Cours de Mathématiques
Première Partie

TS

2015-2016

Lycée Henri IV

Table des matières

Première partie

Les algorithmes

Définition 0.1. *Un algorithme est un enchaînement d'étapes ou d'instructions à effectuer dans un ordre précis et dont la réalisation permet de résoudre un problème donné.*

En Terminale, vous devez être capables :
- d'analyser un algorithme simple, c'est à dire comprendre ce qu'il fait ;
- d'exécuter un algorithme ;
- de compléter un algorithme afin qu'il permette de répondre à une question précise ;
- d'écrire un algorithme simple.

Un algorithme s'écrira en **pseudocode**, c'est-à-dire ne faisant référence à aucun langage de programmation particulier. La description en "langage naturel" des instructions suffira.

Exemple 0.1. *:*
- A *et* B *sont des nombres entiers*
- *Saisir* A
- *Affecter à* A *la valeur* $A \times B$
- *Afficher* A

Un algorithme simple comporte trois étapes : 1. Variables et affectations 2. Le traitement 3. La sortie des résultats.

1 Variables et affectations

Il s'agit de la préparation du traitement à proprement parlé de l'algorithme. Cette partie fait l'inventaire des données et des variables nécessaires au bon fonctionnement de l'algorithme.
Les valeurs initiales des variables peuvent être présentes dans l'algorithme ou bien être demandées à l'utilisateur.
Cette étape est parfois scindée en deux parties appelées " Variables" et " Entrée et initialisation".

2 Le traitement

C'est le coeur même de l'algorithme. Il contient toutes les étapes de traitement.
L'ordre des instructions est fondamental afin que l'algorithme aboutisse au résultat demandé. Si une erreur dans l'ordre des séquences est commise, il est même possible que l'algorithme ne s'arrête jamais.

3 La sortie des résultats

Dans les algorithmes traités au lycée, les résultats obtenus sont affichés à l'écran de l'ordinateur ou de la calculatrice. Un algorithme peut donner une valeur précise d'un terme d'une suite ; les n premiers termes d'une suite, un encadrement de la solution d'une équation etc $\cdots$

Exemple 3.1. *L'algorithme ci-dessous a pour but de calculer les coordonnées du milieu* I *d'un segment* $[AB]$*. Le début du traitement demande à l'utilisateur de donner les coordonnées des points* A *et* B*.*

Variables	xA, xB, yA ,yB, xI, yI *sont des réels*
Traitement	***Saisir*** xA, xB, yA , yB xI ***Prend la valeur*** $\frac{1}{2}(xA + xB)$ yI ***Prend la valeur*** $\frac{1}{2}(yA + yB)$
Sortie	***Afficher*** $(xI; yI)$

Exercice 1. 1. Ecrire un algorithme déterminant les coordonnées du symétrique d'un point A à déterminer par l'utilisateur par rapport au point $I(3;5)$.

2. Transformer l'algorithme précédent afin que l'utilisateur puisse choisir les coordonnées de I.

4 Boucle POUR $\cdots$ ALLANT DE $\cdots$ A $\cdots$

Cette structure est utilisée lorsque l'on sait par avance le nombre de fois que le bloc d'instructions doit être exécuté.

Exemple 4.1. *L'algorithme suivant permet d'afficher tous les entiers de* 1 *à* 7.

Variables	*n et un entier*
Traitement	***POUR** n **ALLANT DE 1 A 7*** ***DEBUT POUR*** ***AFFICHER** n*
	FIN POUR

*La première fois que la ligne **DEBUT POUR** est lue, n prend la valeur 1. A chaque fois que cette ligne est lue à nouveau, n augmente automatiquement de 1.*

☞ **Remarque** Il ne faut surtout pas insérer dans la boucle une instruction pour augmenter n de 1. Dans ce cas, n augmenterait à chaque lecture de 2 et non de 1.

5 Structure TANT QUE

Les boucles **POUR**$\cdots$**DE**$\cdots$ **A** ne sont pratiques que si l'on connait le nombre de répétitions nécessaires, ce qui n'est pas toujours le cas. Dans cette situation, il est possible d'utiliser la structure **TANT QUE**$\cdots$.
Elle permet de répéter la série d'instructions comprise entre **DEBUT TANT QUE** et **FIN TANT QUE** tant qu'une condition donnée est vérifiée.
La compréhension du problème mathématique ainsi que du bon sens permettent de répondre aux différents problèmes associés aux algorithmes vus en Terminale S.

Exemple 5.1. *Basile dépose* 23 *euros dans sa tirelire. Tous les jours, il dépose au hasard une pièce de* 1 *ou* 2 *euros. Il écrit alors l'algorithme suivant permettant de calculer le nombre total de pièces de* 1 *ou* 2 *euros ajoutées avant de dépasser la somme de* 35 *euros.*

Variables	:	S, D, A *sont des réels*
Initialisation	:	*Affecter à S la valeur 23*
		Affecter à D la valeur 0
Traitement	:	*Tant que* $S < 35$ *faire :*
		| *Affecter à* A *la valeur aléatoire* 1 *ou* 2
		| *Affecter à* S *la valeur* $S + A$
		| *Affecter à* D *la valeur* $D + 1$
		Fin Tant que
Sortie	:	*Afficher* $D - 1$

Dans cet exemple, le plus délicat est de comprendre pourquoi il est nécessaire d'afficher $D - 1$.
Pour fixer les idées, supposons par exemple que les sommes versées soient les suivantes : 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2.
Le tableau suivant permet de suivre pas à pas les calculs faits par l'algorithme.

	S	A	D	commentaire
Initialisation	23	$\times$	0	A n'a pas de valeur car le traitement n'a pas commencé.
Fin de la 1ère boucle	25	2	1	Il y a une pièce supplémentaire dans la tirelire qui contient 25 euros.
Fin de la 2ème boucle	27	2	2	
Fin de la 3ème boucle	28	1	3	
Fin de la 4ème boucle	30	2	4	
Fin de la 5ème boucle	32	2	5	
Fin de la 6ème boucle	34	2	6	La somme ne dépasse pas 35 euros donc l'algorithme recommence le traitement d'une boucle
Fin de la 7ème boucle	36	2	7	L'algorithme s'arrête.

La dernière valeur de D correspond au nombre de pièces nécessaires pour que l'algorithme s'arrête, c'est-à-dire quand la somme dépasse ou égale 40 euros. La valeur D que Basile veut déterminer n'est pas celle mise en mémoire dans l'algorithme mais $D-1$. Dans l'exemple ci-dessus, l'algorithme affiche le nombre 6.

Etudions maintenant l'exercice suivant (**BAC S 2014 Polynésie**).

