéité du barycentre***
Soit n *un entier supérieur ou égal à 1, et* $(A_i; \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *un système de* n *points pondérés de* E *possédant un barycentre* G*. Soit* k *un réel non nul.*
Alors, G *est barycentre du système* $(A_i; k\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Propriété 3.16. ***Associativité du barycentre***
Soit n *et* p *des entiers tels que* $p \geqslant 3$ *et* $2 \geqslant p \geqslant n - 1$.
Soit $(A_i; \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *un système de* n *points pondérés de* E *possédant un barycentre* G.
On suppose de plus que la somme $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i$ *est non nulle ; soit* G' *le barycentre du système* $(A_i; \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$.
Alors G *est le barycentre du système* $\{(G', \sum_{i=1}^{p} \alpha_i); (A_{p+1}, \alpha_{p+1}); \cdots; (A_n, \alpha_n)\}$.

3.5 Coordonnées barycentriques

3.5.1 Dans le plan

Donnons-nous trois points A, B et C non alignés dans le plan et rappelons la dernière propriété du paragraphe **2.2** :

Soient A, B et C trois points non alignés. L'ensemble des barycentres des points A, B et C est le plan (ABC). Ceci signifie que pour tout point M du plan , il existe un triplet $(\alpha;\beta;\gamma)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que M est le barycentre $\{(A,\alpha),(B,\beta);(C,\gamma)\}$.

Définition 3.6. *Le triplet $(\alpha;\beta;\gamma)$ est appelé coordonnées barycentriques de M.*
Un point donné possède donc une infinité de coordonnées barycentriques en vertu de la propriété d'homogénéité du barycentre.

Il est possible de contourner ce problème grâce à la définition suivante :

Définition 3.7. *Tout point M possède un unique triplet de coordonnées barycentriques dont la somme est égale à 1. Ces coordonnées sont les coordonnées barycentriques normalisées de M.*

3.5.2 Dans l'espace

Cette partie est laissée en exercice au lecteur et n'est qu'une réécriture de ce qui précède. Il convient de prendre pour base quatre points A, B, C et D non coplanaires.

3.6 Ensembles de niveau

Définition 3.8. *Soit f une application de E dans $\mathbb{R}$ et k un réel.*
On appelle ensemble de niveau k l'ensemble des antécédents de k par f.

3.6.1 Etude de $f(M)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i {MA_i}^2$

Nous reprenons ici les notations de la partie précédente.
Lemme

$$\forall (M,M')\in E^2,\ f(M)=(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i)MM'^2+2\overrightarrow{MM'}\cdot(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{M'A_i})+f(M') \qquad (1)$$

Démonstration Laissée en exercice. Utiliser les égalités suivantes :

$$AB^2=\overrightarrow{AB}^2=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})^2=\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}^2=AC^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}+CB^2$$

Théorème 3.4. ***Cas*** $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$
Soit G le barycentre du système $(A_i;\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$
L'égalité (1) donne la formule de Leibniz :

$$\forall M\in E, f(M)=(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i)MG^2+f(G).$$

Dans le plan :
L'ensemble de niveau k de f est soit l'ensemble vide, soit réduit à $\{G\}$, soit un cercle de centre G.
Dans l'espace :
L'ensemble de niveau k de f est soit l'ensemble vide, soit réduit à $\{G\}$, soit une sphère de centre G.

Théorème 3.5. ***Cas*** $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$

• *Si* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i} = \overrightarrow{0}$, *l'ensemble de niveau* k *de* f *est soit l'ensemble vide, soit* E .

• *Si* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i} \neq \overrightarrow{0}$, *l'ensemble de niveau* k *de* f *est :*

dans le plan : une droite orthogonale à $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i}$ *;*

dans l'espace : un plan orthogonal à $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i}$.

3.6.2 Etude de $g(M) = \dfrac{MA}{MB}$

Soit A et B deux points distincts.

Théorème 3.6. *1.* ***Si*** $k < 0$

L'ensemble de niveau k *de* f *est vide*

2. ***Si*** $k = 1$

L'ensemble de niveau k *de* f *est alors :*

• *dans le plan : la médiatrice de* $[AB]$.

• *dans l'espace : le plan médiateur de* $[AB]$.

3. ***Si*** $k \in \mathbb{R} - \{1\}$

Soit G_1 *le barycentre de* $\{(A, 1), (B, k)\}$ *et* G_2 *le barycentre de* $\{(A, 1), (B, -k)\}$.

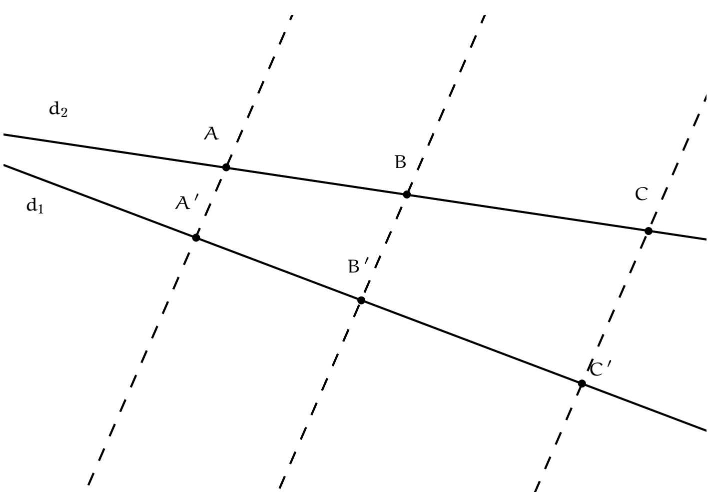
L'ensemble de niveau k *est alors :*

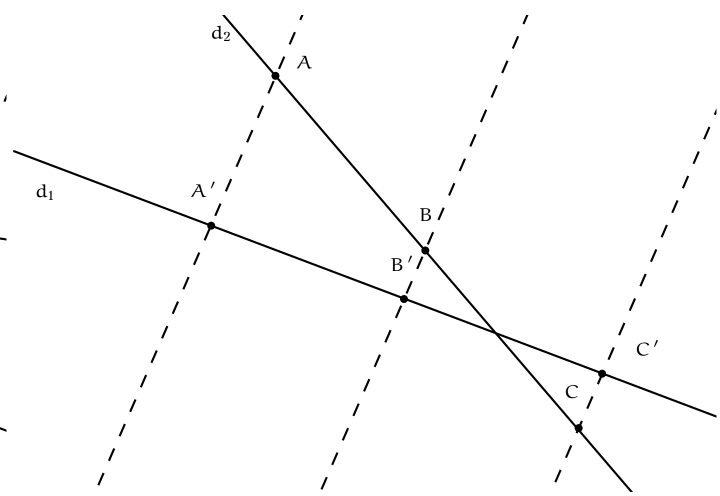
• *dans le plan : le cercle de diamètre* $[G_1G_2]$.

• *dans l'espace : la sphère de diamètre* $[G_1G_2]$.

4 Théorème de Thalès

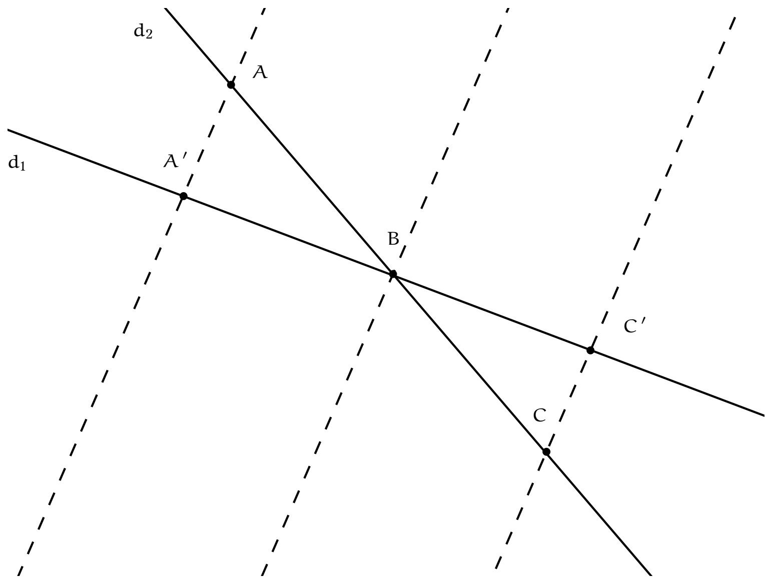
4.1 Enoncé





Si les droites d_1 et d_2 sont coupées respectivement en A, B, C et en A', B', C' par des droites parallèles, alors :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}.$$

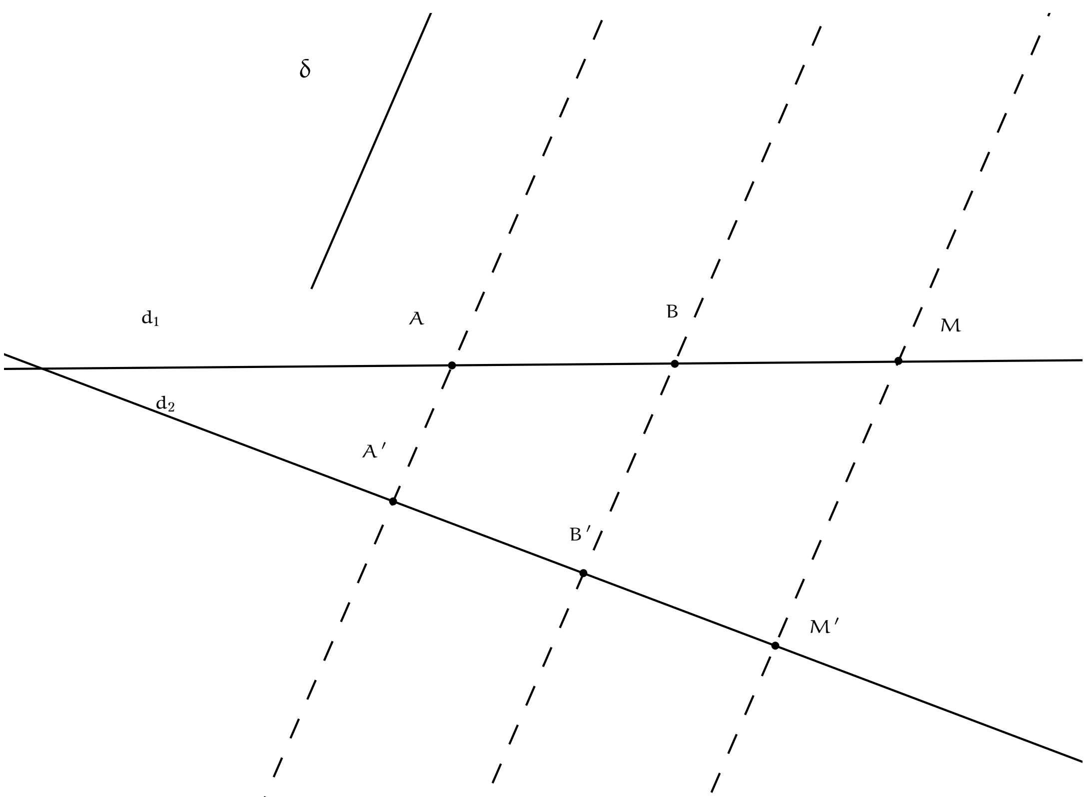


Dans le cas où les droites d_1 et d_2 sont sécantes en B, nous pouvons écrire, :

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BC'}}{\overline{BA'}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{AA'}}.$$

5 Théorème de Thalès et projection

5.1 Définition et propriétés d'une projection



Soient d_1 et d_2 deux droites du plan et soit une **direction de droite** δ, distincte de celle de d_2. A tout point M de d_1, on peut associer le point M', intersection de d_2 avec la droite de direction δ passant par M. L'application $p : M \mapsto M'$ est appelée **projection** de d_1 sur d_2 parallèlement à δ : M' est appelé le projeté de M.

Propriété 5.1. • *Lorsque* d_1 *est de direction* δ*, tous les points de* d_1 *ont la même image par* p *qui est l'intersection de* d_1 *et* d_2*. Dans ce cas la projection* p *est dite constante.*

• *Lorsque* d_1 *n'est pas de direction* δ*, deux points distincts de* d_1 *ont des projetés distincts. De plus, tout point de* d_2 *possède un unique antécédent par* p*. On dit alors que* ***p réalise une bijection de*** d_1 ***sur*** d_2*.*

5.2 Autre version de l'énoncé du théorème de Thalès - réciproque

Pour tout point M de d_1 et tout point M' de d_2 :

1. Si M' est le projeté de M, l'abscisse de M' dans le repère $(A';\overrightarrow{A'B'})$ est égale à celle de M dans le repère $(A;\overrightarrow{AB})$.
2. Réciproquement, si M et M' ont la même abscisse dans les repères respectifs $(A';\overrightarrow{A'B'})$ et $(A;\overrightarrow{AB})$, alors M' est le projeté de M. En particulier, cela signifie que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles.

6 Exercices d'application

Exercice 60. Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles d'un plan (P) tels que les droites (AA'), (BB') et (CC') soient concourantes en un point I.
On suppose que les droites (BC) et $(B'C')$ se coupent en A_1, (CA) et $(C'A')$ en B_1, (AB) et $(A'B')$ en C_1.
On se propose de démontrer que les points A_1, B_1 et C_1 sont alignés.

1. Montrer qu'il existe des couples de coefficients (α, α'), (β, β') et (γ, γ') tels que I soit le barycentre de :
   - $\{(A, \alpha); (A', \alpha')\}$ et $\alpha + \alpha' = 1$
   - $\{(B, \alpha); (B', \alpha')\}$ et $\beta + \beta' = 1$
   - $\{(C, \gamma); (C', \gamma')\}$ et $\gamma + \gamma' = 1$
2. Montrer alors que : $\beta\overrightarrow{IB} - \gamma\overrightarrow{IC} = \gamma'\overrightarrow{IC'} - \beta'\overrightarrow{IB'} = (\beta - \gamma)\overrightarrow{IA_1}$.
   En déduire que : $(\beta - \gamma)\overrightarrow{IA_1} + (\gamma - \alpha)\overrightarrow{IB_1} + (\alpha - \beta)\overrightarrow{IC_1} = \overrightarrow{0}$.
3. Conclure.

Exercice 61.
Première partie
Soit ABC un triangle non isocèle. On appelle (D_a) la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ et (Δ_a) la bissectrice extérieure de $\widehat{A}$.
On note I_a le point d'intersection de (D_a) et de (BC), A' le pied de la hauteur issue de A, H_B et H_C les projections respectives de I_a sur $[AC]$ et $[AB]$. On note $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$.

1. Exprimer de deux façons différentes les aires des triangles ABI_a et ACI_a. Montrer que I_aB et I_aC sont respectivement proportionnelles à c et b dans le même rapport.
2. Montrer que I_a est barycentre des points B et C affectés respectivement des coefficients b et c.
3. Montrer que (Δ_a) coupe (BC) en un point J_a extérieur à $[BC]$. Montrer que J_a es barycentre du système $\{(B, b); (C; -c)\}$.

Deuxième partie

1. Soit (C_a) l'ensemble des points tels que : $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{c}{b}$.
   Montrer que (C_a) est le cercle de diamètre $[I_aJ_a]$, et qu'il passe par A. On notera Ω_a son centre et on l'appellera cercle d'Appolonius relatif au sommet A.
2. Montrer la relation suivante : $\overline{\Omega_a B} \times \overline{\Omega_a C} = \Omega_a {I_a}^2 = \Omega_a {J_a}^2$.
3. On définit de même (C_b) et (C_c). Dans la suite, on suppose que $a < b < c$.
   (a) Montrer que les cercles (C_a) et (C_b) sont sécants. On appelle K et L leurs d'intersection.
   (b) Montrer que les points K et L appartiennent à (C_c). En déduire que le trois cercles d'Appolonius sont sécants en K et L.
   (c) Montrer alors que Ω_1, Ω_2 et Ω_3 sont alignés.

Exercice 62.
Dans le plan on considère un triangle ABC rectangle en A. Soit a un réel strictement positif. On suppose que $AB = a$ et $AC = 2a$. Soit I le milieu de $[AC]$.

1. Soit J le barycentre de $\{(A, 3); (C; -1)\}$. Montrer que A est le milieu de $[IJ]$.
2. Déterminer le point G barycentre des points A, B et C affectés des coefficients 3,2 et -1.
3. Déterminer l'ensemble des points tels que :

$$3AM^2 + 2BM^2 - CM^2 = 6a^2.$$

   On pourra remarquer que I appartient à cet ensemble.

Huitième partie

Les matrices

1 Généralités sur les matrices

Définitions
Une matrice A de taille $n \times p$ (ou de format (n,p)) est un tableau de nombres réels composé de n lignes et p colonnes.
Une matrice s'écrit donc sous la forme :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Les nombres $a_{ij} (1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p)$ sont appelés les coefficients de la matrice.
Le coefficient a_{ij} est à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne.
L'ensemble des matrices à coefficients réels de taille $n \times p$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Remarque : Une matrice de taille $n \times p$ contient np coefficients.

