Calculer la probabilité d'un événement

Énoncé

On considère l'ensemble E des entiers de 20 à 40. On choisit l'un de ces nombres au hasard. A est l'événement : « le nombre est multiple de 3 », B l'événement : « le nombre est multiple de 2 » et C : « le nombre est multiple de 6 ». Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap C)$ et $P(A \cup C)$.

Méthode

Pour dénombrer les éléments de divers ensembles, il est recommandé de dessiner un diagramme.

Solution

	B	$\bar{B}$
A	24 30...	23...
$\bar{A}$	20 22...	23...

L'expression « au hasard » signifie que l'on se trouve dans une situation d'équiprobabilité. L'ensemble E contient 21 éléments : il y a donc 21 événements élémentaires équiprobables. Il y a sept multiples de 3 entre 20 et 40 : card $(A) = 7$, donc $P(A) = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$.

De même, il y a onze multiples de 2 et trois multiples de 6, d'où $P(B) = \frac{11}{21}$ et $P(C) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$; $A \cap B = \{24 ; 30 ; 36\}$ d'où $P(A \cap B) = P(C) = \frac{3}{21}$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{7}$. Puisque C est inclus dans A, on a $A \cap C = C$, donc $P(A \cap C) = P(C) = \frac{1}{7}$. $A \cup C = A$ donc $P(A \cup C) = P(A) = \frac{1}{3}$.

Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire

Énoncé

On jette trois fois de suite un dé bien équilibré. Au cours de ce lancer de dé, le joueur perd 3 € s'il obtient au moins un multiple de 3 et gagne 6 € dans le cas contraire. X est la variable aléatoire égale au « gain » du joueur.
Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Méthode

Préciser d'abord toutes les valeurs prises par X.

Solution

La variable X prend les valeurs -3 et 6. Les deux événements $(X = -3)$ et $(X = 6)$ sont des événements contraires. Il est plus facile de calculer $P(X = 6)$, c'est-à-dire la probabilité de l'événement : « aucun des trois nombres n'est multiple de 3 ». Parmi les six nombres de 1 à 6, il y a quatre nombres non multiples de 3 : 1 ; 2 ; 4 et 5. Le nombre des cas possibles est $6 \times 6 \times 6$, soit 216 et le nombre des cas favorables est $4 \times 4 \times 4$ soit 64, donc $P(X = 6) = \frac{64}{216} = \frac{8}{27}$.

Puisque les deux événements sont des événements contraires, on en déduit que : $P(X = -3) = 1 - P(X = 6) = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$.

D'où le tableau ci-contre.

X	-3	6
P_i	$\frac{19}{27}$	$\frac{8}{27}$

On a donc $E(X) = (-3) \times \frac{19}{27} + 6 \times \frac{8}{27} = -\frac{1}{3}$

et $V(X) = \left(9 \times \frac{19}{27} + 36 \times \frac{8}{27}\right) - \frac{1}{9} = \frac{152}{9}$,

d'où : $\sigma(X) = \frac{\sqrt{152}}{3} \approx 4{,}11$.

Utiliser des probabilités conditionnelles

Énoncé

Un sac contient 25 boules dont 15 blanches et 10 noires. L'expérience consiste à tirer une première boule, puis une seconde sans remise de la première dans le sac.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
E : les deux boules sont blanches ;
F : la première boule est noire et la seconde boule est blanche ;
G : le tirage est bicolore ;
H : les deux boules sont noires.

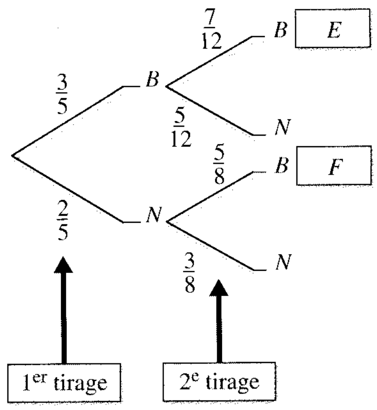
Méthode

Un événement peut être considéré comme réunion ou intersection de deux événements dont on sait calculer la probabilité. Pour calculer $P(A \cap B)$, on peut utiliser une probabilité conditionnelle. Utiliser aussi un arbre de probabilités.

Solution

Pour la commodité de la rédaction, utilisons des événements non cités dans l'énoncé.
Soit A l'événement : la première boule est blanche
et B l'événement : la seconde boule est blanche.
E est l'événement $A \cap B$, donc $P(E) = P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Or, $P(A) = \dfrac{15}{25}$ soit $\dfrac{3}{5}$.



Sachant que A est réalisé, il reste 24 boules dont 14 blanches donc :

$$P_A(B) = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}.$$

On a donc :

$$P(E) = \frac{3}{5} \times \frac{7}{12} = \frac{7}{20} = 0{,}35\ .$$

Sur l'arbre de probabilités, on marque $\dfrac{3}{5}$ et $\dfrac{7}{12}$ sur les deux premières branches successives du haut.

Et on peut compléter avec $\dfrac{2}{5}$ et $\dfrac{5}{12}$ pour les événements contraires.

• On a $F = \bar{A} \cap B$, donc $P(F) = P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$.
Calculons $P_{\bar{A}}(B)$: la première boule tirée est noire, il reste 24 boules dont 15 blanches, donc $P_{\bar{A}}(B) = \dfrac{15}{24} = \dfrac{5}{8}$.

D'où $P(F) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{5}{8} = \dfrac{1}{4}$.

• Événement G : cet événement est égal à $F \cup (A \cap \bar{B})$, où F et $A \cap \bar{B}$ sont incompatibles.
On a $P(G) = P(F) + P(A \cap \bar{B})$.