Exercice 2. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1		**Algorithme 2**	
Variables :	n est un entier naturel u est un réel	**Variables :**	n est un entier naturel u est un réel
Entrée :	Saisir la valeur de n	**Entrée :**	Saisir la valeur de n

Traitement :	u prend la valeur 0
	Pour i allant de 1 à n :
	  u prend la valeur $u+2i+2$
	Fin Pour
		Traitement :	u prend la valeur 0
			Pour i allant de 0 à $n-1$:
			  u prend la valeur $u+2i+2$
			Fin Pour

Sortie :	Afficher u	**Sortie :**	Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

Solution

1. Pour calculer u_1, il faut poser $n = 0$ dans la relation de récurrence donnée par l'exercice, ce qui donne :
$$u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 2 = 2.$$
De même :
$$u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 2 = 6.$$
2. Les calculs précédents donnent facilement la solution. A noter que le premier calcul suffit à répondre correctement au problème.
La seule différence entre les deux algorithmes concerne le compteur i. Faut-il commencer à 0 ou 1 ? Notons que les deux algorithmes exécutent tous les deux le même nombre de boucles, c'est-à-dire n.
Le premier calcul-celui de u_1- impose à n une première valeur égale 0.
Le rôle de n est joué dans l'algorithme par i. Ces deux variables commencent donc à la même valeur, à savoir 0.
En conclusion, l'algorithme 2 est celui qu'il faut choisir.

☞ **Remarque** Regardons ce que donnerait le premier algorithme.

	u	i	commentaire
Initialisation	0	0	i prendra la valeur 1 au début de la boucle
Fin de la 1ère boucle	4	1	u prend la valeur $0+2\times 1+2=4$

6 Quelques exercices corrigés de baccalauréat

Exercice 3. On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$$

On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.
Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	Algorithme N° 2	Algorithme N° 3

Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers naturels
 	
Début de l'algorithme :
Lire n
v prend la valeur 1
Pour i variant de 1 à n faire
  v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
Fin pour
Afficher v
 	
Fin algorithme
	Variables :
	v est un réel
	i et n sont des entiers naturels
	
	Début de l'algorithme :
	Lire n
	Pour i variant de 1 à n faire
	v prend la valeur 1
	  Afficher v
	v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
	Fin pour
	
	Fin algorithme
		Variables :
		v est un réel
		i et n sont des entiers naturels
		
		Début de l'algorithme :
		Lire n
		v prend la valeur 1
		Pour i variant de 1 à n faire
		  Afficher v
		v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
		Fin pour
		Afficher v
		Fin algorithme

Solution L'algorithme n° 1 calcule tous les termes de v_0 à v_n mais n'affiche que le dernier v_n.
L'algorithme n° 2 calcule n fois de suite v_1 à partir de v_0 c ar v reprend à chaque boucle la même valeur 1 : il ne calcule pas les termes de v_0 à v_n.
L'algorithme n° 3 calcule tous les termes de v_0 à v_n et les affiche tous.
Remarquez bien la différence entre le premier et le troisième algorithme! Dans le premier, l'instruction "Afficher" n'est pas contenu dans la boucle et n'est donc exécuté qu'une seule fois par l'algorithme.

Exercice 4. Soit v une suite géométrique de raison $0 < q < 1$ et de premier terme $v_0 = 1$. Le cours de 1ère S assure que cette suite converge et a pour limite 0.
Ecrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 tel que le terme v_k soit inférieur à 10^{-n}.
Cet algorithme proposera à l'utilisateur de donner les valeurs de q et de n.

Solution

Variables	k est un entier d est une variable réelle q est un réel n est un entier naturel non nul.
Initialisation	LIRE k et q k PREND LA VALEUR 0 ; d PREND LA VALEUR q^k

Traitement	Tant que $d > 10^{-n}$
	  Début du tant que
	    k PREND LA VALEUR $k+1$;
	    d PREND LA VALEUR q^k ;
	  Fin du tant que

Sortie	Afficher k

Deuxième partie

Exercices sur les équations algébriques

EQUATIONS ET INEQUATIONS.

$\sqrt{A}=B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geqslant 0 \\ A = B^2 \end{cases}$	$\sqrt{A}>B \Leftrightarrow \begin{cases} B < 0 \\ A \geqslant 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} B \geqslant 0 \\ A > B^2 \end{cases}$
$\sqrt{A}<B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geqslant 0 \\ A \geqslant 0 \\ A < B^2 \end{cases}$	$\sqrt{A}=\sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geqslant 0 \\ A = B \end{cases}$
$\sqrt{A}>\sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geqslant 0 \\ A > B \end{cases}$	$\sqrt{A}<\sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geqslant 0 \\ A < B \end{cases}$

Exercice 5. Résoudre les équations suivantes :
1) $(x+1)(2x+3)=(x+1)(x^2-5)$; **2)** $2x^4+x^3-x-2=0$; **3)** $(x+1)^3+(x+2)^3=(x-2)^3+(x-1)^3$
4) $(7x-1)^2-(4x-3)^2=5(3x+2)^2$ **5)** $\dfrac{x-4}{x+4}-\dfrac{x+4}{x-4}=\dfrac{x-17}{x^2-16}$; **6)** $x^2+3x=x^3$;

7) $6x^3-7x^2+x=0$; 8) $x(x+1)+3(x+1)=2x^2(x+1)$; **9)** $(x^2-7x-4)^2-(x^2-9x+4)^2=0$;
10) $x^3-1+(x-1)(x+2)=0$ **11)** $9(x^2-1)^2=16(x+1)^2$ **12)** $x^3-4x^2+4x-1=x-x^2$;
13) $x^4-3x^2+2=0$; **14)** $3x^4+5x^2-1=0$; **15)** $x^4+x^2+1=0$; **16)** $(x^2+1)^3=8x^3$;
17) $x^3-27=(x-3)(mx+1+x)$(discuter suivant les valeurs de m) ; **18)** $-mx^4+5x^3+mx^2=0$

Exercice 6. Résoudre les inéquations suivantes :
1) $(x+1)(2x+3)<(x+1)(x^2-5)$; **2)** $(2x+1)^2-9>(x+2)(7x-5)$; **3)** $(x+2)^3<(2x-1)^3$
4) $(x+2)^2<(2x-1)^2$ **5)** $(3x+1)(7-2x)(2x-5)>0$; **6)** $(x^2+3x-4)(x^3+1)<0$;
7) $x^7+27x^4-x^3-27>0$; **8)** $x^3-1>(3x+1)(x-1)$; **9)** $x^3+8>2(3-x)(x+2)$;

Exercice 7. Soit $P(x)=2x^4-x^3+x-2$.
Calculer $P(1)$ et $P(-1)$ puis résoudre l'équation $P(x)=0$.