Exemples

- $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 3×4. $a_{23} = 5$; $a_{32} = 0$; $a_{12} = 4 \cdots$
- $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 4×3. $a_{23} = 0$; $a_{32} = 5$; $a_{42} = 3 \cdots$
- $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

Cas particuliers

- Si $n = p$, A est une matrice carrée de taille -ou d'ordre- n.

Exemples

- $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de dimension 3×3.
- $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice **identité** de taille 4.

L' ensemble des matrices carrées à coefficients réels d'ordre n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si $p = 1$, A est une matrice colonne (ou vecteur colonne).

Exemple

$$A=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Si $n = 1$, A est une matrice ligne (ou vecteur ligne).

Exemple :

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition
Deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont égales si elles ont la même dimension $n \times p$ et si :

$$\forall (i;j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ a_{ij} = b_{ij}.$$

2 Opérations sur les matrices

2.1 Transposition

Définition 2.1. *La transposée d'une matrice* A *de taille (n ;p) est la matrice de taille (p ;n) notée* ${}^tA$ *ou* A^t *obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.*
Si $B = {}^tA$, *alors,* $\forall (i;j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], b_{i;j} = a_{j;i}$.

Exemples

• Si A= $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors : ${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

• Si A= $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors : ${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

• Si A= $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, alors : ${}^tA = A$.

Définition 2.2. *Une matrice* A *égale à sa transposée est appelée matrice* symétrique.
Une telle matrice est nécessairement carrée.

Exercice 63. Donner un exemple de matrice antisymétrique, c'est-à-dire telle que ${}^tA = -A$

2.2 Multiplication d'une matrice par un réel

Définition 2.3. *Soit* $A = (a_{ij})$ *une matrice de taille* $n \times p$ *et soit* λ *un réel quelconque. La matrice* $M = \lambda A = (m_{ij})$ *est la matrice de taille* $n \times p$ *définie par :*

$$\forall (i;j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], m_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Exemple

Si A= $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors : 3A= $\begin{pmatrix} 9 & 12 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 15 & -9 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Propriétés

$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$:
•$1A = A$
•$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
•$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$
•$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

2.3 Addition de deux matrices

Définition Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices **de même taille** $n \times p$.
La matrice $C = A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ de coefficients c_{ij} définis par :

$$\forall (i;j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 & 6+1 \\ -1+5 & 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Attention :

• L'addition de deux matrices n'ayant pas la même taille n'a pas de sens!

Propriété 2.1. $\forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}^3(\mathbb{R})$ *:*
• *La matrice nulle O est l'élément neutre de l'addition :* $O + A = A + O = A$
•$A + B = B + A$ *: l'addition des matrices est commutative.*
•$(A + B) + C = A + (B + C)$ *: l'addition des matrices est associative.*

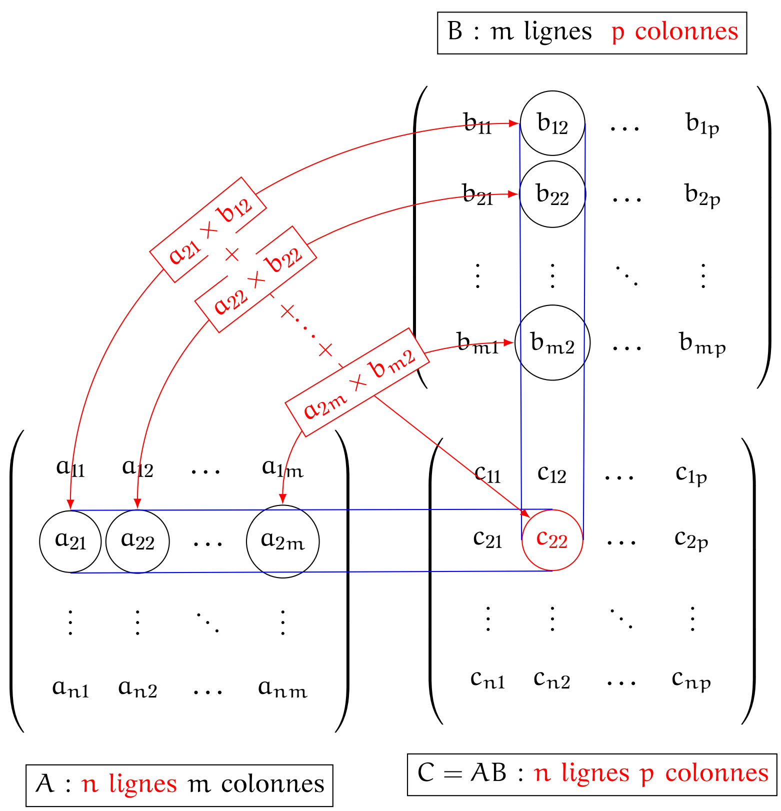
Démonstration . *Laissée en exercice*

Exercice 64. Montrer que $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 dont on donnera une base.

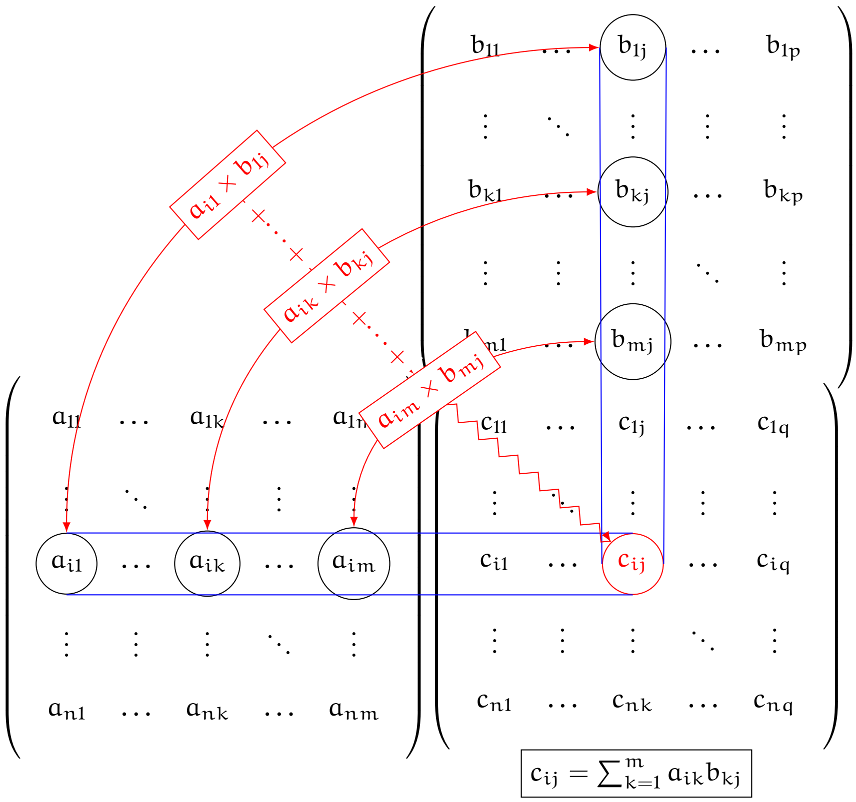
2.4 Multiplication de deux matrices

Définition 2.4. *Soit* A *une matrice de taille* $n \times m$ *et soit* B *une matrice de taille* $m \times p$ *.*
Le produit de A *par* B*, noté* $A \cdot B$ *ou* AB*, est la matrice de taille* $n \times p$ *construite de la manière suivante :* :

Exemple : Calcul de c_{22}



Généralisation : Calcul de c_{ij}



Exemples

• Si A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, alors AB= $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 23 & -9 \end{pmatrix}$ et BA=$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 7 & -16 \end{pmatrix}$

Calcul de AB

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 23 & -9 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{cases} c_{11} = 1 \times 5 + 2 \times -2 = 1 \\ c_{21} = 3 \times 5 + (-4) \times (-2) = 23 \\ c_{12} = 1 \times 1 + 2 \times 3 = 7 \\ c_{22} = 3 \times 1 + (-4) \times 3 = -9 \end{cases}$$

Calcul de BA :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 7 & -16 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{cases} c_{11} = 5 \times 1 + 1 \times 3 = 8 \\ c_{21} = -2 \times 1 + 3 \times 3 = 7 \\ c_{12} = 5 \times 2 + 1 \times -4 = 6 \\ c_{22} = -2 \times 2 + 3 \times -4 = -16 \end{cases}$$

• Si A= $\begin{pmatrix} 3 & 7 \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, alors AB= $\begin{pmatrix} -17 \end{pmatrix}$ et BA=$\begin{pmatrix} -3 & -7 \\ -6 & -14 \end{pmatrix}$

Calcul de AB : Taille de la matrice produit : $(1,\cancel{2})(\cancel{2},1) = (1,1)$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -17 \end{pmatrix} \end{array} \qquad c_{11} = 3 \times -1 = -3 + 7 \times -2 = -17$$

Calcul de BA : Taille de la matrice produit : $(2,\cancel{1})(\cancel{1},2) = (2,2)$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}3 & 7\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-3 & -7\\-6 & -14\end{pmatrix}\end{array} \qquad \begin{cases} c_{11} = -1 \times 3 = -3 \\ c_{21} = -2 \times 3 = -6 \\ c_{12} = -1 \times 7 = -7 \\ c_{22} = -2 \times 7 = -14 \end{cases}$$

• Si A= $\begin{pmatrix}4 & 5\\-3 & 2\end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$, alors AB= $\begin{pmatrix}10\\-19\end{pmatrix}$. Le produit BA n'est pas défini.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}4 & 5\\-3 & 2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}10\\-19\end{pmatrix}\end{array} \qquad \begin{cases} c_{11} = 4 \times 5 + 5 \times (-2) = 10 \\ c_{21} = -3 \times 5 + 2 \times (-2) = -19 \end{cases}$$

Propriété 2.2. • $\forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m,r}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{R})$: $A(BC) = (AB)C$ *: le produit matriciel est associatif.* • $\forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$:

$$(A + B)C = AC + BC$$

• $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$I_nA = AI_n = A$ *: La matrice est l'élément neutre pour la multiplication dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$(A + B)C = AC + BC$$

Attention!

• Le produit de matrices n'est pas commutatif en général : Si A et B sont des matrices carrées, $AB \neq BA$.
• Par contre, la matrice identité d'ordre n, notée $I_n$ou Id_n, commute avec toute matrice carrée d'ordre n.
• O représentant la matrice nulle, $AB = O$ n'implique pas $A = O$ ou $B = O$.
Contre-exemple : $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$.

3 Exercices

Exercice 65. Matrice inversible
Soit $A = \begin{pmatrix}3 & 4\\2 & 3\end{pmatrix}$.

1) Résoudre l'équation matricielle $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

2) Soit $A' = \begin{pmatrix}3 & -4\\-2 & 3\end{pmatrix}$. Calculer AA' et $A'A$.

3) Calculer la matrice produit $A'\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$. Que constate-t-on ?

Exercice 66. Matrice nilpotente
Soit $A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\0 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
1) Calculer $A^2 = AA, A^3 = AAA, A^4 = AAAA$.
2) Calculer A^n pour n entier naturel quelconque (Par convention, $A^0 = I_3$).

Exercice 67. Puissance d'une matrice diagonale
Une matrice carrée est diagonale si tous ses coefficients sont nuls, sauf éventuellement ceux de la diagonale :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{ii} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}[a_{11}; a_{22}; \cdots; a_{nn}].$$

Montrer que pour tout entier naturel k, $A^k = \mathrm{Diag}[a_{11}^k; a_{22}^k; \cdots; a_{nn}^k]$.

4 Matrices carrées inversibles

4.1 Définition et exemples

Définition 4.1. *Une matrice carrée A, de taille n, est inversible s'il existe une matrice carrée de taille n, notée A^{-1}, telle que :*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

A^{-1} est l'inverse de la matrice A.
*L'ensemble des matrices carrées inversibles de taille n à coefficients réels s'appelle le **groupe linéaire** et est noté $GL_n(\mathbb{R})$.*

Théorème 4.1. *Si A est inversible, alors A^{-1} est unique.*

Démonstration . *Soient M et N deux inverses de A :*
$M = MI_n = M(AN) = (MA)N = I_nN = N$. $\diamondsuit$

Remarque : A^{-1} est inversible et son inverse est A.
Exemples

- $I_n^{-1} = I_n$
- $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$: $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
- $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$: $\quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.
- $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Démonstration Supposons que C soit inversible, d'inverse :$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.
$CM = \begin{pmatrix} 3x+4y & 3y+4t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: cette matrice ne peut être égale à $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ quelles que soient les valeurs de x, y, z et t.

- $D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.
- La matrice nulle d'ordre n n'est pas inversible.

Propriété 4.1. *Si A et B appartiennent à $GL_n(\mathbb{R})$, alors AB appartient aussi à $GL_n(\mathbb{R})$ et :*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Démonstration .

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

$\diamondsuit$

Théorème 4.2. $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ *est un groupe, d'élément neutre I_n.*

Démonstration . • *La multiplication est une loi de composition interne :* $(A, B) \in GL_n^2(\mathbb{R}) \Rightarrow AB \in GL_n(\mathbb{R})$.
• *La multiplication est associative.*
• *La multiplication a pour élément neutre la matrice identité I_n.*
• *Tout élément A de $GL_n(\mathbb{R})$ possède un élément symétrique pour la multiplication dans $GL_n(\mathbb{R})$, à savoir A^{-1}, car :* $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. $\diamondsuit$

Théorème 4.3. *Soit A une matrice de $GL_n(\mathbb{R})$. Alors :*

$$\forall (B, C) \in \mathcal{M}_n^2,\ AB = AC \Rightarrow B = C.$$

Démonstration . *A est inversible, donc :* $AB = AC \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Rightarrow B = C$ $\diamondsuit$

Remarque : $AB = AC \Leftrightarrow A(B - C) = O$. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 2, cela n'implique pas systématiquement que $B - C = O$. Ici cela est vrai car A est inversible.

Exercice 68. Polynôme annulateur

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

4.2 Inverse d'une matrice carrée de taille 2

Théorème

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de taille 2.

A est inversible si et seulement si le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ est non nul.

De plus si $\Delta \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Définition : Δ est le déterminant de la matrice A, il est noté $\det(A)$.

Démonstration

Posons $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

$AB = BA = \Delta I_2$.

Par conséquent, si $\Delta \neq 0$, A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Réciproquement, si A est inversible, alors :

$B = BI_2 = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = \Delta A^{-1}$

B n'étant pas la matrice nulle, $\Delta \neq 0$.

Remarque : A est donc inversible si et seulement si les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires (autrement dit, ils forme une famille libre).

Exercice 69. Théorème de Cayley-Hamilton

Définition : La trace d'une matrice carrée A, notée Tr(A), est égale à la somme de ses coefficients diagonaux.

Montrer que pour toute matrice A d'ordre 2 :

$$A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = O.$$

Exercice 70. Groupe des matrices de rotations

Soit $\mathcal{R} = \left\{ M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R} \right\}$.

1) Montrer que : $\forall(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, M(\theta)M(\theta') = M(\theta + \theta')$.

2) Montrer que : $\mathcal{R}$ est inclus dans $GL_2(\mathbb{R})$ et déterminer l'inverse de $M(\theta)$.

3) Montrer que $(\mathcal{R}, \cdot)$ est un groupe abélien.

Neuvième partie

Les groupes

1 Définitions et propriétés

Définition 1.1. *Soit* G *un ensemble.* $\star$ *est une loi de composition interne sur* G *si :*

$$\forall(a;b) \in G^2,\ a \star b \in G.$$

Exemples
• $G = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{Z}$ ou $G = \mathbb{C}$: L'addition, le produit sont des lois de composition internes.
• $G = \mathbb{R}^*$: Le quotient est une loi de composition interne.
• $G = \{\text{fonctions définies sur } \mathbb{R}\}$: L'addition, le produit, la composition sont des lois de composition internes.
Mais par exemple, le produit scalaire défini sur l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ n'est pas une loi de composition interne.

Définition Un ensemble non vide G muni d'une loi de composition interne $\star$ est un *groupe* si :
• $\star$ est associative :
$\forall(a, b, c) \in G^3,\ a \star (b \star c) = (a \star b) \star c.$

• $\star$ admet un élément neutre, noté e :
$\forall a \in G,\ a \star e = e \star a = a.$

• tout élément a de G possède un élément symétrique pour $\star$:
$\forall a \in G, \exists\, b \in G,\ a \star b = b \star a = e.$
Cet élément est noté a^{-1}.

De plus, si $\star$ est commutative, le groupe G est commutatif, ou abélien :
$\forall(a, b) \in G^2,\ a \star b = b \star a.$

Le groupe est alors noté $(G, \star)$, ou s'il n'y a pas d'ambiguÍté, simplement G.