Or, $P(A \cap \bar{B}) = \dfrac{15}{25} \times \dfrac{10}{24} = \dfrac{1}{4}$,

donc $P(G) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = 0{,}5$.

• Événement H : il y a plusieurs méthodes pour le calcul de $P(H)$.
L'arbre de probabilité étant complété, il est très simple de lire le produit sur les deux branches du bas : $P(H) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{3}{20}$.

■ Utiliser les probabilités totales

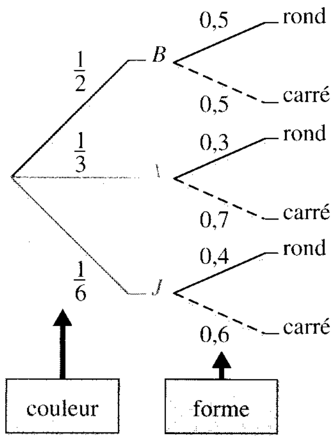
Énoncé 1

Un sac contient des jetons de trois couleurs, la moitié de blancs, le tiers de verts et le sixième de jaunes. 50 % des jetons blancs sont ronds, 30 % des jetons verts sont ronds et 40 % des jaunes sont ronds. Tous les autres jetons sont carrés. On tire un jeton au hasard.
Représenter par un arbre de probabilités les diverses probabilités que l'on peut rencontrer.

Méthode
Interpréter et traduire les informations de l'énoncé et utiliser un arbre de probabilités.

Solution

Puisque l'on connaît d'abord les proportions pour les couleurs, au premier niveau de l'arbre figurent les trois couleurs et au second la forme : « rond » ou « non rond ».
Au niveau 1, sur chaque branche, on écrit les pourcentages traduits en termes de probabilité de tirage d'une couleur.
Au niveau 2, indiquer les probabilités conditionnelles données par les pourcentages des ronds de chaque couleur et les autres.
Ainsi, si l'on désigne par R l'événement « tirer un rond », à partir de B, sur la branche du haut, on indique $P_B(R) = 0{,}5$ puisque 50 % des blancs sont ronds. Une simple lecture de l'arbre permet alors de répondre à certaines questions.



Énoncé 2

Dans le sac décrit à l'*énoncé* 1, on tire un jeton au hasard.

a. Quelle est la probabilité pour qu'il soit rond ?

b. Sachant qu'il est rond, quelle est la probabilité pour qu'il soit blanc ? pour qu'il soit jaune ? pour qu'il soit vert ?

Méthode
Lorsqu'on dispose d'un sac ou d'une urne comportant des objets ayant plusieurs caractères, il peut être intéressant de considérer un événement comme réunion d'événements formant une partition de l'univers des issues possibles.

Solution

a. Soit B l'événement : « le jeton est blanc », V : « le jeton est vert », J : « le jeton est jaune » et R : « le jeton est rond ».
Un jeton rond peut être soit blanc, soit jaune, soit vert ce qui se traduit par :

$$R = (B \cap R) \cup (V \cap R) \cup (J \cap R),$$

donc $P(R)$ est la somme de trois probabilités d'après le théorème des probabilités totales. Par lecture sur l'arbre, on obtient :

$$P(R) = P(B) \times P_B(R) + P(V) \times P_V(R) + P(J) \times P_J(R)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{6} \times \frac{4}{10},$$

soit $P(R) = \dfrac{5}{12}$.

b. $P_R(B) = \dfrac{P(B \cap R)}{P(R)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \dfrac{3}{5}$. De même $P_R(J) = \dfrac{P(J \cap R)}{P(R)} = \dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{5}{12}} = \dfrac{4}{25}$.

On peut calculer $P_R(V)$ de la même façon, mais on peut aussi remarquer que :

$$P_R(B) + P_R(J) + P_R(V) = 1, \text{ d'où } P_R(V) = 1 - \frac{3}{5} - \frac{4}{25} = \frac{6}{25}.$$

Utiliser l'indépendance en probabilité

Énoncé 1

On tire au hasard une carte dans un jeu normal de 32 cartes. On envisage les trois événements suivants :

A : la carte est rouge ; B : la carte est un cœur ; C : la carte est un roi.

a. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Même question pour B et C et pour A et C.

b. On effectue 5 tirages successifs avec remise de la carte dans le jeu après chaque tirage. Quelle est la probabilité de tirer 5 cartes rouges ?

Méthode

Il s'agit de comparer un produit de probabilités à la probabilité d'une intersection.

Penser que le vocable « indépendant » a un sens mathématique précis.

Solution

a. Le jeu contenant seize cartes rouges dont huit cœurs et quatre rois, on a :

$$P(A) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(C) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

On a $A \cap B = B$ puisque les cœurs sont rouges, donc $P(A \cap B) = P(B) = \frac{1}{4}$.

Or, $P(A) \times P(B) = \frac{1}{8}$. Ce n'est pas égal à $P(A \cap B)$, donc les événements A et B ne sont pas indépendants.

L'événement $B \cap C$ est l'événement « tirer le roi de cœur » :

$P(B \cap C) = \frac{1}{32}$ et $P(B) \times P(C) = \frac{1}{32}$, donc B et C sont indépendants.

L'événement $A \cap C$ est l'événement « tirer un roi rouge ».

$P(A \cap C) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$ et $P(A) \times P(C) = \frac{1}{16}$. Donc A et C sont indépendants.

b. D est l'événement « tirer successivement 5 cartes rouges » dans les conditions indiquées : il y a répétition d'expériences indépendantes et identiques puisque la carte est remise dans le paquet de cartes.