Exercice 8. Soit $P(x)=2x^3-4x^2+4x-2$.
Calculer $P(1)$ puis résoudre l'équation $P(x)=0$.

Exercice 9. Résoudre l'équation $x^3+x^2+x+1=0$.

Exercice 10. Dresser le tableau de signe des expressions suivantes :
1) $(3-2x)(x-2)^2$; 2) $(5+x)(4x-7)(3-x)$; 3) $(5-x)^3(x+2)$ 4) $(2x-7)(x+1)^3(2-x)$
5) $5x(7x+9)(6-5x)$; 6) $\dfrac{x^2-9}{(x+1)^2-25}$; 7) $\dfrac{x^3-2x}{x^2-8}$; 8) $\dfrac{3x^2+x^3}{x^2-4}$; 9) $\dfrac{x^2-5x}{(2x+1)^2-(x-2)^2}$;
10) $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{5}{x+2}$; 11) $\dfrac{3x}{4}+\dfrac{3}{x-4}$.

Exercice 11. Résoudre les équations ou inéquations suivantes
a) $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2}{x-3}$ et $\dfrac{1}{x-1}>\dfrac{2}{x-3}$; b) $\dfrac{m}{x}=\dfrac{1}{x^2}$ et $\dfrac{m}{x}<\dfrac{1}{x^2}$; c) $\dfrac{2x+1}{x-3}=x-1$ et $\dfrac{2x+1}{x-3}>x-1$
d) $\dfrac{x+3}{x-2}=\dfrac{5}{(3-x)(x-2)}$ et $\dfrac{x+3}{x-2}>\dfrac{5}{(3-x)(x-2)}$

Exercice 12. Résoudre et discuter suivant les valeurs de m :
1) $\dfrac{3x-m}{x-3}=m-1$; 2) $\dfrac{x-m}{x-2m}=\dfrac{x-3}{x-8}$; 3) $\dfrac{3x-m}{x-3}<m-1$.

Exercice 13. Résoudre : 1) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}=0$; 2) $\dfrac{2}{(x-1)(x+3)}+\dfrac{3}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{5}{(x-1)(x-2)}$;
3) $\dfrac{5(x-2)}{x+2}-\dfrac{2(x-3)}{x+3}=3$ 4) $\dfrac{7}{2x-5}+\dfrac{2}{x-3}=\dfrac{3x+1}{2}$ 5) $\dfrac{3}{x^2+x-2}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{x-1}$;
6) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{3x-2}{x(x^2-1)}$; 7) $\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x-2}{x-3}=\dfrac{x-4}{x-5}-\dfrac{x-5}{x-6}$;

Exercice 14. Résoudre les équations suivantes : 1) $\dfrac{1-\dfrac{x}{x+2}}{\dfrac{x}{x+2}+1}=2$; 2) $\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{x-2}}+x-2=0$;
3) $\dfrac{\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{+x}}{\dfrac{1+x}{1-x}-1}=\dfrac{3}{14-x}$; 4) $x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x+\dfrac{1}{x}}=0$; 5) $\dfrac{\dfrac{1}{1+x}}{1-\dfrac{1}{1+x}}+\dfrac{\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{x}{1-x}}+\dfrac{\dfrac{1}{1-x}}{\dfrac{x}{1+x}}+\dfrac{3}{2x}=0\cdot$

Exercice 15. Résoudre ces équations en fonctions de m : 1) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2-m}{x-1}=\dfrac{3-m}{x-2}$; 2) $\dfrac{m-1}{x-1}=\dfrac{2m-1}{x+1}$;
3) $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{m}{(x+2)(x+3)}$; 4) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{2x+1}=\dfrac{1}{m-1}+\dfrac{3}{2m+1}$; 5) $\dfrac{m}{x-1}=\dfrac{1}{x-m}$;
6) $\dfrac{mx+1}{x-m}=3$; 7) $\dfrac{x-m}{x-3m}=\dfrac{x-2}{x-3}$; 8) $\dfrac{mx-1}{x-1}+\dfrac{2x+1}{mx+1}=0$; 9) $\dfrac{(x-m)^2}{x^2}=\dfrac{x}{x+2m}$;
10) $\dfrac{1}{x^2+2}-\dfrac{2}{x^2-m}=0$; 11) $\dfrac{(1+x)^2}{mx+1}=1-x$.

Exercice 16. Résoudre ces équations en fonctions des paramètres a et b :
1) $\dfrac{x-2}{x-a}=b$; 2) $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}=\dfrac{2}{x}$; 3) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x}=\dfrac{x}{b}+\dfrac{b}{x}$; 4) $\dfrac{x-1}{x+a}=\dfrac{b-1}{a+b}$; 5) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$

Exercice 17. On considère l'équation

$$4(m+1)^2x+1-4m^2=(2m+1)^2+4x. \tag{1}$$

1. Résoudre et discuter, l'inconnue étant x et m le paramètre.
2. Pour quelles valeurs de m l'équation (2) admet-elle pour solution :
   (a) $x=0$
   (b) $x=1$
3. Résoudre et discuter (2), l'inconnue étant m et x le paramètre. Comparer les résultats des questions 1) et 2).

Exercice 18. Résoudre les inéquations suivantes :
1) $\dfrac{3x+1}{x-1}>x+2$; 2) $\dfrac{3x+1}{x+2}>x-1$; 3) $\dfrac{5x-x^2}{(4x-1)^2-49}>0$; 4) $-4<\dfrac{1}{x-1}<2$;
5) $\dfrac{3}{x-2+\dfrac{4}{x-4}}>\dfrac{7}{x-3}$; 6) $\dfrac{x}{x^3+x^2}>0$; 7) $\dfrac{x+1}{2x}>\dfrac{x+1}{x-2}$; 8) $-3<\dfrac{x}{x-3}<2$.