Exemples
• $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$,$(\mathbb{Z}, +)$ sont des groupes abéliens infinis.
• $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\mathbb{C}^*, \times)$,$(\mathbb{Z}^*, \times)$ sont des groupes abéliens infinis.
• $(\{-1; 1\}, \times)$ est un groupe abélien d'ordre 2.
• Soit E l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ (ou de $\mathbb{R}^3$).
$(E, +)$ est un groupe abélien.
• $(\mathbb{R}[X], +)$ et $(\mathbb{R}_n[X], +)$ sont des groupes abéliens.
• Soit n un entier naturel non nul. Soit $U_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.
$(U_n, \times)$ est un groupe abélien.
• $(M_n(\mathbb{R}), +)$, $(M_n(\mathbb{C}), +)$, $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ sont des groupes (les deux premiers sont abéliens, mais pas le dernier).
• L'ensemble des translations du plan (ou de l'espace) muni de la loi de composition interne $\circ$ est un groupe.
• n désigne un entier naturel strictement positif. G est constitué des restes possibles par la division euclidienne par n. G est muni de la loi de composition interne, notée $+$ associant à $a + b$ le reste de la division euclidienne de la somme $a + b$ par n.
$(G; +)$ est un groupe noté $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, +\right)\cdot$ Les éléments de G sont souvent notés $\dot{0}, \dot{1}, \cdots, \dot{n-1}$ afin de ne pas confondre les restes et les entiers correspondants.
Contre-exemples
• $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe car aucun élément n'est symétrisable.
• $(\mathbb{R}, \times)$, $(\mathbb{C}, \times)$ ne sont pas des groupes car 0 n'est pas symétrisable.
• $(\mathbb{Z}, \times)$ n'est pas un groupe car seuls 1 et -1 sont symétrisables.

Propriété 1.1.
1) Un groupe n'est jamais vide
2) L'élément neutre est unique
3) Dans un groupe, l'équation $a \star x = b$ *possède une unique solution, à savoir* $x = a^{-1} \star b$
*4) Dans un groupe, tout élément est **simplifiable** ou **régulier** :*
$$\begin{cases} a \star x = a \star y & \Rightarrow x = y \quad (a \text{ simplifiable à gauche}) \\ x \star a = y \star a & \Rightarrow x = y \quad (a \text{ simplifiable à droite}). \end{cases}$$

Démonstration . *1)* $G \neq \emptyset$ *car il contient l'élément neutre* e.
2) Soient e *et* e' *deux éléments de* G *:* $e \star e' = e'$ *car* e *est un élément neutre. De plus,* $e' \star e = e$ *car* e' *est aussi un élément neutre. En conclusion* $e = e'$.
3) $a \star x = b \Rightarrow a^{-1} \star (a \star x) = a^{-1} \star b \Rightarrow (a^{-1} \star a) \star x = a^{-1} \star b \Rightarrow e \star x = a^{-1} \star b \Rightarrow x = a^{-1} \star b$.
Réciproquement, $a^{-1} \star b$ *est bien solution de* $a \star x = b$. $\diamondsuit$

Définition 1.2. *L'ordre d'un groupe est le nombre de ses éléments.*
Si le groupe possède une infinité d'éléments, il est dit alors d'ordre infini.

2 Sous-groupes

Définition
Soit $(G, \star)$ un groupe. Soit H un sous-ensemble de G.
H est un sous-groupe de G, si $(H, \star)$ est un groupe.

Propriété 2.1. $(G, \star)$ *et* $(H, \star)$ *ont le même élément neutre* e.

Exemples
- $\{e\}$ et G sont des sous-groupes de $(G, \star)$ (appelés sous-groupes triviaux de G).
- $(\mathbb{R}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$.
- $(\mathbb{Q}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
- Soit a un réel, et $a\mathbb{Z} = \{ak / k \in \mathbb{Z}\}$.

$(a\mathbb{Z}, +)$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
- Soit $U = \{z \in C, |z| = 1\}$. $(U, \times)$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}$.

Parmi les différentes caractérisations possibles des sous-groupes, l'une des plus simples est la suivante :

Théorème
Soit H un sous-ensemble d'un groupe G muni de la loi de composition interne $\star$.
$(H, \star)$ est sous-groupe de $(G, \star)$ si et seulement si :
- $H \neq \emptyset$
- $\forall (x; y) \in H^2$, $x \star y^{-1} \in H$.

Démonstration
- Soit $(H, \star)$ un sous-groupe de G. Puisque H est un groupe :

▶ H n'est pas vide.
▶ Soient x et y deux éléments de H. y^{-1} appartient par définition d'un groupe à H et donc $x \star y^{-1}$ appartient aussi à H car $\star$ est une loi de composition interne.
- **Réciproquement**, soit H un sous-ensemble vérifiant les deux propriétés du théorème.

H étant non vide, il possède un élément x et donc $x \star x^{-1} = e$ appartient à H.
En posant $x = e$ dans la deuxième propriété, nous obtenons : $\forall y \in H$, $e \star y^{-1} = y^{-1} \in H$. Il nous reste à montrer que $\star$ est une une loi de composition interne pour H et qu'elle est associative.
Soient x et y deux éléments quelconques de H. Nous venons de montrer que tout élément de H possède un symétrique dans H par rapport à $\star$, donc il existe un élément z de H tel que $y = z^{-1}$ et donc $x \star y = x \star z^{-1}$ appartient à H. La loi $\star$ est donc interne pour H.
L'associativité est facile et est laissée en exercice (tout élément de H peut être vu comme un élément de G).

Théorème
Soient H et K deux sous-groupes de $(G, \star)$.
$H \cap K$ est un sous-groupe de $(G, \star)$.

Remarque La réunion de deux sous-groupes n'est pas en général un sous-groupe.

3 Morphisme de groupes

Définition
On appelle morphisme du groupe $(G,\star)$ vers le groupe $(G',\top)$ toute application f de G vers G' telle que :

$$\forall (x;y)\in G^2,\ f(x\star y)=f(x)\top f(y).$$

Définition
- Si f est bijective, on dit que f est un isomorphisme.
- Si $(G,\star)=(G',\top)$, on dit que f est un endomorphisme.
- Si f est un endomorphisme bijectif, on dit que f est un automorphisme .

Exemples
- Soit a un élément donné d'un groupe $(G,\star)$.

L'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ n & \mapsto & a^n=\underbrace{a\star\cdots\star a}_{n\text{ fois}} \end{array}$ est un morphisme de $(\mathbb{Z},+)$ vers $(G,\star)$.
- La fonction $\ln$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ vers $(\mathbb{R},+)$.
- Id_G est un automorphisme de de $(G,\star)$.

Définition On dit que G et G' sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de G vers G'.

Cette notion est fondamentale. Deux groupes isomorphes se "comportent" de la même manière, quelle que soit la nature de leurs éléments et quelle que soit la loi de composition interne.
Par exemple, il n'existe qu'un seul groupe possédant un unique élément à un isomorphisme près. Il s'agit du groupe $(G=\{e\},\star)$.
Exemples : $(Id_{\mathcal{P}},\circ)$,$(\{0\},+)$, $(\{\vec{0}\},+)$.
De même, à un isomorphisme près, il n'existe qu'un seul groupe à deux éléments. Pour s'en convaincre, il est possible de construire la table de la loi du groupe. Un tel groupe G est de la forme $\{e,a\}$. Le remplissage de la table ci-dessous est simple, hormis la détermination de $a\star a$. La loi $\star$ étant interne et G n'ayant que deux éléments, nous n'avons que deux possibilités : $a\star a=a$ et $a\star a=e$.
Si nous avions $a\star a=a$, nous aurions $a\star a=a\star e$ et donc $a=e$ car tout élément d'un groupe est régulier. Cela impliquerait donc que G ne possède qu'un seul élément, ce qui n'est pas le cas.
Par conséquent, $a\star a=e$. a est donc sont propre symétrique (on dit que a est d'ordre 2).

$\star$	e	a
e	e	a
a	a	e

Exemples : $(\{Id_{\mathcal{P}},S_D\},\circ)$;$(\{-1;1\},\times)$.

Règles Pour construire la table d'une loi d'un groupe, on pourra utiliser les deux règles importantes suivantes (qu'il faut savoir expliquer rapidement) :
R1 : On ne peut avoir le même élément 2 fois dans une ligne (ni 2 fois dans une colonne).
En effet si si par exemple un élément c apparaissait 2 fois dans la ligne a, par exemple à la colonne b et d, nous aurions ; $a\star b=a\star d$ *soit par simplification dans un groupe,* $b=d$ *ce qui n'est pas possible.*
R2 : Le groupe est commutatif si et seulement si la table correspondante est symétrique par rapport à la diagonale principale.

Conséquence : Tout groupe d'ordre 2 est commutatif.
En effet, tous les groupes d'ordre 2 possèdent la même table qui est symétrique par rapport à la diagonale principale.

Recherche des groupes d'ordre 3.
Soit $(G=\{e,a,b\},\star)$ un groupe d'ordre 3.
Si nous avions $a\star b=b$, cela impliquerait que $a=e$ par simplification, ce qui n'est pas possible. En appliquant la règle **R1**, $a\star b\neq a$, donc $a\star b=e$ et par suite $a\star a=b$.
La dernière ligne s'obtient de la même manière.

$\vdash\star$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Remarquons que cette table est symétrique par rapport à la diagonale principale.

Conséquences
• Il n'existe qu'un groupe d'ordre 3, à un isomorphisme près.
• Tout groupe d'ordre 3 est abélien.

Exemple : Table d'addition de $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}, +\right)$.

$\dfrac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}\}$. Son élément neutre est $\dot{0}$.

↱ $+$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{0}$
$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$

Recherche des groupes d'ordre 4.

Ici, les choses se compliquent un tout petit peu.
Soit $(G = \{e, a, b, c\}, \star)$ un groupe d'ordre 4.

↱ $\star$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	?	?	?
b	b	?	?	?
c	c	?	?	?

Nous allons considérer deux cas qui peuvent sembler artificiels au premier abord :
Ou bien il existe un élément qui n'est pas son propre symétrique, **ou bien** tous les éléments sont leur propre symétrique.
Tout groupe est nécessairement dans l'une de ces deux catégories.
• Supposons donc qu'il existe un élément - par exemple a- qui ne soit pas son propre symétrique. Notons b son symétrique. Par conséquent : $a \star b = b \star a = e$.
Dans ce cas $a \star c$ ne peut ni égal à c ni égal à a (car sinon par simplification..) et donc $a \star c = b$ d'après la règle **R1**. Et par suite $a \star a = c$ en utilisant cette même règle.
Déterminons $b \star b$:
$b \star b \neq b$ (car sinon par simplification...)
$b \star b \neq a$. En effet, $b \star b = a \Rightarrow a \star (b \star b) = a \star a \Rightarrow (a \star b) \star b = c \Rightarrow b = c$ impossible.
En conclusion $b \star b = c$ et en utilisant la règle **R1**, $b \star c = a$.
La dernière ligne est facile à compléter en utilisant **R1** appliquée aux colonnes de la table.

↱ $\star$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	c	e	b
b	b	e	c	a
c	c	b	a	e

Ce groupe est abélien et possède un (unique) élément d'ordre 2.
• Supposons maintenant que tous les éléments sont leur propre symétrique.
Dans ce cas, la construction de la table est plus simple. Par exemple, $a \star b \neq e$ par unicité du symétrique, $a \star b \neq a$ et $a \star b \neq b$ (car sinon par simplification...) donc $a \star b = c$.
On obtient alors la table suivante :

↱ $\star$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

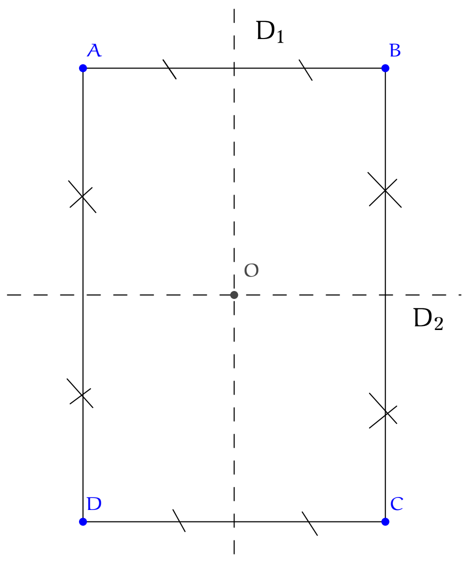
Conséquences
• Il existe deux groupes d'ordre 4 (à un isomorphisme près).
Le deuxième groupe est appelé le *groupe de Klein*.
• Tout groupe d'ordre 4 est abélien.

Exemples de groupes de Klein

• Le groupe multiplicatif$\{1,3,5,7\}$ muni de la loi de composition $\star$ associant au produit ab le reste de la division euclidienne de ab modulo 8 est un groupe de Klein. Sa table est la suivante :

↱ $\star$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

• Le groupe des transformations du plan laissant globalement un rectangle non carré muni de la loi $\circ$.



↱ $\star$	Id	S_O	S_{D_1}	S_{D_2}
Id	Id	S_O	S_{D_1}	S_{D_2}
S_O	S_O	Id	7	S_{D_1}
S_{D_1}	S_{D_1}	S_{D_2}	Id	S_O
S_{D_2}	S_{D_2}	S_{D_1}	S_O	Id

Propriétés
Soit f un morphisme du groupe $(G,\star)$, d'élément neutre e vers le groupe $(G',\top)$ d'élément neutre e'.
• $f(e) = e'$.
• $\forall x \in G, \quad f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$
• $\forall x \in G, \quad f(\underset{i=1}{\overset{n}{\star}} x_i) = \underset{i=1}{\overset{n}{\top}} f(x_i)$
• $\forall x \in G, \quad \forall p \in \mathbb{Z}, \quad f(x^p) = [f(x)]^p$.

4 Noyau et image d'un morphisme de groupes

Théorème et définitions Soit f un morphisme du groupe $(G,\star)$, d'élément neutre e vers le groupe $(G',\top)$ d'élément neutre e'.
• $f(G) = \{f(x), x \in G\} = \{y \in G' / \exists x \in G,\ f(x) = y\}$ est un sous-groupe de G' appelé image de f et noté $\mathrm{Im}f$.
• $\{x \in G, f(x) = e'\}$ est un sous-groupe de G appelé noyau de f et noté $\mathrm{Ker}f$.

Exemple
• Rappel : Pour tout nombre complexe z d'écriture algébrique $z = a + ib$, $\exp(z) = e^a e^{ib}$.
$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un morphisme du groupe $(\mathbb{C},+)$ vers le groupe $(\mathbb{C}^*,\times)$.
$e = 0$ et $e' = 1$.
$\mathrm{Im}f = \mathbb{C}*$ car toute équation $\exp Z = z$ d'inconnue Z possède au moins une solution dans $\mathbb{C}$, quel que soit le nombre complexe z non nul.
$\mathrm{Ker}f = 2i\pi\mathbb{Z} = \{2ik\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
En effet, il suffit de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\exp z = 1$ qui est équivalente à $e^a e^{ib} = 1$.

5 Groupes et géométrie plane

5.1 Transformations du plan

Définition Soit $\mathcal{P}$ le plan orienté, muni d'un repère orthonormé d'origine O.
On appelle transformation du plan toute bijection de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, c'est-à-dire :

$$\forall N \in \mathcal{P}, \exists!\, M \in \mathcal{P},\ f(M) = N.$$

Exemples
- L'identité du plan $Id_{\mathcal{P}}$: $Id_{\mathcal{P}}^{-1} = Id_{\mathcal{P}}$.
- Les translations : $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$
- Les réflexions par rapport à une droite D (ou symétrie axiale) : $S_D^{-1} = S_D$.
- Les rotations : $R(\Omega, \theta)^{-1} = R(\Omega, -\theta)$.
- Les symétries centrales par rapport à un point A : $S_A^{-1} = S_A$. (A noter que $S_A = R(A, \pi)$).
- Les homothéties [b] $H(\Omega, k)$: $H^{-1}(\Omega, k) = H\left(\Omega, \dfrac{1}{k}\right)$.

Contre-exemple
Une projection orthogonale p sur une droite D , n'est pas une transformation du plan car elle n'est pas bijective. Pour tout point N donné sur D, l'équation ponctuelle $p(M) = N$ d'inconnue M possède une infinité de solutions.

Propriété 5.1.
- *Si f est une transformation, alors f^{-1} est définie et est une transformation du plan.*
- *Toute composée de deux transformations quelconques est une transformation du plan.*

En effet, rappelons que si f et g sont deux bijections d'un ensemble E dans lui-même, il en est de même pour $f \circ g$ et $g \circ f$ et que : $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Théorème 5.1.
- *La composée de deux homothéties est soit une homothétie, soit une translation.*
- *La composée d'une homothétie et d'une translation est une homothétie.*

Démonstration . *Soient h et h′ deux homothéties d'écritures complexes respectives :* $z' = e^{i\theta}z + b$ *et* $z' = e^{i\theta'}z + b$
$h' \circ h$ *a pour écriture complexe* $z' = e^{i\theta'}(e^{i\theta}z + b) + b'$ *soit* $z' = e^{i(\theta'+\theta)}z + b''$.
- *Si* $e^{i(\theta'+\theta)} = 1$, $h' \circ h$ *est une translation.*
- *Si* $e^{i(\theta'+\theta)} \neq 1$, $h' \circ h$ *est une rotation d'angle* $\theta' + \theta$.