Donc $P(D) = P(A) \times P(A) \times P(A) \times P(A) \times P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.

Énoncé 2

L'expérience consiste à lancer deux dés parfaitement équilibrés : X désigne la variable aléatoire égale à la somme des deux nombres obtenus sur la face supérieure et Y est égale à leur produit.

Calculer $P\big((X=2) \cap (Y=3)\big)$, puis $P(X=2)$ et $P(Y=3)$.

Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

Méthode

Si, pour deux réels a et b, $P\big((X=a) \cap (Y=b)\big)$ n'est pas égal à $P(X=a) \times P(Y=b)$, alors ce contre-exemple suffit à démontrer que X et Y ne sont pas indépendantes.

Solution

L'événement $(X = 2)$ se réalise une seule fois : lorsque l'on obtient le couple $(1 ; 1)$, sur 36 couples possibles, donc $P(X=2) = \frac{1}{36}$.

L'événement $(Y = 3)$ se réalise deux fois : avec les couples $(1 ; 3)$ et $(3 ; 1)$ donc $P(Y=3) = \frac{2}{36}$.

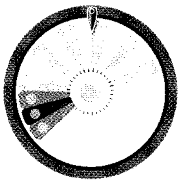
Mais l'événement $\big((X=2) \cap (Y=3)\big)$ n'est jamais réalisé : sa probabilité est nulle alors que $P(X=2) \times P(Y=3) = \frac{1}{36} \times \frac{2}{36}$.

Ces deux variables ne sont pas indépendantes.

Reconnaître des probabilités conditionnelles, construire et exploiter un arbre pondéré

Exercice corrigé

Énoncé Dans une fête foraine, un stand d'attractions propose le jeu suivant :



- Le joueur actionne tout d'abord une roue circulaire, partagée en trois secteurs de couleurs différentes. On admet que la probabilité que la roue s'arrête sur un secteur est proportionnelle au périmètre de ce secteur.
- Le joueur tire ensuite un jeton dans une urne dont la couleur correspond à celle obtenue en actionnant la roue.
  - Dans l'urne verte, un jeton sur trois est gagnant et permet de gagner une « barbe à papa ».
  - Dans l'urne , un jeton sur cinq est gagnant et permet de remporter un coffret de jeux de société.
  - Dans l'urne **rouge**, un jeton sur dix est gagnant et permet de remporter un lecteur MP3.

Un joueur commence une partie. On appelle V (respectivement J, R) l'événement « le joueur tire un jeton dans l'urne verte (respectivement jaune, rouge) », et B (respectivement C, M) l'événement « le joueur gagne une barbe à papa (respectivement un coffret de jeux, un lecteur MP3) ». Enfin, P désigne l'événement « le joueur est perdant ».

1 Traduire toutes les hypothèses de l'énoncé par des probabilités concernant les événements définis ci-dessus.

2 Construire un arbre pondéré décrivant la situation. Calculer la probabilité de chacun des événements B, C et M.

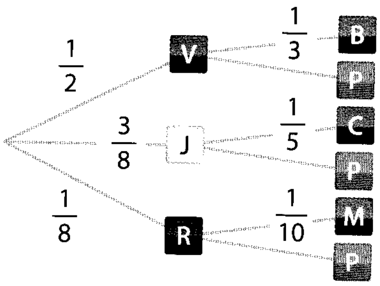
Solution

1 On utilise la proportionnalité entre probabilités et périmètres des secteurs de la roue : $p(V) = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$; $p(J) = \frac{\frac{3\pi}{4}}{2\pi} = \frac{3}{8}$; $p(R) = \frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi} = \frac{1}{8}$.

D'après l'énoncé, « dans l'urne verte, un jeton sur trois est gagnant » : cette hypothèse donne la probabilité conditionnelle d'extraire un jeton gagnant de l'urne **sachant que le tirage se fait dans l'urne verte.** Dans ce cas, le lot gagné est une barbe à papa, donc on a : $p_V(B) = \frac{1}{3}$.

De la même façon, on a : $p_J(C) = \frac{1}{5}$ et $p_R(M) = \frac{1}{10}$. **1▸**

2 Voir l'arbre ci-contre. **2▸**



L'événement B ne peut être réalisé que lorsqu'on tire un jeton dans l'urne verte.

D'où : $p(B) = p(B \cap V) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Cette valeur $\frac{1}{6}$ peut s'interpréter en disant que lorsqu'un joueur entame une partie, il a « une chance sur six » que cette partie le conduise à gagner une barbe à papa.

On a de même $p(C) = p(C \cap J) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{40}$ et $p(M) = p(M \cap R) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{80}$.

Bon à savoir

1▸ On reconnaît une probabilité conditionnelle dans un énoncé lorsque sa valeur est donnée alors qu'on sait qu'un événement est réalisé. Ici, la probabilité $\frac{1}{3}$ correspond à un tirage gagnant **dans l'urne verte** : on sait que l'événement V est réalisé.

2▸ Dans un arbre pondéré, les « branches » issues d'un même événement représentent les probabilités conditionnelles sachant que cet événement est réalisé. Par exemple, $\frac{1}{3} = p_V(B)$.

Exercice d'application

1 M. Cruciverbis achète un hebdomadaire chaque semaine, et il essaie systématiquement de résoudre la grille de mots croisés proposée. Deux fois sur trois, il achète l'hebdomadaire A, et une fois sur trois l'hebdomadaire B. Trois fois sur quatre, il parvient à achever la grille proposée dans l'hebdomadaire A. Il résout entièrement celle de l'hebdomadaire B, plus difficile, une fois sur deux seulement.