Exercice 19. Dresser le tableau de signes des expressions suivantes :
1) $\dfrac{2x-3}{x+1}$; 2) $\dfrac{5x-2}{3-x}$; 3) $\dfrac{2x}{x-2}$; 4) $\dfrac{x-2}{x+2}$; 5) $\dfrac{2x(x-1)}{x+1}$; 6) $\dfrac{(5x-1)(x+2)}{2x-1}$; 7) $\dfrac{x+1}{2x(3-x)}$;
8) $\dfrac{(x+2)^3(3-x)}{x(x+1)}$; 9) $\dfrac{2x-3}{x+1}$; 10) $(x+3)(x^2-1)$; 11) $(2x^2-5x=1)(x+3)$; 12) $\dfrac{(2x^2-5x)(3-2x)}{x+1}$;
13) $\dfrac{(3x-1)(2x+1)}{x^2+3x}$; 14) $\dfrac{7x^2+3x-4}{8x^2+14x-15}$; 15) $\dfrac{(2x^2-6x)(3-2x)}{x^2-9+2(x-3)}$;

Exercice 20. Factoriser et déterminer, selon le signe de x, le signe des expressions suivantes :
1)x^2-4x ; 2) $(2x-1)^2-(x+3)^2$; 3) x^3-4x^2-x+4 ; 4) $(x^2+1)(x-7)+2x-14$; 5) $(2x+1)^2-2x^2$;
6)$x^4-1-2x(x^2+1)$; 7) x^4-6x^2+5 ; 8)$(x^2-1)^2-3(x^2-1)+2$.

Exercice 21. Résoudre les inéquations suivantes : 1) $\dfrac{x-9}{x+1}<1$; 2) $\dfrac{x-1}{x+1}>2$; 3) $\dfrac{5x}{3x+1}>\dfrac{5}{3}$;
4) $\dfrac{x^-3}{x+4}<0$; 5) $\dfrac{x(x+3)}{x^2-1}>0$; 6) $\dfrac{(4x^2-1)(x+2)}{x^3(x-1)}<0$; 7) $\dfrac{x+1}{x-3}-\dfrac{1}{3}>\dfrac{4}{x-3}$;
8) $\dfrac{x+1}{x-2}<\dfrac{x+2}{x-1}$; 9) $2x<\dfrac{1}{2x}$. 10) $\dfrac{x^2-3x+1}{x^2-4}>1$; 11) $\dfrac{x+1}{3}<\dfrac{1}{x+3}$;
12) $\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{x}{x+1}<\dfrac{3}{x^2-1}$; 13) $\dfrac{2x^2-3x+3}{(x-2)(2x+3)}>-\dfrac{1}{2}$; 14) $\dfrac{x^2+x-4}{x-5}<\dfrac{x+4}{5}$;
15) $\dfrac{x+2}{x}<3<\dfrac{x}{x-1}$; 16) $-2<\dfrac{2x+1}{x-1}<1$; 17) $-1<\dfrac{5-x}{2x+1}<1$;
18) $-2<x+\dfrac{1}{x}<2$; 19) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}\leq 0$; 20) $\dfrac{x^2-x\sqrt{2}-1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\leq 0$; 21) $\dfrac{x^2-x(\sqrt{2}+\sqrt{5})+\sqrt{10}}{4x^2+4x+1}\geq 0$;

Exercice 22. Résoudre les systèmes suivants :

1) $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x+1}{3-x}<0\\(x-1)^2<9\end{array}\right.$ 2) $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{1}{x}<0\\\dfrac{x^2-1}{3x-4}>\dfrac{x+1}{x}\end{array}\right.$

Exercice 23. Montrer que l'équation : $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}=c$ a toujours deux racines distinctes, si $c\neq 0$, dont une est comprise entre a et b en supposant que $a<b$.

Exercice 24.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathfrak{D}$ de la fonction $f:x\mapsto\dfrac{x^2-6x-7}{x^2-2mx+m^2}$.
2. Déterminer m afin que :

$$\forall x\in\mathfrak{D},\ f(x)<\frac{4}{3}.$$

Exercice 25. Comparer les solutions du système $\left\{\begin{array}{l}x^2-2x-1<0\\x^2+2x-1<0\end{array}\right.$ à celles de l'inéquation $x^4-6x^2+1<0$.

Exercice 26. Résoudre les inéquations suivantes :

1) $x<\dfrac{x+2}{x-3}<2x$; 2) $\dfrac{3x-1}{2x+3}-\dfrac{1}{x+5}<0$; 3) $\dfrac{2x^2+3-5}{x^2-16}<\dfrac{x-7}{x-4}$; 4) $-\dfrac{1}{2}<\dfrac{x-1}{x^2-x+1}<\dfrac{1}{4}$.

Exercice 27. Soit l'équation $(m-1)x^2-2(m+3)x+m=0$. Pour quelles valeurs de m l'équation a-t-elle deux racines x' et x'' positives ? On suppose que x' et x'' sont les mesures, de deux côtés d'un rectangle. Evaluer le périmètre de ce rectangle, et son aire en fonction de m.
Peut-on déterminer m :

1. Pour que le périmètre du rectangle ait pour mesure 6 ; pour mesurer une valeur l donnée ?
2. Pour que l'aire du rectangle ait pour mesure 2 ; pour mesure une valeur s donnée ?
3. Pour que la diagonale du rectangle ait pour longueur $\sqrt{33}$? pour longueur une valeur λ donnée ?

Exercice 28. Résoudre : 1) $|x-2|=2x-5$; 2) $x^2+|x|-1=0$; 3) $x^2+|x-3|=0$;
4) $|x-5|+|x^2-25|=0$; 5) $|x-5|-|x^2-25|=0$; 6) $|x|+|x^2-1|=0$;

Exercice 29. Résoudre
1) $\sqrt{x-2}=\sqrt{2x-7}$; 2) $\sqrt{x^2+1}=x-3$; 3) $\sqrt{x^2-1}=x+2$; 4) $\sqrt{x-3}+2x=0$;
5) $\sqrt{x-3}-2x=0$; 6) $x+\sqrt{x-1}=13$; 7) $\sqrt{x}+\sqrt{2x+1}=5$; 8) $\sqrt{x^2-4}=\dfrac{x}{2}-1$;
9) $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x+3}$; 10) $\sqrt{x^4+1}=x^2+x+1$; 11) $\dfrac{2x-3}{\sqrt{x+2}}=0$; 12) $(2x+1)\sqrt{x+3}=0$;
13) $x^2\leq 16$ avec $x=|x|$ 14) $\sqrt{x^2}<4$; 15) $\sqrt{x^2-4}\leq 0$; 16) $\sqrt{x^2+1}\leq 1$;
17) $\sqrt{x^2+1}\leq\sqrt{x^2+2}$; 18) $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x^2-2}$; 19) $\dfrac{2x-3}{\sqrt{x+2}}\geq 0$; 20) $(2x+1)\sqrt{x+3}>0$;
21) $|x+1|+|x-1|=\dfrac{1}{2}$; 22) $|x+1|+|x-1|=2$; 23) $\sqrt{x^2-4x+4}>x$; 24) $\sqrt{x^2-4x+4}>|x|$;
25) $|x-3|<2$; 26) $|3x-5|>5$; 27) $|x+3|<|3x-2|$; 28) $\sqrt{x^2-4x+4}>\dfrac{x}{2}$;
29) $\dfrac{|x|-1}{|x|+2}<1$; 30) $(x-1)(2x+1)<|x-1|$; 31) $|(x-1)(2x+1)|<x-1$.