Pour le second point du théorème, faire de même avec les écritures complexes d'une translation et d'une homothétie.$\diamondsuit$

Théorème 5.2.
- *L'ensemble $\mathcal{D}$ des transformations de $\mathcal{P}$ muni de la loi de composition interne $\circ$ est un groupe non commutatif.*
- *L'ensemble composé de toutes les homothéties et de toutes les translations du plan, muni de le loi $\circ$ est un groupe, appelé groupe des homothéties-translations.*

5.2 Isométries planes [a]

Définition 5.1. *Une isométrie f du plan $\mathcal{P}$ est une transformation du plan $\mathcal{P}$ qui conserve les distances :*

$$\forall (M, N) \in \mathcal{P}^2, \quad f(M)f(N) = MN.$$

Exemples
- L'identité du plan $Id_{\mathcal{P}}$
- Les translations
- Les réflexions par rapport à une droite D (ou symétrie axiale)
- Les rotations
- Les symétries centrales par rapport à un point A.

b. Rappel : $k \in \mathbb{R}^*$.
a. Pour un exposé plus complet sur les isométries du plan, on pourra étudier avec intérêt : www.capes-de-maths.com/lecons/lecon42.pdf

• La composée d'une symétrie axiale par rapport à une droite Δ et d'une translation de vecteur $\vec{u}$ qui dirige Δ : cette isométrie s'appelle une symétrie glissée.

Théorème 5.3. • *La composée de deux isométries est une isométrie.*
• *L'application réciproque d'une isométrie est une isométrie.*
• *Une isométrie conserve les angles géométriques.*
• *Une isométrie conserve le barycentre.*
• *Une isométrie conserve le parallélisme.*
• *Une isométrie conserve l'alignement.*

Théorème 5.4. *L'ensemble des isométries de $\mathcal{P}$ muni de la loi de composition interne $\circ$ est un groupe non commutatif.*

Définition 5.2.
• *Une isométrie conservant les angles orientés est un déplacement ;*
• *Une isométrie ne conservant pas les angles orientés est un antidéplacement.*

Théorème 5.5. *L'ensemble des déplacements du plan muni de la loi $\circ$ est un groupe.*

Classification des isométries du plan

Ensemble des points invariants	Déplacements	Antidéplacements
$\mathcal{P}$	$\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$	
Une droite Δ		s_Δ
Un unique point A	$R(A, \theta)$, $\theta \neq 0$	
$\emptyset$	$t_{\vec{u}}, \vec{u} \neq \vec{0}$	$t_{\vec{u}} \circ s_\Delta$

5.3 Similitudes directes

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Définition 5.3. *On appelle similitude directe toute transformation* f *du plan ayant pour écriture complexe :*

$$z' = az + b,$$

avec $(a; b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Une application du plan définie par cette écriture complexe est bien une transformation du plan car l'équation $az + b = z_0$ possède une solution complexe quel que soit le nombre complexe z_0 car a est non nul (autrement dit, tout point du plan possède un antécédent, qui est même unique, par une similitude donnée).
Exemples : $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$, les translations (si $a = 1$), les rotations (si $|a| = 1$ et a non réel, les homothéties (a réel différent de 1) sont des similitudes.

Théorème 5.6. *La transformation réciproque d'une similitude directe est une similitude directe.*

En effet , puisque a est non nul :

$$z' = az + b \Leftrightarrow z = \frac{1}{a}z' - \frac{b}{a}.$$

La dernière égalité correspond à une écriture complexe associée à une similitude directe car $\frac{1}{a}$ est un nombre complexe non nul.

Théorème 5.7. *L'ensemble $\mathfrak{S}$ des similitudes directes muni de la loi $\circ$ est un groupe.*

Démonstration . *Il suffit de montrer que $\mathfrak{S}$ est un sous-groupe du groupe des transformations.*
• *$\mathfrak{S} \neq \emptyset$ car il contient, entre autres, toutes les translations du plan.*
• *Soient s_1 et s_2 deux éléments de $\mathfrak{S}$. Le théorème précédent permet d'affirmer que s_2^{-1} est une similitude directe et nous avons vu aussi que la composée de deux similitudes directes est une similitude directe. Par conséquent, $s_1 \circ s_2^{-1}$ est un élément de $\mathfrak{S}$.* $\diamondsuit$

Théorème 5.8. ***forme réduite d'une similitude directe***
Toute similitude directe s est soit une translation, soit la composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre.
Autrement dit :
Toute similitude directe s qui n'est pas une translation peut s'écrire sous la forme réduite
$s = h(\Omega, k) \circ r(\Omega, \theta) = r(\Omega, \theta) \circ h(\Omega, k)$, *où k désigne un réel strictement positif. On dit alors que s est une similitude directe de centre Ω, rapport k et d'angle θ.*

Remarque importante
L'écriture $s = h \circ r$, où r désigne une homothétie et r une rotation, n'est pas unique. Par contre il y a unicité de la décomposition sous la contrainte d'avoir le même centre pour h et r.

Théorème 5.9.
• *Ω est l'unique point fixe de s. Son affixe ω est solution de l'équation $z = az + b$.*
• $k = |a|$
• *θ est un argument de a.*
L'écriture complexe de s peut alors s'écrire sous la forme :

$$z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega).$$

Propriété 5.2.
• *Une similitude directe de rapport k multiplie les distances par k :*

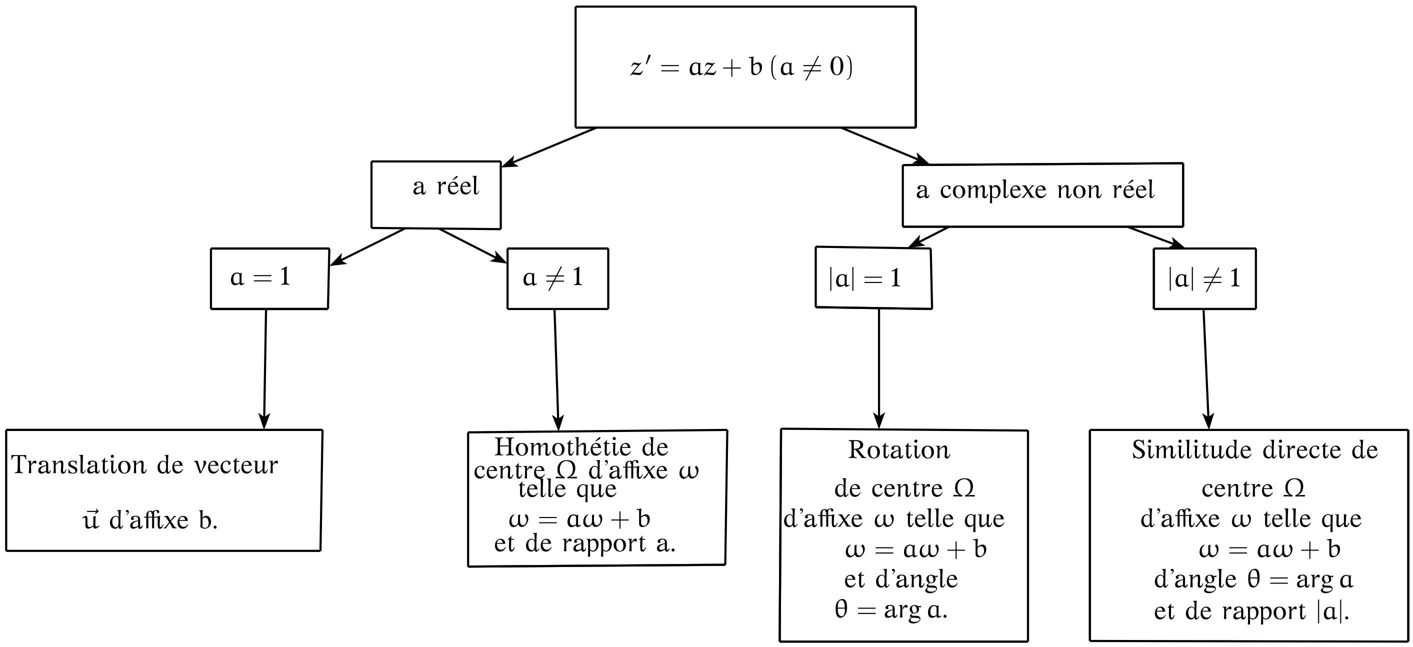
$$\forall (M, N) \in \mathcal{P},\ s(M)s(N) = kMN.$$

• *Une similitude directe de rapport k multiplie les aires par k^2.*
• *Une similitude directe conserve les angles orientés.*
• *Soient Ω, M et M' trois points distincts deux à deux, il existe une unique similitude directe s de centre Ω transformant M en M'. De plus :*

$$k = \frac{\Omega M'}{\Omega M} \quad \textit{et} \quad \theta = (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}).$$

• *L'image d'une droite (resp. un segment, un cercle) par une similitude directe est une droite (resp. un segment, un cercle).*
• *Toute similitude conserve l'alignement, l'orthogonalité et le parallélisme.*

Théorème 5.10. *Le groupe des homothéties-translations est un sous-groupe du groupe des similitudes directes.*



Classification des similitudes directes

6 Exercices

Exercice 71. Soit G un groupe noté multiplicativement et tel que : :

$$\forall (a;b) \in G^2, \quad (ab)^2 = a^2b^2.$$

Démontrer que ce groupe est abélien.

Exercice 72. Soient a et b deux éléments d'un groupe $(G, .)$ non commutatif vérifiant les égalités suivantes :

$$a^{-1}.b.a = b^{-1} \qquad \text{et} \qquad b^{-1}.a.b = a^{-1}.$$

1. Montrer que $a^2.b^2 = b^2.a^2 = e$ et que $a^2 = b^2$.
2. En déduire que : $a^4 = b^4 = e$.

Exercice 73. Sur l'ensemble des réels, on considère la loi, notée $\star$, telle que :

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R},\ x \star y = x + y - xy.$$

Cette loi confère-t-elle à $\mathbb{R}$ une structure de groupe ? Sinon, à quel ensemble en confère-t-elle une ?

Exercice 74. On désigne par $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace rapporté à un repère orthonormé.
$\mathcal{V}$ est muni d'une opération interne, notée $\star$, qui aux deux vecteurs $\vec{U}(u_1;u_2;u_3)$ et $\vec{V}(v_1;v_2;v_3)$ associe le vecteur

$$\vec{U} \star \vec{V}(u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3 + u_1v_2).$$

1. Montrer que $(\mathcal{V}, \star)$ est un groupe. Est-il abélien ?
2. On donne les vecteurs $\vec{A}(a_1;a_2;a_3)$ et $\vec{B}(b_1;b_2;b_3)$. Déterminer les vecteurs $\vec{X}(x_1;x_2;x_3)$ et $\vec{Y}(y_1;y_2;y_3)$ tels que :

$$\vec{A} \star \vec{X} = \vec{B} \qquad \text{et} \qquad \vec{Y} \star \vec{A} = \vec{B}$$

Exercice 75. Soit G un groupe et soit G' l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G. Démontrer que G', appelé centre de G, est un sous-groupe de G.

Exercice 76. Soit $E = \mathbb{C}^* - \{-1;1\}$.
On pose $e(z) = z$, $f(z) = -\dfrac{1}{z}$, $g(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$, $h(z) = \dfrac{z+1}{1-z}$.

1. Montrer que e, f, g et h sont des bijections de E dans E.

2. Soit $G = \{e, f, g, h\}$. Montrer que $(G, \circ)$ est un groupe commutatif.

Exercice 77.

$\mathfrak{A}$. Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

La permutation des éléments de E telle que : $p(1) = 3$, $p(2) = 5$, $p(3) = 4$, $p(4) = 1$, $p(5) = 6$ et $p(6) = 2$ se note $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

On dit qu'une permutation opère sur une partie E' de E si elle laisse invariants les éléments de $E - E'$.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ opère sur $E' = \{2, 4, 6\}$.

On désigne par G l'ensemble des permutations de E dans lui-même.

1. Quel est le cardinal de G ?
2. Montrer G muni de la loi $\circ$ est un groupe non commutatif. Montrer que deux permutations opérant sur des parties disjointes de E commutent pour $\circ$.
3. Soient $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Former p_1^{-1}, $p_1 \circ p_2$, $p_1^{-1} \circ p_2^{-1}$. Vérifier que $(p_2 \circ p_1)^{-1} = p_1^{-1} \circ p_2^{-1}$.

$\mathfrak{B}$ Une permutation p de E est appelée cycle d'ordre n $(1 \leqslant n \leqslant 6)$ si elle opère une partie à n éléments de E et si composée avec elle-même n fois elle est égale à l'identité.

Par exemple $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est un cycle d'ordre 3, noté $[1, 4, 2]$.

1. Décomposer p_1, p_2 et p_3 en produits -pour la loi $\circ$- de cycles opérant sur des parties disjointes de E.
2. Décomposer les cycles $[1, 5, 4, 6]$ et $[1, 3, 6, 2, 5]$ en produit de cycles d'ordre 2.

Exercice 78. Soit $(G, \star)$ un groupe tel que :

$$\forall x \in G,\ x^2 = e.$$

Montrer que G est commutatif.

Exercice 79. On définit sur $G =]-1; 1[$ la loi $\star$ définie par :

$$\forall (x; y) \in G,\ x \star y = \frac{x + y}{1 + xy}.$$

Montrer que $(G, \star)$ est un groupe abélien.

Exercice 80. Soit a un élément d'un groupe $(G, \times)$. Soit H un sous-groupe de G.

1. Montrer que $aHa^{-1} = \{axa^{-1} / x \in H\}$ est un sous-groupe de $(G, \times)$.
2. A quelle condition $aH = \{ax / x \in H\}$ est-il un sous-groupe de $(G, \times)$?

Exercice 81. Soit ABC un triangle équilatéral du plan.

1. Déterminer l'ensemble des rotations qui laissent invariant ce triangle.
2. Montrer que c'est un groupe pour la loi $\circ$.

Exercice 82. Etudier le groupe des isométries laissant invariant un carré.

Exercice 83. Reconnaître les transformation complexes suivantes :

a) $z' = 2z + 1 + i$;

b) $z' = 2iz + 1 - 2i$;

c) $z' = 2(1 + i)z + 1 - i$.

Exercice 84. Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ direct. On désigne par s l'application qui à tout point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ tel que : $\begin{cases} x' &= -x - y + 2 \\ y' &= x - y - 1 \end{cases}$.

1. Déterminer l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M.
2. Démontrer que s est une similitude directe . Préciser son angle, son rapport ainsi que son centre.
3. Soit g l'application qui à tout point M du plan associe l'isobarycentre G des points M, $M' = S(M)$ et $M'' = s(M')$.
   - Calculer, en fonction de l'affixe z de M, les affixes des points M'' et G.
   - Démontrer que g est une similitude directe. Quel est son centre ?

Exercice 85. Déterminer les similitudes directes s involutives, c'est-à-dire telles que $s^2 = s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$.

Exercice 86.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 216$. Mettre les solutions sous forme exponentielles. Soient A, B et C les points du plan d'affixes les solutions de cette équation (A est associé à la solution réelle, B à celle de partie imaginaire positive).
2. Soient D, E et F d'affixes respectives $3 + i\sqrt{3}$, $-3 + i\sqrt{3}$ et $-2i\sqrt{3}$.
   - Montrer que D appartient à la droite (AB). Placer D.
   - Sur quelle droite particulière se trouve E ? Placer E.
   - Montrer que F appartient à la droite (AC). Placer F.
3. Montrer qu'il existe une unique similitude directe s unique qui transforme A en D et B en E et donner son expression complexe.

   Déterminer les éléments caractéristiques de s. Préciser $s(C)$.

Exercice 87. Beaucoup d'exercices corrigés sur les similitudes qui étaient au programme de TS jusqu'en 2012 dans les annales disponibles sur le site de l'APMEP.

Dixième partie

Quelques applications des nombres complexes

N.B : Ces applications sont à connaître.