1 Choisir des notations et construire un arbre pondéré décrivant la situation.

2 M. Cruciverbis entre chez le libraire pour acheter son hebdomadaire. Quelle est la probabilité qu'il en ressorte avec l'hebdomadaire B et qu'il sache résoudre entièrement la grille de mots croisés qui y est proposée ?

Voir exercices 12 à 30

Utiliser la formule des probabilités totales

Exercice corrigé

Énoncé Afin d'équiper les élèves des groupes scolaires de la commune, une municipalité achète auprès d'un grossiste des stylos-billes de trois marques différentes, A, B et C.

- 40 % des stylos commandés sont de marque A, la moins chère ; parmi ces stylos, 15 % sont défectueux.
- 35 % des stylos commandés sont de marque B, et 10 % de ces stylos sont défectueux.
- 25 % des stylos commandés sont de marque C, et 5 % de ces stylos sont défectueux.

On choisit au hasard un stylo dans le stock de la municipalité.

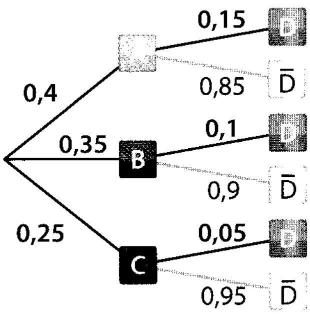
1 Construire un arbre pondéré décrivant la situation étudiée.

2 Déterminer la probabilité que le stylo choisi soit défectueux.

3 Le stylo choisi est en bon état de fonctionnement. Quelle est la probabilité, au centième près, qu'il soit de marque C ?

Solution

1 On adopte les notations suivantes pour les événements :
A (respectivement B, C) : « le stylo choisi est de marque A (respectivement B, C) » ;
D : « le stylo choisi est défectueux ».
On obtient l'arbre pondéré ci-contre ①.



2 Les événements A, B et C forment un système complet d'événements. En effet :
- ils sont de probabilités non nulles ;
- ils sont incompatibles (ou disjoints) deux à deux : le stylo choisi ne peut pas être de deux marques différents ;
- leur réunion recouvre tous les cas possibles : le stylo choisi est nécessairement de l'une des trois marques A, B ou C (puisque par hypothèse, 100 % des stylos proviennent de l'une de ces marques)

On peut donc appliquer la formule des probabilités totales pour calculer la probabilité $p(D)$; on a ② :

$$\boldsymbol{p(D) = p(A) \times p_A(D) + p(B) \times p_B(D) + p(C) \times p_C(D).}$$

On obtient donc : $p(D) = 0{,}15 \times 0{,}4 + 0{,}1 \times 0{,}35 + 0{,}05 \times 0{,}25 = 0{,}1075$.

3 On cherche ici à calculer la probabilité $p_{\bar{D}}(C)$.
On applique la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$p_{\bar{D}}(C) = \frac{p(\bar{D} \cap C)}{p(D)}.$$

Le calcul de $p(\bar{D} \cap C)$ s'obtient en appliquant le principe multiplicatif dans la branche « la plus basse » de l'arbre pondéré construit à la question **1** : $p(\bar{D} \cap C) = p(C) \times p_C(\bar{D}) = 0{,}95 \times 0{,}25$.

Ainsi, on obtient : $p(\bar{D} \cap C) = 0{,}2375$ et $p_{\bar{D}}(C) = \dfrac{0{,}2375}{1 - 0{,}1075}$, soit 0,27 au centième près.

Bon à savoir

① On construit un arbre pondéré dont les branches de premier niveau aboutissent aux événements A, B et C. En effet, l'énoncé donne les probabilités de ces événements, puis ensuite les probabilités conditionnelles sachant que l'un de ces événements est réalisé.

② La formule des probabilités totales ne peut être appliquée qu'en présence d'un système complet d'événements, ce qu'il faut donc d'abord vérifier.

Exercice d'application

2 Un jardinier dispose de bulbes de deux sortes : les bulbes « à fleur rouge » et les bulbes « à fleur jaune ».
Pour composer des massifs, le jardinier constitue des lots comportant 40 % de bulbes « à fleur rouge » et 60 % de bulbes « à fleur jaune ».
Une fois planté, un bulbe « à fleur rouge » donne effectivement une fleur dans 70 % des cas, et dans 80 % des cas pour un bulbe « à fleur jaune » (dans les autres cas, le bulbe ne fleurit pas).
On choisit au hasard un bulbe dans un lot composé par le jardinier. Quelle est la probabilité que ce bulbe donne une fleur ?

Voir exercices 31 à 42

3 Probabilités conditionnelles

Les résultats seront donnés à 10^{-3} près par excès. Une entreprise en matériel informatique fabrique des clés USB. 4 % des clés USB fabriquées sont défectueuses. À l'issue de cette fabrication les clés USB sont contrôlées et triées en trois lots :
- **clés USB marquées, celles-ci portent la marque de l'entreprise ;**
- **clés USB démarquées ;**
- **clés USB à détruire.**

1 **L'unité de contrôle rejette 3 % des bonnes clés USB et 95 % des clés USB défectueuses.**
a) Quelles sont les probabilités : p_1 qu'une clé USB soit défectueuse et acceptée ? p_2 qu'une clé USB soit bonne et refusée ? p_3 qu'il y ait une erreur de contrôle ?
b) Montrer que la probabilité p_4 qu'une clé USB soit acceptée est égale à 0,933.