Exercice 30. Peut-on choisir m pour que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ 3x+|x-2|+2\,|x|>m.$$

Exercice 31. Résoudre 1) $(x-3)(x-5)<(|x|-3)(|x|-5)$; 2) $x-3=\sqrt{x}-\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{x-5}>\sqrt{2x-1}$;
4) $\sqrt{x^2-1}>3$; 5) $\sqrt{x^2+1}<x-2$.

Les exercices suivants ont été donnés en examen à Ramanujan en 1903.
Merci à Moubinool Omarjee qui me les a transmis.

Exercice 32.

1. Multiply $2\left(\dfrac{x}{y}+1+\dfrac{y}{x}\right)$ by $\dfrac{y}{2x}-1+\dfrac{x}{2y}$.
2. Divide $x^6-a^3x^3-2a^6$ by $\left(\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{x}{a}+1\right)$

3. Find the value $\left(\frac{x}{x-a}\right)^2+\left(\frac{x}{x+a}\right)^2$ in terms of n when $x^2=a^2\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$.

Exercice 33. Resolve into elementary factors :

1. $(a^2b^2-1)(x^2-y^2)+4abxy$;
2. $216x^6+19x^3-1$.

Exercice 34. Fond the H.C.F of :

$$27a^5-45a^4-16, \text{ and } 18a^5-45a^4-5a-14.$$

Exercice 35. Reduce to their simplest forms the expressions :

1. $x(y+z-x)^2+y(z+x-y)^2+(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$;
2. $\left(\frac{x+4}{x^2-x-12}-\frac{x+3}{x^2x-12}\right)\div\left(1+\frac{2(x^2-12)}{x^2+7x+12}\right)$.

Exercice 36. Extract the square root of the expression :

$$(x^2+y^2-2)^2+4(xy+2)(x^2+xy+y^2).$$

Exercice 37. Solve the equations :

1. $\frac{2x^2-x-1}{2x-1}+\frac{6x^2-4x+1}{3x-2}=\frac{2}{6x-13}+\frac{6x^2-9x-1}{2x-3}$;
2. $2+\frac{3}{5}+\frac{3x-5y}{2}=\frac{2}{5}(x+2), \qquad 8-\frac{x-2y}{4}=\frac{x}{2}+\frac{y}{3}$.

Les exercices suivants ont été donnés en examen à Ramanujan en 1907.

Exercice 38. Factorise :

1. $12x^4+25x^3-25x-12$.
2. $a^3+b^3+c^3+2abc-a^2b-a^2c-b^2c-b^2a-c^2a-c^2b$.

Exercice 39. Solve

1. $\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 25 \\ 4x^2-5xy+y^2 & = & 13. \end{array}\right.$
2.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 5 \\ x^3+y^3+z^3-6x & = & 35 \\ x^2+y^2-yz-zx-xy & = & 7 \end{array}\right.$$

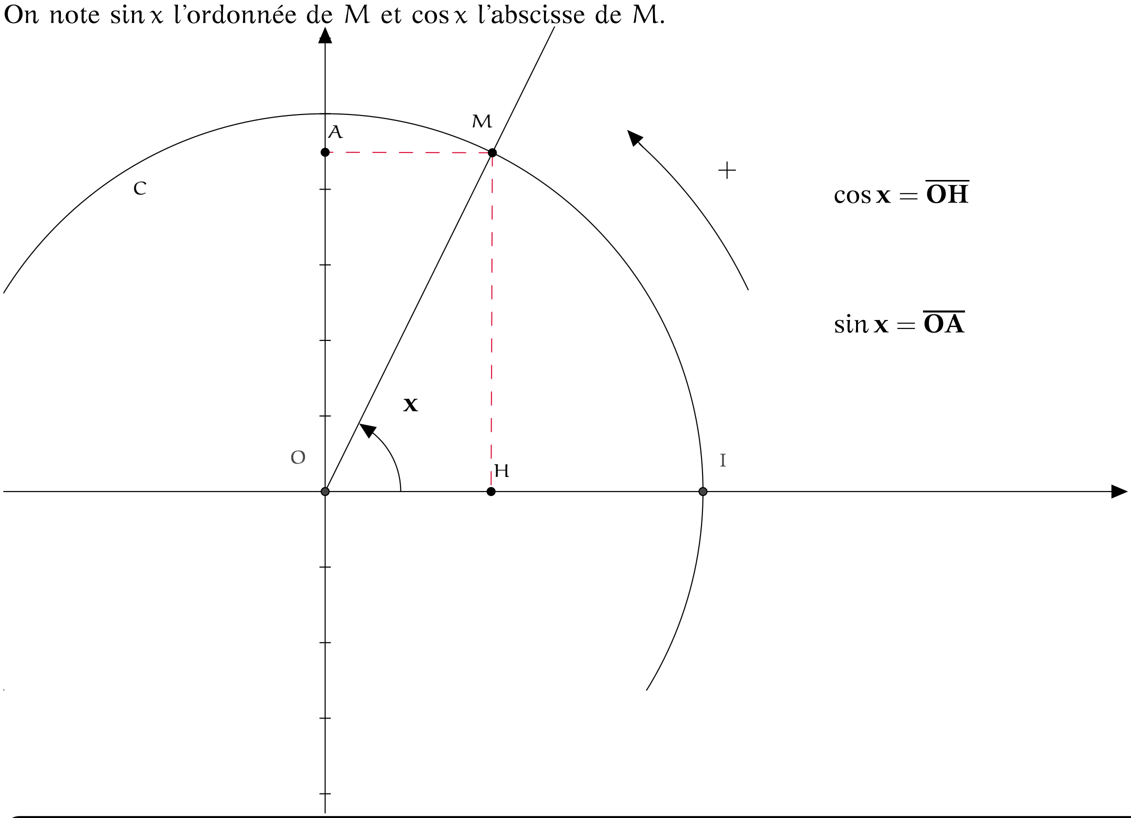
Troisième partie

Rappels et compléments de trigonométrie

1 Fonctions circulaires

1.1 Les fonctions sinus et cosinus

Soit un repère orthonormal d'origine O et C le cercle de centre O et de rayon 1.
Le point origine I du cercle est le point de coordonnées $(1;0)$.
A tout réel x, on associe par enroulement de la droite des réels un point M du cercle.
On note $\sin x$ l'ordonnée de M et $\cos x$ l'abscisse de M.