1 *Linéarisation des polynômes trigonométriques.*

1.1 Définition

On peut chercher à transformer un polynôme trigonométrique P en $\sin x$ et $\cos x$ en une somme de termes du type $\sin nx$ et $\cos nx$ ($n \in \mathbb{N}$). On dit alors qu'on ***linéarise*** le polynôme P.
Exemple : Linéarisation de $\cos^2 x$:

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Leftrightarrow \forall\ x \in \mathbb{R},\ \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

1.2 Méthode générale

Il est possible de linéariser n'importe quel polynôme trigonométrique en appliquant les formules d'Euler :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ et } \forall\ x \in \mathbb{R}, \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

La formule du ***binôme de Newton*** appliquée à $(e^{ix} + e^{-ix})^n$ et à $(e^{ix} - e^{-ix})^n$ permet le développement de l'expression ainsi obtenue . En ordonnant convenablement les termes du développement, l'expression obtenue peut être écrite sous la forme d'une ***combinaison linéaire*** d'expressions de la forme $(e^{ikx} + e^{-ikx})$ et $(e^{ikx} - e^{-ikx})$ avec $1 \leq k \leq n$. La linéarisation s'obtient alors en réutilisant les formules d'Euler :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ e^{ikx} + e^{-ikx} = 2\cos kx \text{ et } \forall\ x \in \mathbb{R},\ e^{ikx} - e^{-ikx} = 2i\sin kx.$$

1.3 Exercice résolu

Linéariser l'expression : $\cos^2 x \sin^4 x$.

$$\begin{aligned}
&\forall\ x \in \mathbb{R}, \cos^2 x \sin^4 x = \frac{1}{2^2}(e^{ix} + e^{-ix})^2 \frac{1}{2^4 i^4}(e^{ix} - e^{-ix})^4 \\
&\forall\ x \in \mathbb{R}, \cos^2 x \sin^4 x = \frac{1}{2^6}(e^{2ix} - e^{-2ix})^2 (e^{ix} - e^{-ix})^2 \\
&\forall\ x \in \mathbb{R}, \cos^2 x \sin^4 x = \frac{1}{2^6}(e^{4ix} + e^{-4ix} - 2)(e^{2ix} + e^{-2ix} - 2) \\
&\forall\ x \in \mathbb{R}, \cos^2 x \sin^4 x = \frac{1}{2^6}(e^{6ix} - e^{2ix} - 2e^{4ix} - e^{-2ix} + e^{-6ix} - 2e^{-4ix} + 4) \\
&\forall\ x \in \mathbb{R}, \cos^2 x \sin^4 x = \frac{1}{2^6}(e^{6ix} + e^{-6ix} - 2(e^{4ix} + e^{-4ix}) - (e^{2ix} + e^{-2ix}) + 4) \\
&\forall\ x \in \mathbb{R}, \cos^2 x \sin^4 x = \frac{1}{2^6}(2\cos 6x - 4\cos 4x - 2\cos 2x + 4) \\
&\forall\ x \in \mathbb{R}, \cos^2 x \sin^4 x = \frac{1}{32}(\cos 6x - 2\cos 4x - \cos 2x + 2)
\end{aligned}$$

1.4 Exercice

Montrer que :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \cos x \sin^4 x = \frac{1}{16}(\cos 5x - 3\cos 3x + 2\cos x).$$

1.5 Exemple d'application

La linéarisation permet de trouver les *primitives* des polynômes trigonométriques :
Etant donné un polynôme trigonométrique P**, une primitive de** P **est une fonction** F **définie et dérivable sur** $\mathbb{R}$ **telle que** $F' = P$.
*E*xemple : Cherchons une primitive sur $\mathbb{R}$ du polynôme trigonométrique tel :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, P(x) = \cos^2 x \sin^4 x.$$

La linéarisation obtenue dans la précédente section nous permet d'écrire :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, P(x) = \frac{1}{32}\cos 6x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{32}\cos 2x + \frac{1}{16}$$

Sachant que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \forall\ x \in \mathbb{R}, (\sin nx)' = n\cos(nx)$ et $(\cos nx)' = -n\sin(nx)$,
P admet pour primitive la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{192}\sin 6x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{64}\sin 2x + \frac{1}{16}x.$$

2 *Calcul de* $\cos n\phi$ *et* $\sin n\phi$ *.*

Rappelons la formule de Moivre :

$$\forall\ \phi \in \mathbb{R}, \forall\ \ \in \mathbb{Z},\ (\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi.$$

Elle permet de trouver l'expression de $\cos n\phi$ et de $\sin n\phi$ en fonction de $\cos\phi$ et de $\sin\phi$.
Exemple : n=2

$$\forall\ \phi \in \mathbb{R},\ (\cos\phi + i\sin\phi)^2 = \cos^2\phi - \sin^2\phi + 2i\sin\phi\cos\phi = \cos 2\phi + i\sin 2\phi$$

Donc :

$$\forall\ \phi \in \mathbb{R},\ \cos 2\phi = \cos^2\phi - \sin^2\phi$$

et

$$\forall\ \phi \in \mathbb{R}, \sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi.$$

Exercice 88.

1. Calculer $\cos 5\phi$ et $\sin 5\phi$ en fonction de $\cos\phi$ et $\sin\phi$.

2. En déduire que :

$$\mathrm{cotan}\, 5\phi = \frac{1 - 10\tan^2\phi + 5\tan^4\phi}{5\tan\phi - 10\tan^3\phi + \tan^5\phi}.$$

3 *Formules trigonométriques.*

Les formules de trigonométrie vues en 1ère S, et bien d'autres, peuvent être rapidement démontrées en utilisant les complexes.

3.1 Exemples

Exemple n°1 Soit à démontrer que :

$$\forall\ (x; y) \in \mathbb{R}^2, \cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)).$$

On utilise la même méthode vue dans 1.

$$\forall\ (x;y) \in \mathbb{R}^2, \cos x \cos y = \frac{1}{4}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\left(e^{iy} + e^{-iy}\right)$$
$$\forall\ (x;y) \in \mathbb{R}^2, \cos x \cos y = \frac{1}{4}\left(e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)} + e^{i(y-x)} + e^{-i(x+y)}\right)$$
$$\forall\ (x;y) \in \mathbb{R}^2, \cos x \cos y = \frac{1}{4}\left(e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)} + e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)}\right)$$
$$\forall\ (x;y) \in \mathbb{R}^2, \cos x \cos y = \frac{1}{4}(2\cos(x+y) + 2\cos(x-y))$$

Ce qui donne la formule demandée :

$$\forall\ (x;y) \in \mathbb{R}^2, \cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)).$$

Exemple n°2 Soit à démontrer que :

$$\forall\ (p;q) \in \mathbb{R}^2, \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}.$$

Cette égalité est une conséquence de l'exemple 1 précédent mais peut être démontrée directement :

$$\forall\ (p;q) \in \mathbb{R}^2, \cos p + \cos q = \frac{1}{2}(e^{ip} + e^{-ip} + e^{iq} + e^{-iq}).$$

Or :

$$\forall\ (p;q) \in \mathbb{R}^2, e^{ip} + e^{iq} = e^{i\left(\frac{p+q}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{p-q}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{p-q}{2}\right)}\right) = 2e^{i\left(\frac{p+q}{2}\right)}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Par conséquent :

$$\forall\ (p;q) \in \mathbb{R}^2, \cos p + \cos q = \frac{1}{2}(2e^{i(\frac{p+q}{2})}\cos(\frac{p-q}{2}) + 2e^{i(-\frac{p+q}{2})}\cos(\frac{-p+q}{2}))(1)$$

La fonction cosinus étant paire : $\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \cos\left(\frac{-p+q}{2}\right)$ nous avons :

$$(1) \Leftrightarrow \forall\ (p;q) \in \mathbb{R}^2\ , \cos p + \cos q = \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\left(e^{i(\frac{p+q}{2})} + e^{i(-\frac{p+q}{2})}\right)$$
$$(1) \Leftrightarrow \forall\ (p;q) \in \mathbb{R}^2, \cos p + \cos q = \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\left(2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\right).$$

Ce qui prouve l'égalité.

3.2 Exercices

Exercice 89. Démontrer que : $\forall\ x \in \mathbb{R}, \sin 3x \cos 5x = \frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x)$.

Exercice 90.

1. Factoriser $f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$.
2. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-\pi;\pi]$.

4 *Equations du second degré à coefficients complexes.*

4.1 Etude d'un exemple

Définition 4.1. *On appelle racine carrée du nombre complexe* $z = -3 + 4i$ *tout nombre complexe* δ *tel que* $\delta^2 = -3 + 4i$.
On pose $\delta = x + iy$ *avec* $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Expliquer pourquoi $x^2 + y^2 = 5$
2. Résoudre le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ \quad xy \quad = 2 \end{cases}$$

En déduire toutes les racines carrées de -3 +4i.
3. Déterminer la forme canonique du trinôme $z^2 + z + 1 + i$. En déduire une factorisation en utilisant les résultats de la question 2.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 + i = 0$.

4.2 Généralisation

En admettant que tout nombre complexe possède une racine carrée , proposer et démontrer une méthode de résolution des équations du second degré à coefficients complexes.

Onzième partie

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 0.2. *Soit* (a, b) *un couple de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
Une suite u *est récurrente linéaire d'ordre 2 si elle satisfait à la relation de récurrence suivante :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \qquad (E)$$

Exemple : suite de Fibonacci (cf. cours).

1 Quelques propriétés

Etant donné un couple (a, b) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, notons $\mathbb{U}$ l'ensemble des suites u vérifiant la relation (E).

1. $\mathbb{U}$ n'est pas vide.
   Preuve : la suite nulle appartient à $\mathbb{U}$ qui n'est donc pas vide.
2. La donnée des deux premiers termes u_0 et u_1 définit une unique suite de $\mathbb{U}$.
3. $\mathbb{U}$ est stable par combinaisons linéaires :
   $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (u, v) \in \mathbb{U} \Rightarrow \alpha u + \beta v \in \mathbb{U}$.
4. Une suite géométrique de raison q non nulle appartient à $\mathbb{U}$ si et seulement si q est solution de l'équation $x^2 = ax + b$.

   Preuve : D'après la propriété précédente, nous pouvons poser $u_0 = 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, q^{n+2} = aq^{n+1} + bq^n \Leftrightarrow q^n(q^2 - aq - b) = 0 \underset{q^n \neq 0}{\Leftrightarrow} q^2 - aq - b = 0$$

Définition 1.1. *: l'équation* $x^2 = ax + b$ *s'appelle* ***équation caractéristique***.

2 Expression de u_n en fonction de n

Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique $x^2 = ax + b$. Trois cas sont à distinguer :

1. $\boldsymbol{\Delta > 0}$
   L'équation caractéristique possède dans ce cas deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 et dans ce cas u appartient à $\mathbb{U}$ si et seulement s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

2. $\boldsymbol{\Delta = 0}$
   L'équation caractéristique possède une solution double notée r. Dans ce cas u appartient à $\mathbb{U}$ si et seulement s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda n + \mu)r^n$$

3. $\boldsymbol{\Delta < 0}$
   L'équation caractéristique possède deux solutions complexes conjuguées ω et $\overline{\omega}$. Posons $r = |\omega|$ et $\theta = \arg \omega$. Dans ce cas u appartient à $\mathbb{U}$ si et seulement s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r^n \cos(n\theta) + \mu r^n \sin(n\theta)$$

   Remarque : Dans les trois cas ci-dessus, le couple (λ, μ) est déterminé à partir des valeurs des deux premiers termes de la suite u (cf. infra).

3 Exemples

Etudier les suites suivantes :

1. $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$, $u_0 = 0$, $u_1 = 3$.
   L'équation caractéristique est $x^2 + x - 2 = 0$. Elle admet pour solutions les réels 1 et -2.
   Par conséquent :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \lambda + \mu(-2)^n.$$
   En remplaçant n par 0 puis par 1, nous obtenons le système suivant :
   $$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - 2\mu = 3 \end{cases}$$
   Donc $\lambda = 1$ et $\mu = -1$.
   Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n = 1 - (-2)^n$.
2. $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$, $u_0 = 5$, $u_1 = 6$.
   L'équation caractéristique est $x^2 - 6x + 9 = 0$. Elle admet pour solution double le réel 3.
   Par conséquent :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = (\lambda + \mu n)3^n.$$
   En remplaçant n par 0 puis par 1, nous obtenons le système suivant :
   $$\begin{cases} \lambda = 5 \\ 3(\lambda + \mu) = 6 \end{cases}$$
   Donc $\lambda = 5$ et $\mu = -3$.
   Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n = 3^n(-3n + 5)$.
3. $u_{n+2} = -9u_n$, $u_0 = 5$, $u_1 = 1$.
   L'équation caractéristique est $x^2 + 9 = 0$. Elle admet pour solutions $3i$ et $-3i$.
   Par conséquent :
   $$\forall n \in \mathbb{N}\,,\, u_n = \lambda 3^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \mu 3^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$
   En remplaçant n par 0 puis par 1, nous obtenons le système suivant :
   $$\begin{cases} \lambda = 5 \\ 3\mu = 1 \end{cases}$$
   Donc $\lambda = 5$ et $\mu = \dfrac{1}{3}$.
   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = 5 \cdot 3^n \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{1}{3} \cdot 3^n \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$

Douzième partie

Les symboles Σ et Π

1 Définition des notations

$a_1, \cdots, a_n$ étant n nombres réels ou complexes, on pose :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times \cdots \times a_n.$$

N.B : k est l'indice. Il peut être remplacé par toute autre lettre non utilisée par ailleurs (on parle d' indice muet). Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Exemple : $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\left(\prod_{i=1}^{3} a_i^k\right) = \sum_{k=1}^{3}(a_1^k a_2^k a_3^k) = a_1a_2a_3 + a_1^2a_2^2a_3^2 + a_1^3a_2^3a_3^3.$

2 Propriétés

1. **Nombres de termes** : Soient m et n deux entiers naturels tels que $m \leqslant n$.

   Les expressions $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k$ et $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k$ possèdent n-m+1 termes.
2. **Propriétés calculatoires :**
   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k) = \alpha\sum_{k=1}^{n} a_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

   (b) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{i=1}^{m} c_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_k c_i\right)$

   (c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(\alpha a_k) = \alpha^n\prod_{k=1}^{n} a_k$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(a_k b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$

   (d) $\displaystyle n \times \min_{1\leqslant k\leqslant n}(a_k) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \leqslant n \times \max_{1\leqslant k\leqslant n}(a_k)$

3 Changement d'indice

Considérons la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ et effectuons le changement d'indice $q = k + 1$.

k allant de 1 à n, l'indice q prendra toutes les valeurs de 2 à n+1. Puisque $k = q - 1$, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{q=2}^{n+1} a_{q-1}.$$

De même, en posant d'une part $j = k - 1$ et $i = n - k$ d'autre part, on obtient les égalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}.$$

4 Applications

1. **Suites télescopiques**

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1}-a_k=\sum_{k=1}^{n} a_{k+1}-\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=2}^{n+1} a_k-\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=2}^{n} a_k+a_{n+1}-\sum_{k=2}^{n} a_k-a_1=a_{n+1}-a_1.$$

2. **Somme des termes d'indices pairs, d'indices impairs**

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \underbrace{\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} a_{2k}}_{\text{somme des termes d'indices pairs}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} a_{2k+1}}_{\text{somme des termes d'indices impairs}}.$$

3. **Calcul de** $S=\sum_{k=1}^{n} k$.

   Considérons la somme $S'=\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2-k^2$.

   • En développant l'expression ci-dessus, nous obtenons :

$$S'=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=2\sum_{k=1}^{n} k+\sum_{k=1}^{n} 1=2S_1+n\ (1).$$

   • En scindant S' en deux sommes et en effectuant un changement d'indice, nous obtenons d'autre part :
   $S'=\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{n} k^2=\sum_{i=2}^{n+1} i^2-\sum_{k=1}^{n} k^2=(n+1)^2-1=n(n+2)\ (2)$.
   En combinant les égalités (*1*) et (*2*), nous obtenons :

$$2S+n=n(n+2) \quad \text{soit :} \quad S=\frac{n(n+1)}{2}.$$

5 Exercices

Exercice 91. Factoriser puis calculer la somme $S=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} ij\right)$

Exercice 92. Simplifier $\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+2}$.

Exercice 93.

1. Démontrer que $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   Trouver une formule analogue pour $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

2. Déduire l'expression en fonction de n des sommes suivantes :

   (a) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(i+j)^2\right)$. ii. $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij$. iii. $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\min(i,j)$.

Exercice 94. Calcul de $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

Le but de cet exercice est de montrer que la suite u définie pour tout n supérieur ou égal à 1 par $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ est convergente et de déterminer sa limite, notée $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

Partie A

1. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$
2. En déduire une expression simple des termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$
(v est un exemple de suite *télescopique*).
Montrer que v est convergente et déterminer sa limite.
3. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
   (b) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n+1)}.$$
   En déduire une majoration de u_n pour tout entier naturel strictement positif, puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel l inférieur ou égal à 2.

Partie B : Détermination de l

1. Soit α un réel appartenant à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $n = 2p+1$ un entier naturel impair.
Calculer $\sin(n\alpha)$ en fonction de $\sin(\alpha)$ et de $\cos\alpha$.
En déduire que :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \text{ impair} \Rightarrow \sin(n\alpha) = \sin^n \alpha \left[\binom{n}{1}\cot^{n-1}\alpha - \binom{n}{3}\cot^{n-3}\alpha + \binom{n}{5}\cot^{n-5}\alpha + \cdots\right].$
2. Démontrer que les racines du polynôme P tel que $P(X) = \sum_{k=1}^{n} \binom{2p+1}{2k+1} X^{p-k}$ sont les réels
$$x_k = \cot^2 \frac{k\pi}{2p+1} = \cot^2 \frac{k\pi}{n}$$
avec $k \in [\![1; p]\!]$.
3. En déduire une factorisation de $P(X)$ et montrer que la somme des racines de P est égale à $\frac{1}{6}(n-1)(n-2)$.
4. Sachant que : $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow (\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha)$ et $\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha\right)$; montrer que :
$$\frac{1}{6}(n-1)(n-2) < \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{n}{k\pi}\right)^2 < \frac{1}{6}(n-1)(n+1).$$
5. Déduire de cette double inégalité que :
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Treizième partie

Exercices de dénombrement

1 Ensembles finis.

Exercice 95. Soit E et F deux ensembles finis non vides disjoints. On pose n= Card E et p= Card F.
Montrer qu'il existe une bijection de $E \cup F$ sur $[\![1; n+p]\!]$.
En déduire que $\mathrm{Card}\,(E \cup F) = \mathrm{Card}\, E + \mathrm{Card}\, F$.

Exercice 96. Dans une classe de 28 élèves sportifs, 20 pratiquent le football et 13 le rugby. Combien d'élèves de cette classe pratiquent ces deux sports à la fois ?