2 **Le contrôle s'effectue par cinq tests successifs. Une clé USB reçoit la marque de l'entreprise si elle subit avec succès cinq contrôles successifs, détruite si elle est refusée au moins deux fois et démarquées sinon. Quelles sont les probabilités : p_5 qu'une clé USB soit démarquée ? p_6 qu'une clé USB reçoive la marque de l'entreprise ? p_7 qu'une clé USB soit détruite ?**

Dans un exercice de probabilités conditionnelles, il faut toujours commencer par traduire les hypothèses de l'énoncé. On notera D l'événement « la clé USB est défectueuse » et donc $\bar{D}$ l'événement « la clé USB est bonne » ; on notera R : « l'unité de contrôle rejette la clé USB » et donc $\bar{R}$: « l'unité de contrôle ne rejette pas la clé USB ».

« 4 % des clés USB fabriquées sont défectueuses » soit $p(D) = \frac{4}{100}$ d'où $p(D) = \frac{1}{25}$.

On en déduit donc que $p(\bar{D}) = 1 - p(D)$ soit $\frac{24}{25}$.

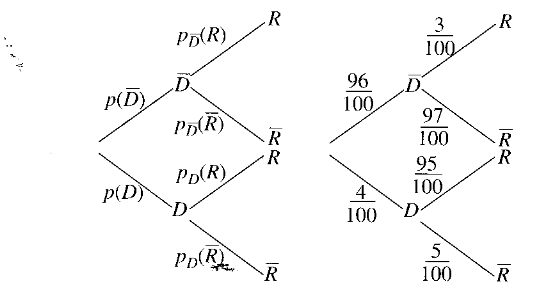
De plus « l'unité de contrôle rejette 3 % des bonnes clés USB » $\Leftrightarrow$ $p_{\bar{D}}(R) = \frac{3}{100}$.

D'où $p_{\bar{D}}(\bar{R}) = 1 - p_{\bar{D}}(R)$ d'où $p_{\bar{D}}(\bar{R}) = \frac{97}{100}$.

On a aussi : « l'unité de contrôle rejette 95 % des clés USB défectueuses » : $p_D(R) = \frac{95}{100} = \frac{19}{20}$.

D'où $p_D(\bar{R}) = 1 - p_D(R)$ donc $p_D(\bar{R}) = \frac{1}{20}$.

On peut aussi résumer ces données dans un arbre :



1. **a)** $p_1 = p(D \cap \bar{R}) = p(D) \times p_D(\bar{R}) = \frac{1}{500}$.

Donc $p_1 = 0{,}002$.

$$p_2 = p(R \cap \bar{D}) = p(\bar{D}) \times p_{\bar{D}}(R) = \frac{18}{625}.$$

Donc $p_2 = 0{,}0288$. L'événement « il y a erreur de contrôle » est $(D \cap \bar{R}) \cup (\bar{D} \cap R)$.

Les événements $D \cap \bar{R}$ et $\bar{D} \cap R$ sont incompatibles donc :

$$p_3 = p(\bar{D} \cap R) + p(\bar{R} \cap D) = p_2 + p_1 = \frac{77}{2\,500}.$$

Donc $p_3 \approx 0{,}031$.

b) D'après la loi des probabilités totales :

$$p_4 = p(\bar{R}) = p(D)p_D(\bar{R}) + p(\bar{D})p_{\bar{D}}(\bar{R})$$
$$= p_1 + p_{\bar{D}}(\bar{R})p(\bar{D}) = \frac{2\,333}{2\,500}.$$

Donc $p_4 \approx 0{,}933$.

2. On est en présence d'une expérience de Bernoulli : tirage à deux issues possibles R et $\bar{R}$ répété de façon indépendante 5 fois.

D'après la loi de Bernoulli, si on répète de façon indépendante n fois une expérience à deux issues possibles, alors la probabilité que R se réalise k fois (et donc $\bar{R}$ $n-k$ une fois) est :

$$\binom{n}{k} \times p(R)^k \times p(\bar{R})^{n-k}.$$

Ainsi pour p_5, on a $n = 5$ et $k = 1$, donc :

$$p_5 = \binom{5}{1} \times p(R)^1 \times p(\bar{R})^4 = 5 \times \frac{164}{2\,500} \times \left(\frac{2\,333}{2\,500}\right)^4.$$

Donc $p_5 \approx 0{,}249$.

- $p_6 = p(\bar{R})^5$, donc $p_6 \approx 0{,}708$.
- Une clé USB étant soit détruite, soit démarquée ou soit marquée, alors $p_5 + p_6 + p_7 = 1$.

D'où $p_7 = 1 - p_5 - p_6$, donc $p_7 \approx 0{,}044$.

► Exercices 48 à 58 p. 276

4 Probabilités conditionnelles et suites

1 Soit la suite (u_n), définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{6} u_n + \frac{1}{3}$.
Soit la suite (v_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $v_n = u_n - \frac{2}{5}$; montrer que (v_n) est une suite géométriqu
dont on précisera la raison. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n.

2 On considère deux dés, notés A et B. Le dé A comporte trois faces rouges et trois faces blanches. Le d
B comporte quatre faces rouges et deux faces blanches.
On choisit un dé au hasard et on le lance : si on obtient rouge, on garde le même dé, si on obtient blanc, o
change de dé. Puis on relance le dé et ainsi de suite.
On désigne par A_n l'événement : « on utilise le dé A au n-ième lancer », par $\overline{A}_n$ l'événement contrair
de A_n, par R_n l'événement : « on obtient rouge au n-ième lancer », par $\overline{R}_n$ l'événement contraire de R_n
par a_n et r_n les probabilités respectives de A_n et R_n.
a) Déterminer a_1.
b) Déterminer r_1 ; pour cela, on pourra s'aider d'un schéma d'arbre.
c) En remarquant que, pour tout $n \geqslant 1$, $R_n = (R_n \cap A_n) \cup (R_n \cap \overline{A}_n)$, montrer que $r_n = -\frac{1}{6} a_n + \frac{2}{3}$
d) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A}_n \cap \overline{R}_n)$.
e) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{6} a_n + \frac{1}{3}$, puis déterminer l'expression de a_n en fonctio
de n.
f) En déduire l'expression de r_n en fonction de n, puis la limite de r_n quand n tend vers $+\infty$.