Théorème 1.1. *Pour tout réel x :*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Démonstration . M *appartient au cercle* C *dont une équation cartésienne est* $x^2 + y^2 = 1$*. Les coordonnées de* M *sont* $(\cos x; \sin x)$ *et vérifient l'équation de* C *d'où le résultat.*$\diamondsuit$

Proposition 1.1. *:*
Les fonction sinus et cosinus sont définies, continues, 2π-périodiques et dérivables sur $\mathbb{R}$.
• La fonction cosinus est paire. Sa courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées en repère orthogonal.
• La fonction sinus est impaire. Sa courbe est donc symétrique par rapport à l'origine du repère.

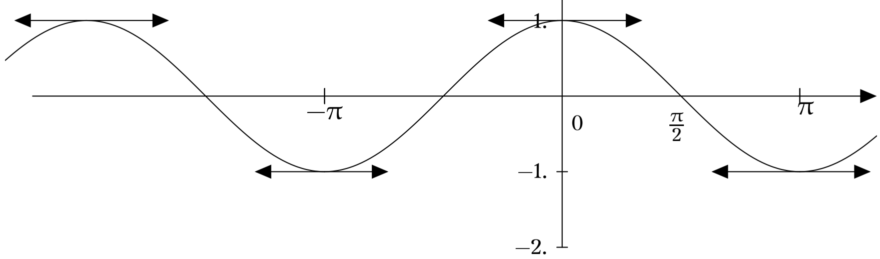
Dérivées

Théorème 1.2.

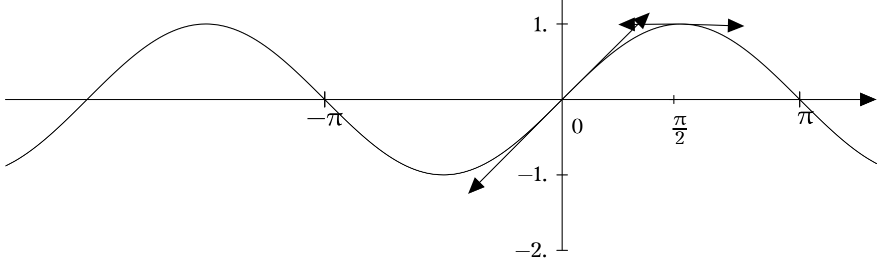
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin' x = \cos x \quad \textit{et} \quad \cos' x = -\sin x.$$

Courbes et tableaux de variations

x	0		π
$\cos' x$	0	$-$	0
$\cos$	1	$\searrow$	-1



x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin' x$	1	$+$	0	$-$	-1
$\sin$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



Proposition 1.2. *:*

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ $\qquad$ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}\ \sin^{(n)} x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}\ \cos^{(n)} x = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Equations trigonométriques

Proposition 1.3.

$$\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ } \mathit{ou} \text{ } x = \pi - a + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ } \mathit{ou} \text{ } x = -a + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

1.2 Fonction tangente

La fonction tangente, notée tan est définie sur $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$ par :

$$\tan : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Elle est continue et dérivable sur chaque intervalle de son ensemble de définition, et :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \quad \tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Elle est périodique de période π et impaire ; on l'étudie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, et sur cet intervalle, elle strictement croissante.

Limites

Proposition 1.4. *:*

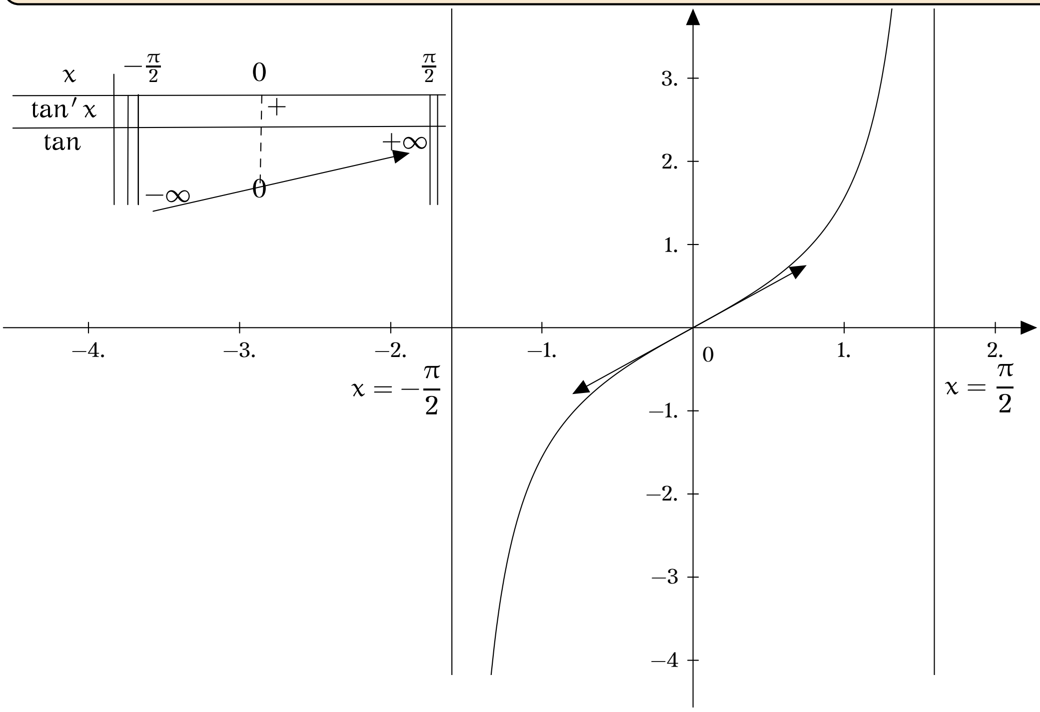
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty \textit{ et } \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty.$$

Les droites d'équation $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sont asymptotes à la courbe représentative de la fonction tangente.

Equation trigonométrique

Proposition 1.5. *:*

$$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$



1.3 Fonction cotangente

La fonction cotangente, notée cotan est définie sur $\mathbb{R} - \{\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\pi; (k+1)\pi[$ par :

$$\text{cotan} : x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Elle est continue et dérivable sur chaque intervalle de son ensemble de définition, et :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \quad \text{cotan}' x = -(1 + \text{cotan}^2 x) = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

Elle est périodique de période π et impaire; on l'étudie sur $]0;\pi[$, et sur cet intervalle, elle strictement décroissante.
De plus :

$$\forall x \in]0;\pi[, \quad \operatorname{cotan}(\pi - x) = \operatorname{cotan} x.$$

Le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ est centre de symétrie de sa courbe représentative.