Exercice 97. Un vendeur de chaines HI FI propose :
- 3 modèles de platines dont une de marque européenne,
- 4 modèles d'ampli-tuner dont 2 de marque européenne,
- 5 modèles d'enceintes dont 2 de marque européenne .

1. En supposant que tous ces matériels sont compatibles, combien de chaînes différentes peut-on lui acheter ?
2. Combien y a-t-il de choix possibles pour un client désirant qu'au moins 2 des 3 composants de sa chaîne soit de marque européenne ?

Exercice 98. Soit l'entier $n = 2^a 3^b 5^c 7^d$ avec $(a, b, c, d) \in (\mathbb{N}^*)^4$.

1. Quel est le nombre des diviseurs de n ?
2. Quel est le nombre de diviseurs de 169 047 648 ?

Exercice 99. Soit n un entier naturel donné.

1. Dénombrer le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^2$ de l'équation x+y=n.
2. Même question pour l'équation x+2y=n (on distinguera les cas n pair et n impair).

2 Applications d'un ensemble fini dans un autre. Combinaisons, Arrangements.

Exercice 100. Soit $E = \{x, y, z, t\}$ et $E' = \{a, e, i, o, u\}$.

1. Déterminer le nombre d'applications de E dans E', de E' dans E', de E dans E, de E' dans E.
2. Peut-on définir une surjection de E dans E', de E' dans E', de E dans E, de E' dans E ? Si oui, donner un exemple.
3. Mêmes questions pour une injection.
4. Mêmes questions pour une bijection.

Exercice 101. Combien existe-t-il de nombres entiers de quatre chiffres pris parmi 1,2,3,4 ? Quelle est leur somme ? Mêmes questions pour les nombres entiers formés de quatre chiffres distincts pris parmi 1,2,3,4.

Exercice 102. Une assemblée de vingt personnes doit élire un bureau composé de quatre membres : un président, une vice-président, un secrétaire et un trésorier. Quel est le nombre de bureaux possibles ?

Exercice 103. Quel est le nombre de mots de 6 lettres que l'ont peut former avec les lettres du mot CHAISE ayant 6 lettres distinctes, puis au plus 6 lettres distinctes ?

Exercice 104. De combien de manières peut-on ranger cinq objets différents dans 3 boîtes ? (une boîte peut contenir de 0 à 5 objets).

Exercice 105. Un numéro de téléphone comporte 7 chiffres. Déterminer le nombre de numéros de téléphone possibles.

Exercice 106. On considère trois personnes voulant manger chacune un gâteau. Il y 5 gâteaux, combien y a-t-il de choix possibles ?

Exercice 107. Quatre garçons et deux filles veulent s'asseoir sur un banc. Sachant que les deux filles veulent rester l'une à côté de l'autre, déterminer le nombre de manières de les disposer.

Exercice 108. Quatre filles et trois garçons veulent s'asseoir sur un banc. Déterminer le nombre de dispositions possibles :

1. si les garçons sont les uns à côtés des autres ainsi que les filles.
2. dans le cas contraire.

Exercice 109. Dix coureurs courent pour trois médailles (or, argent, bronze). De combien de façons peut-on attribuer ces médailles ?

Exercice 110. Quel est le nombre de poignées de mains échangées lorsque dix personnes se rencontrent et se saluent ?

Exercice 111. De combien de manières peut-on constituer un comité comprenant 2 femmes et 3 hommes dans une société contenant 15 femmes et 20 hommes ?

Exercice 112. Une "main" est un ensemble de 8 cartes d'un jeu de 32. Combien existe-t-il de mains :

1. contenant exactement 2 piques ?
2. contenant 3 piques, 2 carreaux, 2 trèfles ?
3. contenant 4 valets ?
4. contenant au moins 6 coeurs ?

Exercice 113. Combien de nombres distincts de 4 chiffres peut-on former en n'utilisant que 2,4,5,6,8 et 9 ? Répondre à cette question en supposant que ces chiffres sont utilisés qu'une seule fois.

Exercice 114. Un jeu de cubes pour enfant comporte 12 cubes permettant de former 6 images.
De combien de façons peut-on disposer ces cubes, en tenant compte de la position de chaque cube, de la face supérieure et de l'orientation de cette face ?

Exercice 115. Une association sportive compte dix coureurs de 100 m. Combien peut-on former d'équipes de relais 4x100m ? (l'ordre des coureur est à considérer). Combien y a-t-il d'équipe comprenant un coureur donné ?

Exercice 116.

1. Dans un lot de 20 pièces fabriquées, on en prélève 4. De combien de façons différentes peut-on faire ce prélèvement ?
2. On suppose que sur ces 20 pièces, 4 sont mauvaises. De combien de façons différentes peut-on faire le prélèvement dans les cas suivants :
   (a) Les 4 pièces sont bonnes ;
   (b) l'une au moins est mauvaise ;
   (c) deux au moins sont mauvaises ?

Exercice 117. On considère un jeu de 52 cartes. dénombrer le nombre de mains de 13 cartes :

1. en tout,
2. comportant les 4 dames,
3. comportant le valet de carreau et le roi de coeur,
4. comportant 3 piques dont l'as,
5. comportant au moins 5 coeurs,
6. ne comportant aucun trèfle et comportant au moins 4 coeurs,
7. comportant 7 coeurs au plus.

Exercice 118. On range n dossiers numérotés 1,2,... ,n dans n tiroirs numérotés aussi de 1 à n (on dispose un dossier et un seul par tiroir).

1. Dénombrer les différents rangements possibles .
2. Dénombrer les rangements suivants :
   (a) le dossier numéroté i est dans le tiroir numéroté i
   (b) les dossiers i et j sont respectivement dans les tiroirs i et j (i<j)
   (c) les dossiers $i_1, \cdots, i_n$ sont respectivement dans les tiroirs $i_1, \cdots, i_n$ avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$

Exercice 119. Soit un ensemble E de cardinal n (n>2) et a un élément donné de E.

1. On classe les arrangements d'ordre p de E (1<p<n) selon le critère suivant :
   - ceux contenant a
   - ceux ne contenant pas a.

   En déduire que $A_n^p = pA_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p$.
   Vérifier cette formule par le calcul.

2. En déduire une méthode de calculs des coefficients A_n^p en construisant le tableau suivant jusqu'à la ligne 7 :

n p	1	2	3	4	...
1	1				
2	2	2			
3	3	6	6		
4	4	12	24	24	

Exercice 120. Soit E un ensemble de cardinal n ($n > 1$), et a et b deux éléments de E. Soit p un entier naturel tel que $2 \leqslant p \leqslant n$.
On classe les parties de E à p éléments de la façon suivante : celles qui ne contiennent ni a ni b ; celles contenant un et un seul des éléments a et b ; celles contenant a et b.
En déduire la relation $\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2}$.

Exercice 121. Déterminer le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n côtés ($n>3$).

Exercice 122. Soit $P_n = A_n^1 + A_n^2 + \cdots + A_n^n$. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{P_n}{n!}$ est croissante et majorée.

Exercice 123. Reconnaître la fonction polynôme $x \mapsto \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \frac{x^{p+1}}{p+1}$.

En déduire la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p+1}\binom{n}{p}$.

Exercice 124. Reconnaître la fonction polynôme $x \mapsto \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} p x^{p+1}$.

En déduire la somme $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p}$.

3 Dénombrement et probabilités.

Exercice 125. Une urne contient 5 boules, 3 blanches numérotées 1,2, 3 et 2 noires numérotés 4 et 5. On tire deux boules.

1. Proposer un univers correspondant à ce problème et vérifiant l'hypothèse d'équiprobabilité.
2. Déterminer les probabilités des événements suivants : A : " les 2 boules sont blanches" , B : "les 2 boules sont noires", C :" les deux boules sont de couleurs différente" et D :"les boules sont de même couleur".

Exercice 126. Une boîte contient 10 piles électriques dont 5 sont défectueuses. On tire au hasard deux piles. Calculer la probabilité pour que :

1. Aucune pile tirées ne soit défectueuse.
2. Exactement une pile est défectueuse.
3. Au moins une pile est défectueuse.

Exercice 127. Un ascenseur dessert 8 étages. Six personnes prennent cet ascenseur au rez-de-chaussée. Trouver la probabilité de chacun des événements suivants : :

1. Deux personnes au moins descendent au même étage.
2. Deux personnes au même étage, les autres descendent chacun à des étages différents et différents du précédent.

Exercice 128. On tire cinq cartes, au hasard, d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir :

1. l'as de coeur
2. un as et un seul.
3. deux as exactement.
4. au moins un as.

Exercice 129. En jouant avec 3 dés discernables, de combien peut-on obtenir une somme de points égale à 7 ? et à 24 ? Quelle est la probabilité en jetant 3 dés pour que la somme soit multiple de 7 ?

Exercice 130. On tire successivement deux boules dans une urne qui contient a boules noires et b boules blanches. Quelle est la probabilité pour que la seconde boule soit noire ? On envisagera les deux cas où les tirages s'opèrent avec et sans remise.

Exercice 131. D'un jeu de 32 cartes, on tire quatre cartes une à une et on les dispose dans l'ordre où elle apparaissent. Quelle est la probabilité pour que la dernière carte et celle-là seulement soit une dame ?
On reprend le tirage de quatre cartes en remettant la carte tirée dans le paquet après chaque tirage. Quelle est la probabilité pour que la dernière carte et celle-là seulement soit une dame ?

Quatorzième partie

Espaces vectoriels

1 Quelques ensembles importants

1. Soit n un entier naturel non nul. Un n-uplet est une collection **ordonnée** de n réels[b].
   Par exemple : $(1, -1, 2, 0, 4)$ et $(-1, 1, 2, 4, 0)$ sont deux 5-uplets différents (les nombres qui les composent sont identiques mais ils ne sont pas rangés dans le même ordre).
   Ces n-uplets peuvent s'écrire en colonne ou en ligne.
   $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble de tous les n-uplets .
   Par exemple, $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \right\}$.
2. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites à valeurs réelles.
3. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ désigne l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.
4. $C^0[a; b]$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur le segment $[a; b]$.
5. $C^n[a; b]$ désigne l'ensemble des fonctions f dérivables n fois sur le segment $[a; b]$ et telles que $f^{(n)}$ est continue sur $[a; b]$.
6. $C^\infty[a; b]$ désigne l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur $[a; b]$.
7. $E = \mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
   Remarquons que si un polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ possède une infinité de racines, alors ce polynôme nul.
   Dans ce cas, $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.
8. $E = \mathbb{R}_n[X]$ représente l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n[a].

2 Loi de composition interne- loi de composition externe

2.1 Loi de composition interne

Définition 2.1. *Soit* E *un ensemble. Une loi de composition interne sur* E, *notée* $\star$ *est une application de* $E \times E$ *dans* E *:*

$$(x; y) \in E \times E \mapsto x \star y \ \in E.$$

2.1.1 Exemples

1. Les additions sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des lois de compositions internes.
2. L'addition des vecteurs du plan (ou de l'espace) est une loi de composition interne.
3. L'addition est une loi de composition interne sur $E = \mathbb{R}_n[X]$.
   En effet :
   $$\forall (P; Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, deg(P + Q) \leqslant max(degP; degQ)$$
   Exemple : Les polynômes P et Q tels que : $P(X) = X^3 + X$ et $Q(X) = -X^3$ sont deux éléments de $\mathbb{R}_3[X]$. Leur somme est le polynôme $P + Q$ défini par $(P + Q)(X) = X$ est aussi un élément de $\mathbb{R}_3[X]$.
4. La multiplication est une loi de composition interne sur $E = \mathbb{R}[X]$.

b. Un 1-uplet est un singleton, un 2-uplet est un couple, un 3-uplet est un triplet
a. Les polynômes constants sont de degré 0, hormis le polynôme nul auquel on affecte le degré $-\infty$

2.2 Loi de composition externe

Définition 2.2. *Soit* E *et* K *deux ensembles. Une loi de composition externe sur* E*, notée* $\cdot$ *est une application de* $K \times E$ *dans* E *:*

$$(\lambda, x) \in K \times E \mapsto \lambda \cdot x \ \in E.$$

Remarques
- Dans la suite de ce cours, on prendra $K = \mathbb{R}$ ou rarement $K = \mathbb{C}$ (ce sont les cas les plus répandus).
- On écrira plus simplement : $\lambda \cdot x = \lambda x$.
- Les éléments de K s'appellent des **scalaires** ou des **opérateurs**.

2.2.1 Exemples

1. $K = \mathbb{R}$ et E désigne l'ensemble des vecteurs du plan (ou de l'espace).
   La multiplication d'un vecteur de E par un réel est une loi de composition externe :
   $$(\lambda, \vec{u}) \in \mathbb{R} \times E \mapsto \lambda\vec{u} \ \in E.$$
2. $K = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}[X]$. La multiplication d'un vecteur de $\mathbb{R}[X]$ par un réel est une loi de composition externe.
   Prenons un exemple plus précis :
   Si $\lambda = 4$ et si P est le polynôme défini par $P(X) = 3X^3 - 2X - 1$, alors $4P$ est le polynôme défini par $4P(X) = 12X^3 - 8X - 4$.
3. $K = \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}$. L'application qui à tout réel x associe le réel x^n est une loi de composition externe.

3 Espaces vectoriels

3.1 Définition et exemples

Définition 3.1. *Soit* E *un ensemble muni d'une loi de composition interne notée* $+$ *et d'une loi de composition externe notée* "$\cdot$".
$(E, +, \cdot)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *si :*

1. $(E, +)$ *est un groupe commutatif.*
2. *Pour tout x de* E, $1 \cdot x = x$.
3. *Pour tout couple* $(\lambda; \mu)$ *de* $\mathbb{R}^2$*, et pour tout x de* E *:*
   $$\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x = \mu \cdot (\lambda \cdot x).$$
4. *Pour tout couple* $(\lambda; \mu)$ *de* $\mathbb{R}^2$*, et pour tout x de* E *:*
   $$(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x.$$
5. *Pour tout réel* λ *et pour tout couple* $(x; y)$ *de* E^2 *:*
   $$\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y.$$

Définition 3.2.
1. *Les éléments de l'espace vectoriel* E *sont appelés des* ***vecteurs****. Contrairement aux vecteurs du plan, il n'est pas nécessaire de les faire surmonter d'une flèche.*
2. *L'élément neutre du groupe* $(E; +)$ *est noté* 0_E *ou s'il n'y pas pas de confusion possible, 0 : c'est le vecteur nul de l'espace vectoriel* E.

Définition 3.3. *Soit* n *un entier naturel non nul. Soient* $(x_1; x_2; \cdots; x_n)$ n *vecteurs, non nécessairement distincts, d'un espace vectoriel* E*. L'ensemble des combinaisons linéaires de ces* n *vecteurs est noté* $\mathrm{Vect}(x_1; x_2; \cdots; x_n)$ *:*

$$\mathrm{Vect}(x_1; x_2; \cdots; x_n) = \left\{ x \in E / \exists (a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n, x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\}.$$

Cas particuliers :
• $n = 1$ *et* $x_1 \neq 0_E$ *: l'ensemble* $\mathrm{Vect}(x_1) = \{kx_1 / k \in \mathbb{R}\}$ *est appelé* ***droite vectorielle***
• $n = 2$*. Soient* x_1 *et* x_2 *deux vecteurs non nuls et non colinéaires, c'est-à-dire tels qu'il n'existe pas de réel* k *tel que* $x_2 = kx_1$*. Alors* $\mathrm{Vect}(x_1, x_2)$ *est appelé* ***plan vectoriel****.*

Exemple Plaçons-nous dans $\mathbb{R}[X]$:
$\mathrm{Vect}(1; X; X^2) = \{aX^2 + bX + c / (a; b; c) \in \mathbb{R}^3\} = \mathbb{R}_2[X]$.
Remarques

1. Un espace vectoriel ne peut être vide : il contient en effet 0_E.
2. S'il n'y a aucune confusion possible, on pourra simplement dire que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, sans préciser les loi de composition.
3. On dit aussi que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
4. On obtient de même la définition d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{Q}$) en remplaçant dans la définition $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{Q}$).
5. Tout espace vectoriel doit contenir le vecteur nul.
6. De même :
$$\forall x \in E, -x \in E.$$
7. Les deux remarques précédentes permettent parfois de montrer rapidement que certains ensembles ne sont pas des espaces vectoriels.

3.2 Exemples

1. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. L'ensemble des vecteurs du plan ainsi que l'ensemble des vecteurs de l'espace sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
4. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$, ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
5. Tous les ensembles vus dans la première section sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

3.3 Propriétés

Propriété 3.1. *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel. Soit* (λ, x) *un élément de* $\mathbb{R} \times E$*.*

1. $\lambda \cdot x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ *ou* $x = 0_E$
2. *Si* $\lambda \neq 0$ *et si* $\lambda \cdot x = \lambda \cdot y$*, alors* $x = y$*.*
3. *Si* $x \neq 0_E$ *et si* $\lambda \cdot x = \mu \cdot x$*, alors* $\lambda = \mu$*.*
4. $-x$ *désignant le symétrique (ou opposé) de* x *par rapport à la loi de composition interne* $+$ *:*
$$\forall x \in E, \qquad (-1) \cdot x = -x.$$

4 Sous-espace vectoriel

Définition 4.1. *Soit* F *un sous-ensemble d'un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $(E, +, \cdot)$*.*
F *est un sous-espace vectoriel de* E *si* $(F, +, \cdot)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel .*

Exemples triviaux
• $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
• E est un sous-espace vectoriel de E.