1. On a pour tout entier naturel n non nul :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{5} = \frac{1}{6} u_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{1}{6} u_n - \frac{1}{15}$$
$$= \frac{1}{6}\left(v_n + \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{15} = \frac{1}{6} v_n + \frac{1}{15} - \frac{1}{15} = \frac{1}{6} v_n .$$

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$.

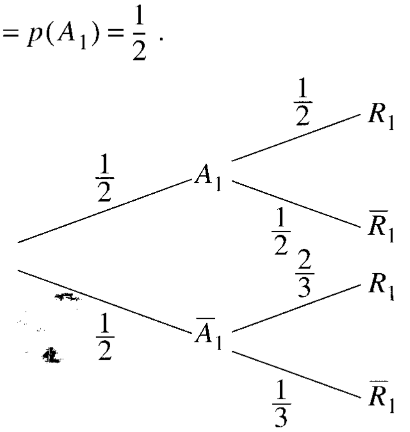
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

$$u_n = v_n + \frac{2}{5}, \text{ d'où } u_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}.$$

2. a) La première fois on choisit au hasard le dé A ou le dé B. Comme on est dans un cas d'équiprobabilité, il y a autant de chance de choisir le dé A que le dé B.

Donc $a_1 = p(A_1) = \frac{1}{2}$.

b)



D'après la loi des probabilités totales :

$$r_1 = p_{A_1}(R_1)p(A_1) + p_{\overline{A}_1}(R)p(\overline{A}_1)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{12}, \text{ donc } r_1 = \frac{7}{12}.$$

c) $R_n = (R_n \cap A_n) \cup (R_n \cap \overline{A}_n)$, donc :

$$p(R_n) = p((R_n \cap A_n) \cup (R_n \cap \overline{A}_n)),$$

soit $p(R_n) = p(R_n \cap A_n) + p(R_n \cap \overline{A}_n)$,
car les événements $R_n \cap A_n$ et $R_n \cap \overline{A}_n$ sont incompatibles.

Donc $r_n = p(A_n)p_{A_n}(R_n) + p(\overline{A}_n)p_{\overline{A}_n}(R_n)$
$$= \frac{1}{2}\, p(A_n) + \frac{2}{3}\, p(\overline{A}_n).$$

• $p_{A_n}(R_n) = \frac{1}{2}$ car si A_n est réalisé, on lance le dé A et, dans ce cas, il y a autant de faces rouges que de faces blanches ; il y a donc une probabilité égale à $\frac{1}{2}$ d'obtenir une face rouge.

$p_{\overline{A}_n}(R_n) = \frac{2}{3}$ car si $\overline{A}_n$ est réalisé, on lance le dé B et, dans ce cas, il y quatre faces rouges et deux faces blanches ; on a une probabilité égale à $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ d'obtenir une face rouge.

Donc :

$$r_n = \frac{1}{2}\, p(A_n) + \frac{2}{3}\, p(\overline{A}_n) = \frac{1}{2}\, a_n + \frac{2}{3}\,(1 - a_n)$$
$$r_n = -\frac{1}{6}\, a_n + \frac{2}{3} \text{ soit } r_n = -\frac{1}{6}\, a_n + \frac{2}{3}.$$

d) L'événement A_{n+1} est l'événement : « on lance le dé A au $(n+1)$-ième tirage ».
Pour que cet événement soit réalisé, il faut :

- lancer le dé A au n-ième tirage **et** obtenir une face rouge (pour garder ce dé au $n+1$-ième tirage) ;
- **ou** lancer le dé B au n-ième tirage **et** obtenir une face blanche (pour changer de dé au $(n+1)$-ième tirage et donc lancer le dé A au $(n+1)$-ième tirage). Ainsi $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A}_n \cap \overline{R}_n)$.

e) $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A}_n \cap \overline{R}_n)$
donc
$$\begin{aligned} a_{n+1} &= p(A_{n+1}) \\ &= p(A_n \cap R_n) + p(\overline{A}_n \cap \overline{R}_n) \\ &= p(A_n)p_{A_n}(R_n) + p(\overline{A}_n)p_{\overline{A}_n}(\overline{R}_n) \\ &= a_n \times \frac{1}{2} + (1-a_n) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\, a_n + \frac{1}{3}\ , \end{aligned}$$

Or $a_1 = \frac{1}{2}$, donc d'après 1 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$.

Et $r_n = -\frac{1}{6}\, a_n + \frac{2}{3}$, donne :

$$r_n = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}\right) + \frac{2}{3} = -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n} + \frac{3}{5}\ .$$

Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$. Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{n} = 0 \text{ et donc } \lim_{n \to +\infty} r_n = \frac{3}{5}\ .$$

► **Exercices 103 à 105 p. 285**

Activité 3 Catégories de personnels d'une entreprise

Objectif
Découvrir la formule des probabilités totales.