Limites

Proposition 1.6. *:*

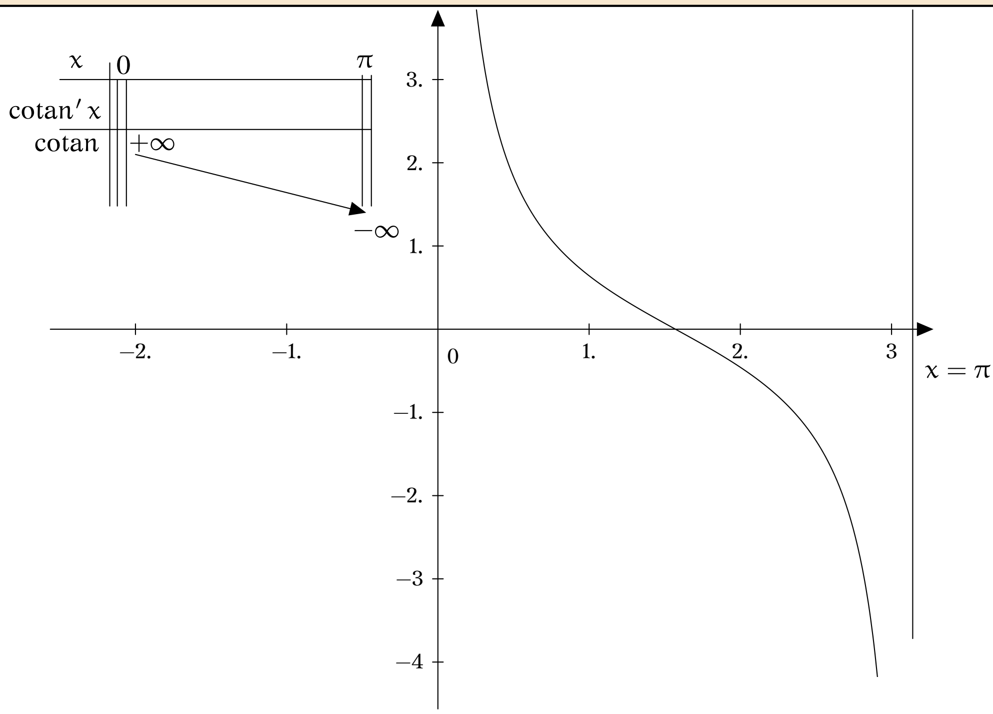
$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{cotan} x = +\infty \text{ } et \lim_{x\to\pi^-} \operatorname{cotan} x = -\infty.$$

Les droites d'équation $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sont asymptotes à la courbe représentative de la fonction cotangente.

Equation trigonométrique

Proposition 1.7. *:*

$$\operatorname{cotan} x = \operatorname{cotan} \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$



☞ **Remarque** La fonction cotangente n'est pas la fonction inverse de la fonction tangente.
En effet, l'inverse de la fonction tangente est définie sur l'ensemble de définition de la fonction tangente auquel il faut enlever les antécédents de 0 par la fonction tangente. Ceci ne correspond pas à l'ensemble de définition de la fonction cotangente.

2 Formules de trigonométrie

Formules de base

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1 \qquad \frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a \qquad \frac{1}{\sin^2 a} = 1 + \text{cotan}^2 a$$

Formules d'addition

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Formules de duplication et de triplication

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$

$$1 + \cos 2a = 2\cos^2 a \qquad 1 - \cos 2a = 2\sin^2 a$$

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a \qquad \sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$$

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a \qquad \tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

Formules de transformation de sommes en produits

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q} \qquad \tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

$$1 + \cos a = 2\cos^2\frac{a}{2} \qquad 1 - \cos a = 2\sin^2\frac{a}{2}$$

Formules de transformation de produits en sommes

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \qquad \sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

Expressions de $\sin a, \cos a, \tan a$, en fonction de $t = \tan\frac{a}{2}$

$$\sin a = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \tan a = \frac{2t}{1-t^2}$$

Factorisation de $a\cos x + b\sin x$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$$

, où φ est défini par : $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

Arcs associés

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x \qquad \tan(\pi - x) = -\tan x \qquad \tan(\pi + x) = \tan x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{cotan}\, x \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\text{cotan}\, x$$

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\Vert$
$\text{cotan}\, x$	$\Vert$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

3 Exercices

Exercice 1. Démontrer que :

$$\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \sin(a+b+c)-\sin a-\sin b-\sin c=-4\sin\left(\frac{b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+c}{2}\right).$$

Exercice 2. Résoudre l'équation : $\sin(x-a)=\sin x-\sin a$, où a est un paramètre.
Exercice 3. Résoudre l'inéquation : $\cos 2x\geqslant 3\cos x-2$.
Exercice 4. Donner l'ensemble de définition de la fonction $f : x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+\cos x-\sqrt{3}\sin x}}$.
Exercice 5. Résoudre l'équation : $\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{3}{4}$.
Exercice 6. Démontrer que : $\forall x\in\mathbb{R},\ \sin^2 5x-\sin^2 3x=\sin 2x\cos 8x$.
Exercice 7. A, B et C étant trois réels strictement positifs tels que : $A+B+C=\pi$, montrer que :

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right).$$

Exercice 8. Démontrer que : $\forall x\in\mathbb{R},\ 4\cos x\cos(x+\frac{\pi}{3})\cos(x-\frac{\pi}{3})=\cos 3x$.
Exercice 9. Démontrer que : $\sin\frac{37\pi}{72}\sin\frac{11\pi}{72}-\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{36}=\frac{1+\sqrt{2}}{4}$
Exercice 10. Résoudre l'équation :
$\sqrt{2}\cos a+\sin 2x-\cos 2x=0$, où a est un paramètre.
Exercice 11. Résoudre l'inéquation :$\cos 2x>3\cos x+1$
Exercice 12. Résoudre l'inéquation : $2\sin 2x>\sqrt{3}\sin 3x$.
Exercice 13. a, b et c étant trois réels, factoriser :

$$\sin(a+b+c)-\sin(-a+b+c)-\sin(a-b+c)-\sin(a+b-c).$$

Exercice 14. a, b et c étant trois réels, calculer :

$$\cos a\sin(b-c)+\cos b\sin(c-a)+\cos c\sin(a-b).$$

Exercice 15. Résoudre l'équation : $4\cos^2 x-2(1+\sqrt{2})\cos x+\sqrt{2}=0$.
Exercice 16. Résoudre l'inéquation : $(\sqrt{2}\sin x+1)(2\cos x-\sqrt{3})<0$.
Exercice 17.
Soit $f : x\mapsto\cos^6 x+\sin^6 x-\frac{3}{8}\cos 4x$. Montrer que f est constante.
Vérifier que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0.$$

En déduire la valeur de la somme :

$$S=\sum_{k=0}^{5}\cos^6\left(x+\frac{k\pi}{6}\right).$$

Exercice 18.
Résoudre l'équation :$\dfrac{2\sin x+\sqrt{3}}{2\cos x+1}=\tan a$, où a est un paramètre.
Exercice 19. Résoudre l'équation : $\tan x+\cot x+\dfrac{2}{\cos 2x}=4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$.
Exercice 20. Pour quelles valeurs de x a-t-on : $\sin x\neq\cos\frac{x}{2}$? Donner l'ensemble de solutions sous la forme de réunion d'intervalles.