En reprenant les mêmes notations, nous avons le théorème suivant qui est très important :

Théorème 4.1. F *est un sous-espace vectoriel de* E *si et seulement si :*

1. $0_E \in F$

2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (x;y) \in F^2$, $\lambda \cdot x + y \in F$.

Concrètement, un sous-ensemble F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E s'il contient 0_E et s'il est stable par combinaison linéaire.
Ce théorème est fondamental. Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel est une question fréquente. Pour ce faire, on n'utilise quasiment jamais la définition initiale qui est réservée pour les ensembles fondamentaux énoncés dans la première section.
La méthode consiste donc à prouver que l'ensemble considéré est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.
Voyons tout de suite des exemples pour mieux comprendre.

1. $x_1; x_2; \cdots; x_n$ désignent n vecteurs d'un espace vectoriel E.
   $A = \text{Vect}(x_1; x_2; \cdots; x_n) = \left\{ x \in E / \exists (a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n, x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\}$ est un espace vectoriel, appelé **sous-espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs** $(x_1; x_2; \cdots; x_n)$.
   • A est un sous-ensemble de E car chaque terme $a_i x_i$ de la somme est un élément de E ($\cdot$ est une loi externe). Cette somme appartient à E car l'addition est une loi de composition interne sur E.
   • $0_E \in A$: il suffit de poser $a_1 = \cdots = a_n = 0$.
   • Soient $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$ deux éléments de A. Soit λ un réel quelconque.
   $$\lambda x + y = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i + b_i) x_i.$$
   Le vecteur $\lambda x + y$ est donc combinaison linéaire de la famille $(x_1; x_2; \cdots; x_n)$: il appartient donc à A qui est donc un espace vectoriel.
2. A tout couple (a, b) de réels, on associe la matrice $M(a, b)$ définie par : $M(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$.
   On désigne par E l'ensemble de ces matrices où a et b décrivent $\mathbb{R}$.
   • E est est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(\mathbb{R}; 3)$.
   • $M(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}(\mathbb{R};3)}$ est un élément de E.
   • Soient $M(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$ et $M(a',b') = \begin{pmatrix} a'+2b' & -b' & -2b' \\ 2b' & a'-b' & -4b' \\ -b' & b' & a'+3b' \end{pmatrix}$ deux éléments de E. Soit λ un réel quelconque.
   $\lambda M(a,b) + M(a',b') = \begin{pmatrix} \lambda a + a' + 2(\lambda b + b') & -(\lambda b + b') & -2(\lambda b + b') \\ 2(\lambda b + b') & \lambda a + a' - (\lambda b + b') & -4(\lambda b + b') \\ -(\lambda b + b') & \lambda b + b' & \lambda a + a' + 3(\lambda b + b') \end{pmatrix}$
   Donc : $\lambda M(a,b) + M(a',b') = M(\lambda a + a', \lambda b + b') \in E$.

   E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(\mathbb{R}; 3)$
3. Soit E l'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$. a et b étant deux réels donnés.
   Montrons que E est un sev (sous-espace vectoriel) de $C^\infty(\mathbb{R})$.
   • On admettra que toute solution de cette équation est de classeC^∞. Donc E est inclus dans $C^\infty(\mathbb{R})$.
   • La fonction nulle est solution de l'équation différentielle.
   • Soient f_1 et f_2 deux solutions de l'équation différentielle. Soit λ un réel quelconque.
   La fonction $\lambda f_1 + f_2$ est aussi de l'équation différentielle (calculer $(\lambda f_1 + f_2)'' + a(\lambda f_1 + f_2)' + b(\lambda f_1 + f_2)$).
   E est donc un espace vectoriel car sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R})$.

4. $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + z = 0 \text{ et } x = 0 \right\}$.

   Montrons que E est un sev de R^3.

   • $0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un élément de E car ses coordonnées vérifient simultanément les deux égalités définissant E.

   • Soit $a = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux éléments de E et soit λ un réel quelconque.

   $\lambda a + b = \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \\ \lambda z + z' \end{pmatrix}$

   Vérifions que les coordonnées de cet éléments vérifient les deux équations définissant E :

   (a) $\lambda x + x' + 2(\lambda y + y') + \lambda z + z' = \lambda(x + 2y + z) + (x' + 2y' + z') = 0$

   (b) $\lambda x + x' = 0$

   E est donc un espace vectoriel .

Voyons à présent quelques exemples d'ensembles n'étant pas des espaces vectoriels.

1. $E = \{P \in \mathbb{R}[X] / P' = 4\}$

   Le polynôme nul n'appartient pas à E . D'où la conclusion.

2. $E = \{f \in C^0([a;b]) / \forall x \in [a;b], f(x) \geqslant 0\}$.

   Si f est un élément de E différent de la fonction nulle (prendre par exemple $f : x \mapsto 1$), alors $-f$ n'appartient pas à E. D'où la conclusion.

3. $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / xy = 0 \right\}$.

   $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiennent à E. Par contre, leur somme $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas un élément de E. Nous avons donc exhibé une combinaison linéaire de deux éléments de E n'appartenant pas à E qui ne peut donc pas être un espace vectoriel.

4. $E = \{x \in \mathbb{R}, \cos x = 0\}$. $\dfrac{\pi}{2}$ est un élément de E. Si E était un espace vectoriel, alors tout réel de la forme $\lambda\dfrac{\pi}{2}$ devrait vérifier $\cos\left(\lambda\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, ce qui n'est pas le cas (il suffit de poser $\lambda = \dfrac{1}{2}$).

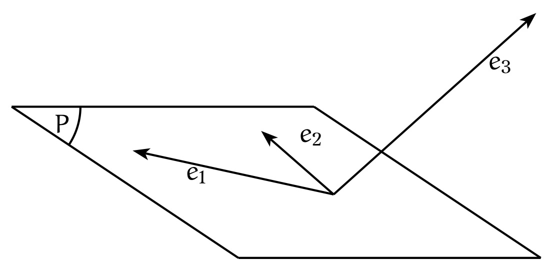
5 Familles libres-Familles liées

Dans tout ce qui suit, E désigne un espace vectoriel et n un entier naturel non nul.

5.1 Familles libres

Définition 5.1. *Une famille* $(x_1; \cdots; x_n)$ *de vecteurs de* E *est libre si et seulement si :*

$$\forall (a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0_E \Longrightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0.$$



Visualisation dans $\mathbb{R}^3$ **: Le vecteur** e_3 **n'appartient pas au plan** P **: la famille** $(e_1; e_2; e_3)$ **est libre.**

Exemples

1. Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$:
   - les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ forment une famille libre.
   En effet : le vecteur $a\vec{i} + b\vec{j}$ a pour coordonnées $(a; b)$ et donc $a\vec{i} + b\vec{j} = \vec{0} \Longrightarrow a = b = 0$.
   - Plus généralement deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires forment une famille libre.
2. La famille de polynômes $(1; X; X^2; \cdots; X^n)$ est libre quelle que soit l'entier naturel n.

   Considérons en effet le polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$.

   Si P est le polynôme nul, alors $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. La famille considérée est donc libre.

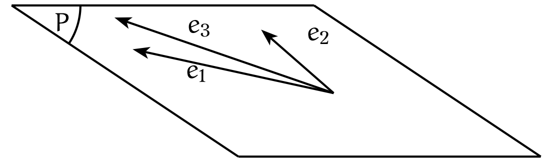
Propriété 5.1. • *Toute famille composée d'un seul vecteur non nul est libre.*
• *Si* $(x_1; \cdots; x_n)$ *est une famille libre, alors toute sous-famille est aussi libre.*

5.2 Familles liées

Définition 5.2. *Une famille* $(x_1; \cdots; x_n)$ *de vecteurs de* E *est liée si elle n'est pas libre.*

Autrement dit il existe une famille de n *réels* $(a_1; a_2; \cdots; a_n)$ *non tous nuls telle que* $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$.

Si la famille contient au moins deux vecteurs, cela signifie qu'il existe un vecteur pouvant s'écrire comme combinaison linéaire des autres vecteurs.



Visualisation dans $\mathbb{R}^3$: Le vecteur e_3 appartient au plan P : il peut donc s'exprimer comme combinaison linéaire de e_1 et e_2-la famille $(e_1; e_2; e_3)$ est liée.

Exemple Si $3x_1 + 0x_2 - 6x_3 = 0_E$ alors $x_1 = 2x_3$

Propriété 5.2. 1. *la famille (0_E) est liée.*

2. *Toute famille comportant le vecteur nul est liée. Il suffit de prendre tous les a_i nuls sauf celui correspondant au vecteur nul, lequel coefficient pouvant prendre toute valeur réelle non nulle.*
   ***Exemple** : Pour $(0_E; x_2; x_3)$: $2.0_E + 0.x_2 + 0.x_3 = 0_E$ ($a_1 = 2; a_2 = a_3 = 0$ mais a_1 aurait pu prendre toute autre valeur réelle non nulle).*
3. *Si l'un des vecteurs d'une famille est combinaison linéaire d'autres vecteur de cette famille, alors celle-ci est liée.*
   ***Exemple** La famille $(x_1; x_2 = 3x_1 + 2x_3; x_3; x_4; x_5)$ est liée car $-3x_1 + x_2 - 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0_E$.*
4. *Si un même vecteur apparait au moins deux fois dans une famille, alors celle-ci est liée. Il s'agit d'un cas particulier de la propriété précédente.*
   ***Exemple** : La famille $(x_1; x_2; x_3; x_1)$ est liée car $1.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + (-1).x_1 = 0_E$.*
5. *Toute surfamille d'une famille liée est liée.*
   ***Exemple** : Si $(x_1; x_2; x_3)$ est liée il en est de même pour toute famille de la forme $(x_1; x_2; x_3; \cdots)$.*

6 Familles génératrices-Bases

6.1 Définitions

Définition 6.1. *Une famille de vecteurs $(e_1; e_2; \cdots; e_n)$ engendre l'espace vectoriel E si $\mathrm{Vect}(e_1; e_2; \cdots; e_n) = E$, c'est-à-dire si :*

$$\forall x \in E,\ \exists (a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i.$$

On dit que la famille $(e_1; e_2; \cdots; e_n)$ est génératrice.

Définition 6.2. *Une famille de vecteurs $(e_1; e_2; \cdots; e_n)$ est une base d'une espace vectoriel E si elle est libre et si elle engendre E.*

Remarque On a bien sûr : $E = \mathrm{Vect}(e_1; e_2; \cdots; e_n)$.

Définition 6.3. *Les réels a_i sont appelés les coordonnées de x dans la base $(e_1; e_2; \cdots; e_n)$.*

Exemples • Les vecteurs $e_1(1; 0; 0)$, $e_2(0; 1; 0)$ et $e_3(0; 0; 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ qui est appelée base canonique de $\mathbb{R}^3$.
• Les polynômes 1,X,X^2,..., X^n forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$, appelée base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
• Les np matrices $E_{i,j}$ de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ pour lesquelles tous les coefficients sont nuls sauf $a_{i,j} = 1$ forment une base de $M_{n,p}(\mathbb{R})$.

7 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 7.1. *Soit n un entier naturel non nul.*
Un espace vectoriel E est de dimension finie s'il possède une base constituée de n vecteurs.
Dans ce cas, on dit que E est un espace vectoriel de dimension n et on note $\dim E = n$.

Remarque : L'espace vectoriel $\{0\}$ est de dimension 0, il est le seul espace a posséder cette dimension!
Exemples
• Si u est un vecteur non nul, alors $E = \mathrm{Vect}(u)$ est un espace vectoriel de dimension 1. On dit que E est une droite vectorielle.
• Si u et v sont deux vecteurs non liés, alors $E = \mathrm{Vect}(u, v)$ est un espace vectoriel de dimension 2. On dit que E est un plan vectoriel.
• $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$
• L'espace vectoriel réel $\mathbb{C}$ est de dimension 2 car $(1; i)$ forme une base de $\mathbb{C}$.
• $\dim \mathbb{R}^n = n$.

- $\dim M_n(\mathbb{R}) = n^2$.

7.1 Caractérisations et propriétés

Théorème 7.1. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie* n.
- *Une famille de* n *vecteurs est une base de* E *si et seulement si elle est libre.*
- *Une famille de* n *vecteurs est une base de* E *si et seulement si elle est génératrice.*

Théorème 7.2. *Soit* F *un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel* E *de dimension finie* n. *Alors :*
- F *est un espace vectoriel de dimension finie et dim* $F \leqslant n$.
- $F = E \Leftrightarrow \dim F = n$.

7.2 Rang

Définition 7.2. *Le rang d'une famille finie* $\mathcal{F}$ *de vecteurs est la dimension de l'espace vectoriel qu'elle engendre :*

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim \mathrm{Vect}(\mathcal{F}).$$

Théorème 7.3. • *Une famille finie d'un espace vectoriel* E *est génératrice si et seulement son rang est égal à la dimension de* E.
- *Une famille finie est libre si son rang est égal à son nombre d'éléments.*

8 Applications linéaires

Dans cette section, E et F désignent 2 espaces vectoriels.

8.1 Définition et propriétés

Définition 8.1. *Une application de* E *dans* F *est linéaire si :*

$$\forall (x; y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Exemples • Id_E
- $a \in \mathbb{R}$ $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax \end{array}$
- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x; y; z) & \longmapsto & (4x + 3y - z; -x + 3y) \end{array}$
- $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array}$
- Soit E l'ensemble des fonctions dérivables sur un intervalle I :

$\phi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$ Soit f une application de E dans F.

Propriété 8.1. $f(0_E) = 0_F$

Cette proposition permet souvent de démontrer qu'une application n'est pas linéaire :
Exemples Les applications suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$ ne sont pas linéaires :

$$f_1 : (x, y) \mapsto (x, x + y - 3) \qquad f_2 : (x, y) \mapsto (e^{xy}, x - y).$$

Théorème 8.1. *Si* $S = (x_1; \cdots; x_n)$ *est une famille de générateurs de* E, *alors* $f(S)$ *est un système de générateurs de* $f(E)$.

Théorème 8.2. *Si* $S = (x_1; \cdots; x_n)$ *est une famille liée de* E, *alors* $f(S)$ *est une famille liée.*

Théorème 8.3. *Si* $(f(x_1); \cdots; f(x_n))$ *est une famille libre de* F, *alors* $(x_1; \cdots; x_n)$ *est une famille libre de* E.

Attention : l'image d'une famille libre par f n'est pas nécessairement une famille libre!

8.2 Image directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel. Image et noyau d'une application linéaire

Soit f une application de E dans F. Soit E' un sous-espace vectoriel de E et F' un sous-espace vectoriel de F.

Théorème 8.4. $f(E')$ *est sous-espace vectoriel de* F.

Définition 8.2. $f(E)$ *est un sous-espace vectoriel de* F, *noté* $\operatorname{Im} f$.

Théorème 8.5. f *est surjective de* E *sur* $F \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F$.

Remarque Si $\mathcal{B}$ est une base de E, alors $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de $f(E)$ mais n'en est pas nécessairement une base.

Théorème 8.6. $f^{-1}(F')$ *est sous-espace vectoriel de* E.

Définition 8.3. $f^{-1}(0_{E'})$ *est un sous-espace vectoriel de* E, *noté* $\operatorname{Ker} f$.

Exemples

Exercice 132. Soit f un endomorphisme de E. On note $f \circ f = f^2$. Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$. A-t-on égalité ?

Théorème 8.7. *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels de même dimension finie, et* f *une application linéaire de* E *dans* F.
Les insertions suivantes sont équivalentes :

1. f *est bijective.*
2. $\forall y \in F, \exists! x \in E : f(x) = y$.
3. *l'image d'une base de* E *par* f *est une base de* F.
4. *l'image de toute base de* E *par* f *est une base de* F.
5. f *est injective.*
6. $\ker f = \{0_E\}$.
7. f *est sujective*
8. $\operatorname{Im} f = F$.
9. *Il existe une application linéaire* g *de* F *dans* E *telle que* $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ *et* $f \circ g = \mathrm{Id}_F$

Finissons par un théorème fondamental :

Théorème du rang

Théorème 8.8. *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels de dimensions finies. Soit* f *une application linéaire de* E *dans* F. *Alors :*

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim E.$$

8.3 Détermination d'une application linéaire

Théorème 8.9. *Soit* $\mathcal{B}$ *une base de* E. *Soit* $\mathcal{B}'$ *une base de* F.
Une application linéaire de E *dans* F *est entièrement déterminée par les images vus dans* $\mathcal{B}'$ *des vecteurs de* $\mathcal{B}$ *par* f.

Démonstration . *Soit* $\mathcal{B} = (e_i)_{(1 \leqslant i \leqslant n)}$ *une base de* E. *Supposons connues les images de ces vecteurs par* f *en posant :* $\forall \in \{1; 2; 3; \cdots; n\}$, $f(e_i) = f_i$ *(les coordonnées des vecteurs* f_i *étant lues dans la base* $\mathcal{B}'$*).*

Soit alors $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ *un vecteur quelconque de* E. *Par linéarité de* f *nous obtenons immédiatement :*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i.$$

$\diamondsuit$

Exemples

• $\mathbb{R}^3$ étant muni de sa base canonique, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit $x \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2e_1 + 3e_2 + e_3$.