Cours 2
Arbres pondérés et probabilités totales

Le secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel : les ingénieurs, les opérateurs de production et les agents de maintenance.
Il y a 10 % d'ingénieurs et 75 % d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50 % des ingénieurs, 20 % des agents de maintenance et 60 % des opérateurs de production.
On interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise. On note :
– M l'événement « le personnel interrogé est un agent de maintenance » ;
– O l'événement « le personnel interrogé est un opérateur de production » ;
– I l'événement « le personnel interrogé est un ingénieur » ;
– F l'événement « le personnel interrogé est une femme ».

1. Utilisation d'un tableau

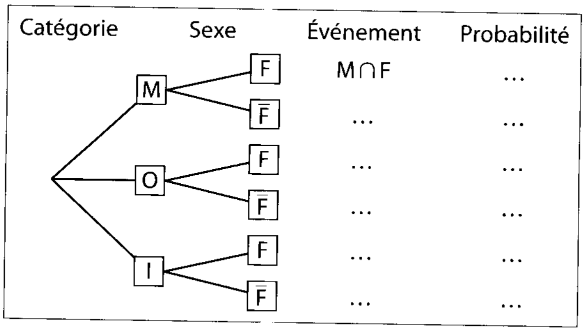
La probabilité des événements M, O et I figure sur la dernière ligne et celle des événements F et $\overline{F}$ sur la dernière colonne.

	M	O	I	Total
F				
$\overline{F}$				
Total	0,15	0,75	0,10	

a. Donner $P_M(F)$, puis déterminer la probabilité de l'événement $M \cap F$. Recopier le tableau ci-contre et y placer la valeur obtenue.
b. Procéder de même pour les événements $O \cap F$ et $I \cap F$, puis exprimer $P(F)$ comme somme de trois probabilités. Vérifier que l'on peut écrire $P(F) = P(M) \times P_M(F) + P(O) \times P_O(F) + P(I) \times P_I(F)$.
c. Finir de compléter le tableau.

2. Utilisation d'un arbre pondéré

L'arbre ci-contre schématise la situation.
a. Recopier et compléter cet arbre en précisant sur chaque branche la probabilité correspondante.
b. Quels sont les chemins conduisant au choix d'une femme ?
En déduire la valeur de $P(F)$.



Activité 4 Tirages de boules

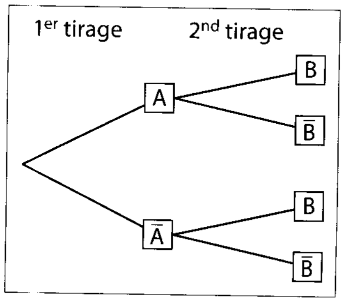
Objectif
Introduire la notion d'événements indépendants.

Cours 3
Indépendance de deux événements

Dans une urne, il y a 3 boules vertes et 2 boules rouges.

1. ***Tirage avec remise***

On tire au hasard une première boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne. On tire alors une seconde boule.
On note A l'événement « la première boule tirée est verte » et B l'événement « la seconde boule tirée est verte ».
a. Quelle est la probabilité de A ?
b. Déterminer la probabilité $P_A(B)$.
c. Compléter l'arbre pondéré ci-contre. Vérifier que $P(B) = P_A(B)$.



d. Déterminer $P(A \cap B)$. Comparer le résultat obtenu avec $P(A) \times P(B)$.
Dans ce cas, on observe que la réalisation ou non de l'événement A ne modifie pas la probabilité de B.
On dit que les événements A et B sont ***indépendants****.*

2. ***Tirage sans remise***

On tire au hasard une première boule, on note sa couleur. On tire ensuite une seconde boule sans remettre la première boule dans l'urne. A et B sont les événements définis précédemment.
a. Quelle est la probabilité de A ?
b. Décrire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
c. Déterminer $P_A(B)$, puis comparer avec $P(B)$.
d. Déterminer $P(A \cap B)$. Comparer le résultat obtenu avec $P(A) \times P(B)$.
Dans ce cas, on observe que la réalisation ou non de l'événement A modifie la probabilité de B.
On dit que les événements A et B ***ne sont pas indépendants****.*

Savoir-faire 1

➤ Voir l'exercice 21

Calculer une probabilité conditionnelle

Dans une population donnée, 84 % des personnes possèdent un téléphone portable et 75 % des personnes possèdent un ordinateur. De plus, 60 % des personnes de cette population déclarent posséder les deux. On rencontre par hasard une personne de cette population.
On considère les événements T : « la personne rencontrée possède un téléphone portable » ;
O : « la personne rencontrée possède un ordinateur ».

1. Déterminer la probabilité conditionnelle de l'événement O sachant que T est réalisé.

2. Déterminer la probabilité que la personne rencontrée possède un téléphone portable sachant qu'elle a un ordinateur.

Méthode
Pour calculer $P_A(B)$, il faut au préalable avoir déterminé $P(A)$ et $P(B \cap A)$.

Solution

1. On doit déterminer $P_T(O)$. Comme $P(T) = 0{,}84$ et $P(O \cap T) = 0{,}6$, on a
$P_T(O) = \dfrac{P(O \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}6}{0{,}84} = \dfrac{5}{7} \approx 0{,}71$. La probabilité cherchée est 0,71 (à 0,01 près).

2. On doit déterminer $P_O(T)$. D'après l'énoncé, $P(O) = 0{,}75$ et $P(T \cap O) = 0{,}6$.
Alors $P_O(T) = \dfrac{P(T \cap O)}{P(O)} = \dfrac{0{,}6}{0{,}75} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$. La probabilité cherchée est 0,8.