Alors $f(x) = 2f(e_1) + 3f(e_2) + f(e_3) = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$.

et plus généralement $\forall x \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, f(x) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 2a_1 + 2a_3 \\ 3a_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$.

• f est l'application linéaire de $\mathbb{R}_5[X]$ dans $\mathbb{R}_4[X]$ qui à tout polynôme de $\mathbb{R}_5[X]$ associe son polynôme dérivé P'.
$\{1, X, X^2, X^3, X^4, X^5\}$ est la base canonique de $R_5[X]$ et écrire les égalités

$$f(1) = 0 \qquad f(X) = 1 \qquad f(X^2) = 2X \qquad f(X^3) = 3X^2 \qquad f(X^4) = 4X^3 \qquad f(X^5) = 5X^4,$$

permet de déterminer le polynôme dérivée de tout polynôme de $\mathbb{R}_5[X]$ qui sera donc de degré maximal 4.

8.4 Matrice d'une application linéaire

Définition 8.4. *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels de dimensions respectives* n *et* p. *Soient* $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *une base de* E *et* $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *une base de* F. *La matrice de* f *relativement à ces deux bases est la matrice de* $M_{p,n}(\mathbb{R})$ *dont les colonnes sont composées des coordonnées, lues dans la base* $\mathcal{B}'$, *des vecteurs* $f(e_i)$ *pour* i *variant de 1 à* n *:*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} f(e_1) & f(e_2) & & & f(e_n) \\ \downarrow & \downarrow & & & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ \\ \\ \\ \\ e'_p \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \end{array}$$

On a donc : $f(e_1) = a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \cdots + a_{p1}e'_p$ *et ainsi de suite.....*

Exemples

Reprenons les deux exemples de la section précédente :

- $$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- f est l'application linéaire de $\mathbb{R}_5[X]$ dans $\mathbb{R}_4[X]$ qui à tout polynôme de $\mathbb{R}_5[X]$ associe son polynôme dérivé P'. La matrice de f est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Théorème 8.10. *Reprenons les notations de la définition précédente. Soit* $x \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ *un vecteur de* E.

Soit M *la matrice associée à* f *et* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ *la matrice colonne correspondant aux coordonnées de* x.

Les coordonnées de $f(x)$ *dans la base* $\mathcal{B}'$ *sont données par la matrice colonne* MX.

Exemples

- Reprenons : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_5[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_4[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$

Soit $P(X) = 5X^5 + 4X^3 - 3X^2 + 2X - 5$. Ses coordonnées dans la base canonique sont $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Par conséquent les coordonnées de $f(P)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$ sont données par le produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 16 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice colonne correspond aux coordonnées du polynôme $P'(X) = 25X^4 + 16X^2 - 6X + 2$. On retrouve bien l'expression du polynôme dérivé..... qui aurait pu être obtenue bien plus facilement en dérivant directement!

- Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique représenté par la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Déterminons Kerf.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow f < \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} >= 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&1&0\\2&0&2\\3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y&=&0\\ 2x+2z&=&0\\ 3x&=&0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x&=&0\\ y&=&0\\ z&=&0\end{array}\right.$$

$\mathrm{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. f est donc injectif. En tant qu'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que f est aussi un isomorphisme.

- Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&0&-2\\3&2&5\end{pmatrix}$.

Déterminons une base de l'image de f.
Tout d'abord, il faut déterminer la dimension du noyau de f :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow f < \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} >= 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&1&2\\-2&0&2\\3&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z&=&0\\ -2x-2z&=&0\\ 3x+2y+5z&=&0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x&=&-z\\ y&=&-z\\ y&=&-z\end{array}\right.$$

Le choix d'une valeur pour z détermine les valeurs de x et de y : il n'y a donc qu'un seul " degré de liberté". Le noyau est donc un espace vectoriel de dimension 1. Il s'agit d'une droite vectorielle, engendrée par exemple par $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ (en prenant $z=-1$).

Le théorème du rang permet d'affirmer que $\mathrm{Im} f$ est un espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 (il s'agit donc d'un plan). Pour trouver une base de cet espace vectoriel, il suffit de trouver 2 vecteurs formant une famille libre- donc non colinéaires- appartenant à $\mathrm{Im} f$. La matrice de f donne les images des vecteurs de base : $f(e_1) = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $f(e_2) = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles. Ce sont donc deux vecteurs de $\mathrm{Im} f$ et formant une famille libre d'un espace vectoriel de dimension 2 : ils en forment donc une base.

Par conséquent : la famille $< \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} >$ est une base de $\mathrm{Im} f$.

- Bien entendu la matrice permet de trouver d'autres bases : $< \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}2\\-2\\5\end{pmatrix} >$ et $< \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}2\\-2\\5\end{pmatrix} >$

Théorème 8.11. *Soient* E, F *et* G *trois espaces vectoriels munis respectivement des bases* $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ *et* $\mathcal{B}_3$.
Soient $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ *deux applications linéaires de matrices respectives* $M(f)_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ *et* $M(g)_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}$ *relativement aux bases ci-dessus.*
Alors $g \circ f$ *est une application linéaire de* E *vers* G *et dont la matrice est :*

$$M(g\circ f)_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3} = M(g)_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3} M(f)_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$$

Exercice 133. On considère $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$ espace vectoriel dans la base canonique $\mathcal{B}_1$ est $(1, i)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_2 = (1, j)$ est une base de $\mathbb{C}$.
2. Soit z un complexe dont les coordonnées dans $\mathcal{B}_1$ sont $(a; b)$. Déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{B}_2$.
3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}$ défini par :

$$f(a+ib) = (3a - 2b + i(-a+b)).$$

4. Déterminer la matrice $M(f)_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$
5. Déterminer le noyau de f.

Exercice 134. On considère l'ensemble E des applications $f_{a,b}$ de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f_{a,b}(x) = a + \frac{b}{x} \qquad \text{où} \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^*}$.

2. Démontrer que $(f_{1,0}, f_{0,1})$ est une base de E notée B.
3. Démontrer que $(f_{1,1}, f_{3,2})$ est une base de E notée B'.
4. Déterminer les coordonnées de $f_{a,b}$ dans la base B'.

Exercice 135. Dans le plan vectoriel E muni de la base $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère l'endomorphisme f défini par :

$$f(\vec{i}) = (m-1)\vec{i} + \vec{j}, \qquad f(\vec{j}) = -2\vec{i} + (m-4)\vec{j}.$$

Discuter suivant les valeurs de m, la nature et la dimension de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ et vérifier dans chaque cas que :

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E.$$

Exercice 136. E est un espace vectoriel réel de dimension 3. Soit u l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le noyau de u, sa dimension ainsi qu'une base de celui-ci.
2. Quelle est l'image de E par u ?
3. Calculer A^n si n appartient à $\mathbb{N}^*$.

Exercice 137. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'image d'un triplet quelconque (x, y, z).
2. Déterminer le noyau de f. En donner une base.
3. Déterminer l'image de f. En donner une base.
4. Déterminer $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$.
5. Démontrer que tout triplet est la somme d'un élément de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.
   Cette décomposition est-elle unique ?

Exercice 138. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ donné par sa matrice dans la base canonique :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les réels α tels qu'il existe au moins un couple $'x, y)$ différent de $(0,0)$ vérifiant $f((x,y)) = \alpha(x,y)$.
2. Déterminer l'ensemble E_1 des couples (x, y) et l'ensemble E_2 des couples (x, y) qui vérifient respectivement :
   $$f((x,y)) = -(x,y) \qquad \text{et} \qquad f((x,y)) = 2(x,y).$$
3. On donne $\vec{e_1} = (-1, 1)$ et $\vec{e_2} = (2, 1)$.
   (a) Soit (x, y) de $\mathbb{R}^2$, exprimer (x, y) comme combinaison linéaire de $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$. Montrer que $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Soit $f(\alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2}) = \alpha'\vec{e_1} + \beta'\vec{e_2}$ où $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ sont des réels. Calculer (α', β') en fonction de α et β.
   (c) On pose $f^2 = f \circ f$ et $f^{n+1} = f^n$: circf pour $n > 0$. Exprimer $f^2(\alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2})$, $f^3(\alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2})$ puis $f^n(\alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2})$ dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$.
   (d) En déduire l'expression de $f^n((x,y))$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
4. On considère la suite réelle u définie par la donnée de u_0 et u_1 et de la relation :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$
   Pour tout entier n, on associe le couple $\vec{X_n} = (u_{n+1}, u_n)$.

(a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(\vec{X_n}) = \vec{X}_{n+1}.$$

(b) En déduire que :

$$\vec{X_n} = f^n(\vec{X_0}).$$

(c) En utilisant le 3), calculer u_{n+2} en fonction de n, u_0 et u_1.

Exercice 139. Soit $f, g : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ les applications définies par $f(P) = XP$ et $g(P) = P'$.

1. Vérifier que f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$.

   (a) Montrer que $g \circ f - f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}$.

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g \circ f^n - f^n \circ g = nf^{n-1}$.

Quinzième partie
Pot-pourri

Merci à M. Omarjee

Exercice 140. $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}, f(z) = \dfrac{iz-2+4i}{z-i}$.

1. Déterminer le domaine définition D de f.
2. Montrer que si z est dans D , $f(f(z)) = z$. déterminer f^{-1} la fonction réciproque de f.
3. On pose : $w = z - i$ et $r = f(z) - i$.
   Montrer qu'il existe a, b dans $\mathbb{Z}$ tels que $w.r = a + ib$.
4. En déduire que l'image d'un cercle de centre i de rayon R est un cercle de même centre de rayon R' à déterminer.

Exercice 141.

1. Déterminer les matrices A de $M(2,\mathbb{R})$ telles que pour tout X dans $\mathbb{R}^2$, ${}^tX.A.X = 0$ où ${}^tX$ est la transposée de X.
2. Même question avec A dans $M(3,\mathbb{R})$ telles que pour tout X dans $\mathbb{R}^3$, ${}^tX.A.X = 0$.

Exercice 142. Soit la suite X la suite définie par :
$X(0) = 5$ et pour tout entier n : $X(n+1) = X(n) + \dfrac{1}{X(n)}$.

1. Etudier la convergence de la suite $(X(n))$.
2. Montrer que $45 < X(1000) < 45,1$.

Exercice 143. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers relatifs (x, y, y, t) tels que : $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0$.

Exercice 144. Pour A et B dans $\mathcal{M}_2\mathbb{R}$, montrer que : $\det(A+B) + \det(A-B) = 2\det(A) + 2\det(B)$.

Exercice 145. "a" désigne un réel non nul. Calculer la limite de $f(x) = \dfrac{1-\cos(ax)}{x^2}$ quand x tend vers 0.

Exercice 146. n est un entier naturel non nul fixé.
$f(x) = g(x,1).g(x,2)\dots g(x,n)$ avec $g(x,k) = \dfrac{1-\sin^k(x)}{\cos^2(x)}$.
Calculer limite de f en $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 147. [fonctions convexes-eric]
Partie A
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
On dit que f est convexe sur I si :

$$\forall (x;y) \in I^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

1. (a) Montrer que les fonctions $f_1 : x \mapsto x^2$ et $f_2 : x \mapsto e^x$ sont des fonctions convexes sur $\mathbb{R}$.
   (b) La fonction $f_3 : x \mapsto \ln x$ est-elle convexe sur $]0;+\infty[$?
2. On considère la fonction h définie sur $[0;\pi]$ par $h(x) = -\sin x$.
   (a) Montrer que h est convexe sur $[0;\pi]$.
   (b) Montrer que :
   $$\forall (x;y) \in [0;\pi]^2,\ x \neq y \Rightarrow h\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{h(x)+h(y)}{2}.$$
3. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) > 0.$$
   (a) Soit x_0 un réel fixé et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$g(x) = f\left(\frac{x+x_0}{2}\right) - \left[\frac{f(x)+f(x_0)}{2}\right].$$
   Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$.

(b) Montrer que si $x < x_0$, $g'(x) > 0$ et si $x > x_0$, $g'(x) < 0$.
En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \leqslant 0$, et que f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.

Partie B
On considère la fonction φ définie sur $[0;2\pi]$ par :

$$\varphi(x) = \sin\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{4}.$$

1. Etudier les variations de φ sur $[0;2\pi]$.
2. En déduire l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Partie C
Soit O un point donné du plan et R un réel strictement positif donné. Soit Γ le cercle de centre O et de rayon R.
Soit A un point fixé de Γ et α, β, γ trois réels positifs vérifiant $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$.
On désigne par B et C les points de Γ tels que α, β, γ soient des mesures respectives des angles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})$.

1. Calculer en fonction de R, α et β le périmètre P du triangle ABC.
2. Montrer, en utilisant les parties A et B que :

$$P \leqslant 2R\varphi(\alpha + \beta) \leqslant 3R\sqrt{3}.$$

   et que si $\alpha \neq \beta$, $P < 3R\sqrt{3}$.
3. Pour quelles positions des points B et C le triangle ABC a-t-il un périmètre maximal ?

Exercice 148.
Partie A

1. Comment choisir le triplet (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ pour que $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ xP'(x) - 2P(x) = 0\,?$$

2. Soit f une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$.
   - Vérifier que g est dérivable sur $]0;+\infty[$;
   - Démontrer que f vérifie la relation :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ xf'(x) - 2f(x) = \ln x \qquad (1)$$

   si et seulement si g est une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^3}$ sur $]0;+\infty[$.
3. Déterminer toutes les primitives de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^3}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. En déduire l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur $]0;+\infty[$ vérifiant la relation (1).
5. On désigne par φ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $x \mapsto -\dfrac{1+\ln(x^2)}{4} + \dfrac{1}{4}x^2$.
   Etudier la fonction φ et construire sa courbe dans un repère orthonormé.

Partie B

1. Soit λ un réel strictement positif fixé. Calculer en fonction de λ l'intégrale $I(\lambda) = \displaystyle\int_\lambda^1 \varphi(x)dx$.
2. Montrer que lorsque λ tend vers 0, $I(\lambda)$ tend vers un réel à préciser.
3. Dans tout ce qui suit, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
   Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n+1$, et pour tout x tel que $\dfrac{k}{n} \leqslant x \leqslant \dfrac{k+1}{n}$, on a :

$$\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

et :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) < \mathrm{I}\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n}\right).$$

En déduire l'encadrement :

$$\mathrm{I}\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) < \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + \mathrm{I}\left(\frac{1}{n}\right).$$

4. Déduire des questions précédentes que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{n\geqslant 2}$ admet une limite finie à déterminer.

5. (a) Montrer que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n}{k}\right) - \frac{1}{4}.$$

   (b) Etablir les égalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n}{k}\right) = \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right).$$

   (c) Utiliser les résultats précédents pour démontrer que les deux suites $(u_n)_{(n\geqslant 2)}$ et $(v_n)_{(n\geqslant 2)}$ telles que $u_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ et $v_n = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$ convergent. Calculer leurs limites respectives.

Exercice 149.

1. Calculer, pour tout entier $n > 0$:

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^n}dx.$$

2. Soit $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, soit α un nombre réel, et p l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall n \in \Omega,\ p(n) = n^2\alpha \mathrm{I}_n.$$

Déterminer α pour qu'il existe une probabilité P sur $(\Omega, P(\omega))$ telle que, pour tout n de Ω, on ait $P(\{n\}) = p(n)$.

Exercice 150. [Théorème de Sylvester]
Dans tout ce qui suit, on pose $A = 1+\sqrt{3}$.
Le but de cet exercice est de montrer que, pour tout entier naturel m, la partie entière de A^{2m+1} est divisible par 2^{m+1}.

1. En utilisant la calculatrice, vérifier cette propriété pour A, A^3 puis pour A^5.
2. Ecrire un algorithme permettant de vérifier cette propriété pour tout entier naturel m.
3. (a) Démontrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies de manière unique, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = a_n + b_n\sqrt{3}.$$

   (b) Exprimer, pour tout entier naturel n, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   (c) Conjecturer une relation simple entre la partie entière de A^{2m+1} et a_{2m+1}.
4. Soient m et k deux entiers naturels.
Montrer que si a_{2m+1} et b_{2m+1} sont divisibles par 2^k, alors a_{2m+3} et b_{2m+3} sont divisibles par 2^{k+1}.
5. En déduire que, pour tout entier naturel m, a_{2m+1} et b_{2m+1} sont divisibles par 2^m.
6. Montrer que pour tout entier naturel m, A^{2m+1} est solution de l'équation :

$$x^2 - 2a_{2m+1}x - 2^{2m+1} = 0.$$

En déduire l'expression de A^{2m+1} en fonction de a_{2m+1}.

7. Démontrer que :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ 2^{2m+1} \leqslant 2a_{2m+1}$$

.

8. En déduire que pour tout entier naturel m, la partie entière de A^{2m+1} est égale à $2a_{2m+1}$.
9. Conclure.

Exercice 151. Soit $y > 0$ un réel fixé. En utilisant une intégration par parties, déterminer les primitives en x de la fonction f définie par $f(x) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

Index