Savoir-faire 2

➤ Voir l'exercice 25

Calculer la probabilité d'une intersection

Lors d'une enquête menée auprès d'une population, on a constaté que 85 % des personnes sont des femmes et que, parmi ces femmes, 62 % travaillent à temps partiel.
On choisit une de ces personnes au hasard et on considère les événements :
F : « la personne choisie est une femme » ; T : « la personne choisie travaille à temps partiel ».

1. Traduire en termes de probabilités les données numériques de l'énoncé.

2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit une femme travaillant à temps partiel.

Conseil
Pour calculer la probabilité d'une intersection, penser aux probabilités conditionnelles.

Solution

1. D'une part, on a $P(F) = 0{,}85$. D'autre part, la phrase « parmi ces femmes, 62 % ont un travail à temps partiel » signifie que la probabilité conditionnelle $P_F(T)$, vaut 0,62.

2. L'événement « la personne choisie est une femme travaillant à temps partiel » est l'événement $T \cap F$. $P(T \cap F) = P(F) \times P_F(T)$ soit $P(T \cap F) = 0{,}85 \times 0{,}62$. Ainsi, $P(T \cap F) = 0{,}527$.
La probabilité que la personne choisie soit une femme travaillant à temps partiel est 0,527.

Savoir-faire 3

➤ Voir les exercices 35 et 36

Probabilités conditionnelles à l'aide d'un tableau

La répartition des voitures garées dans un parking est donnée dans le tableau ci-contre.
On choisit au hasard un véhicule stationné dans ce parking. Sachant qu'il est de marque française, quelle est la probabilité que ce soit un diesel ?

	Diesel	Essence	Total
Marque française	0,43	0,12	0,55
Marque étrangère	0,34	0,11	0,45
Total	0,77	0,23	1

Conseil
Un tableau est un bon outil pour résoudre ce type de problèmes.

Solution

Considérons les événements :
F : « le véhicule choisi est de marque française » ; D : « le véhicule choisi est un diesel ».
On veut $P_F(D)$. On sait que $P_F(D) = \dfrac{P(D \cap F)}{P(F)}$. D'après le tableau, $P_F(D) = \dfrac{0{,}43}{0{,}55}$ soit environ 78 %.
La probabilité de choisir un diesel sachant qu'il est de marque française est 0,78 (à 0,01 près).

Savoir-faire 6

➤ Voir les exercices 51 et 52

Tester l'indépendance de deux événements

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivant
A : « la carte tirée est un carreau », B : « la carte tirée est un roi » et C : « la carte tirée est rouge

1. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2. Les événements A et C sont-ils indépendants ?

3. Les événements B et C sont-ils indépendants ?

Méthode

Pour justifier l'indépendance de deux événements, on vérifie une des égalités : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$.

Solution

Le jeu contient huit carreaux, quatre rois et seize cartes rouges. On a donc :

$$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4},\ P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \text{ et } P(C) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}.$$

1. $A \cap B$ est l'événement : « la carte tirée est un roi de carreau ». Ainsi $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$.
De plus, $P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$. Ainsi $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
Les événements A et B sont indépendants.
Autre méthode : on peut déterminer la probabilité de A sachant que B est réalisé.
On a $P_B(A) = \frac{1}{4}$. Ainsi $P_B(A) = P(A)$, ce qui prouve l'indépendance des événements A et B.

2. $A \cap C$ est l'événement : « la carte tirée est un carreau et une carte rouge ». Tous les carrea
étant des cartes rouges : $P(A \cap C) = P(A) = \frac{1}{4}$. D'autre part, $P(A) \times P(C) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.
Ainsi $P(A \cap C) \neq P(A) \times P(C)$. Les événements A et C ne sont pas indépendants.

3. $B \cap C$ est l'événement : « la carte tirée est un roi rouge ». Ainsi : $P(B \cap C) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$.
D'autre part, $P(B) \times P(C) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$. Ainsi $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$.
Les événements B et C sont indépendants.

Savoir-faire 7

➤ Voir l'exercice 58

Utiliser l'indépendance de deux événements

Sur son trajet pour aller travailler, un automobiliste rencontre deux feux tricolores.
La probabilité pour que le feu soit vert au moment où il arrive à sa hauteur est de 0,4 pour premier feu et de 0,45 pour le second feu.
On note A l'événement « le premier feu est vert » et B l'événement « le second feu est vert
On fait l'hypothèse que ces deux événements sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité que l'automobiliste fasse son trajet sans avoir à s'arrêter ?

2. Calculer $P(A \cap \overline{B})$. À quel événement correspond cette probabilité ?

Conseil

Dans un énoncé, le mot « indépendant » ayant un sens mathématique précis, il faut penser à utiliser les égalités du cours.

Solution

1. Pour que l'automobiliste fasse son trajet sans avoir à s'arrêter, il faut que les deux feux soie
verts au moment où il arrive à leur hauteur. La probabilité cherchée est $P(A \cap B)$.
D'après l'énoncé, $P(A) = 0{,}4$ et $P(B) = 0{,}45$.
Les événements A et B étant considérés comme indépendants, on a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ soi

$$P(A \cap B) = 0{,}4 \times 0{,}45 = 0{,}18.$$

La probabilité que l'automobiliste fasse son trajet sans avoir à s'arrêter est 0,18.

2. Les événements A et $\overline{B}$ étant eux aussi indépendants, on a $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P(\overline{B})$, soit :

$$P(A \cap \overline{B}) = 0{,}4 \times 0{,}55 = 0{,}22.$$

Cette valeur correspond à la probabilité que l'automobiliste passe le premier feu au vert ma
soit obligé de s'arrêter au second feu.