Quatrième partie
Les nombres complexes

1 Racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe non nul

1.1 Définition

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. z désigne un nombre complexe non nul de forme exponentielle $z = \rho e^{i\theta}$.

Théorème 1.1. *L'équation d'inconnue Z :*

$$Z^n = z \qquad (1)$$

possède n solutions distinctes dans $\mathbb{C}$.
De plus, ces solutions sont les nombres complexes de module $\sqrt[n]{\rho}$ et d'arguments $\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ où k décrit l'intervalle d'entiers $[\![0; n-1]\!]$.

Démonstration . *Le réel 0 ne peut être solution de cette équation car z est non nul. Sous couvert d'existence, posons $re^{i\alpha}$ une solution de (1). Nous avons alors :*

$$(1) \Leftrightarrow r^n e^{in\alpha} = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} r^n & = & \rho \\ n\alpha & \equiv & \theta[2\pi]. \end{array} \right.$$

Ce qui donne, puisque les fonctions $x \mapsto x^n$ sont des bijections de $\mathbb{R}^{+*}$ dans lui-même :

$$(1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} r & = & \sqrt[n]{\rho} \\ \alpha & = & \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Or la suite $u : k \mapsto \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ est n-périodique. Elle ne prend donc que n valeurs distinctes obtenues en prenant k dans l'intervalle d'entiers $[\![0; n-1]\!]$.[a] $\diamondsuit$

Exercice 40. Montrer que l'on détermine ainsi les n valeurs distinctes de la suite u.

Définition 1.1. *Les solutions de l'équation (1) sont appelées racines $n^{\text{ième}}$ de z.*

☞ **Remarque** Si $n = 2$, on parle de racines carrées. Si $n = 3$, on parle de racines cubiques.

Exercice 41. Déterminer les racines cubiques de -8.

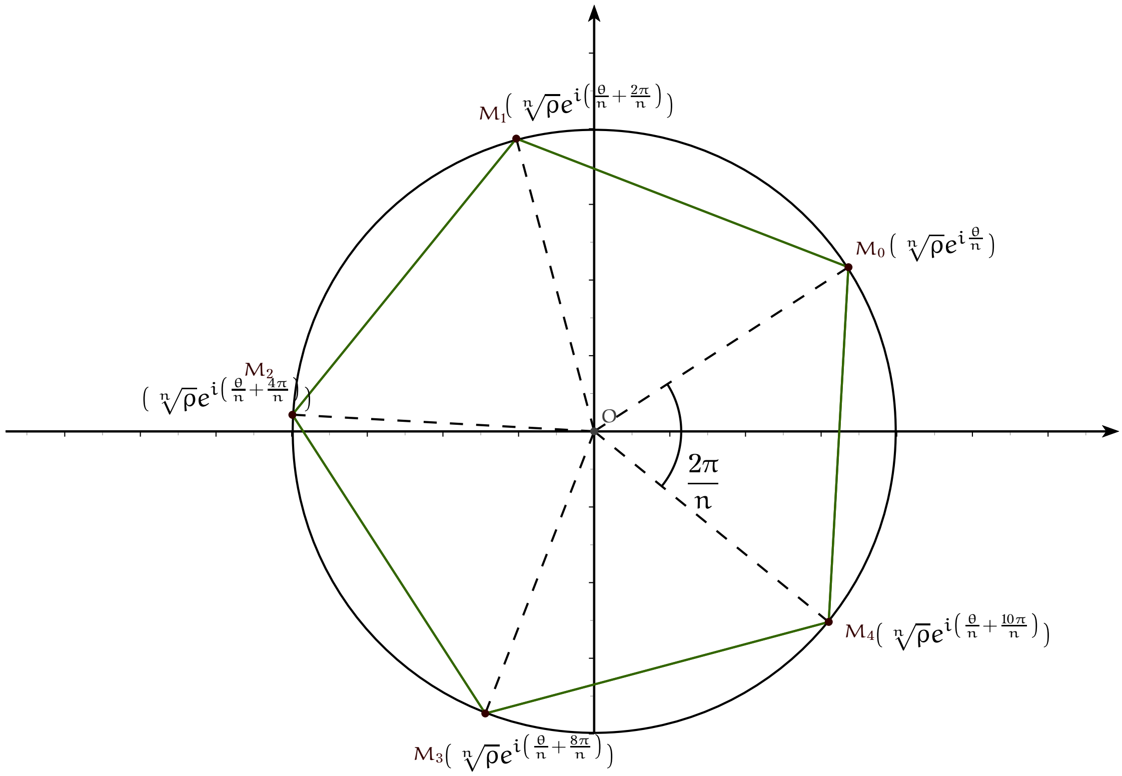
Exercice 42. Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. Calculer les nombres :

$$A = \omega + \omega^2 + \omega^4 \text{ et } B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$$

1.2 Représentation graphique

Théorème 1.2. *Les racines $n^{\text{ième}}$ de z forment un polygone régulier à n cotés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{\rho}$.*

a. Tout autre intervalle d'entiers de longueur n conviendrait aussi. Mais celui-là est le plus-voir le seul- utilisé car le plus naturel.



Cas $n = 5$

1.3 Racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité

Définition 1.2. *Les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité sont les solutions de l'équation :*

$$Z^n = 1.$$

Ce sont donc les complexes ω_k tels que :

$$\forall k \in [\![0; n-1]\!], \qquad \omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}}.$$

Proposition 1.1. *:*

1. $$\forall k \in [\![0; n-1]\!], \qquad \overline{\omega}_k = \omega_{n-k}$$
2. *On obtient les n racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe non nul en multipliant l'une d'entre elle par les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.*
3. $\forall k \in [\![0; n-1]\!], \omega_k = \omega_1^k$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0.$
5. *n étant un nombre entier supérieur ou égal à 2 fixé, l'ensemble des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité , noté U_n forme un groupe pour la multiplication. C'est-à-dire :*
   - $1 \in U_n$
   - $\forall (k, k') \in [\![0; n-1]\!], \exists k'' \in [\![0; n-1]\!],\ \omega_k\omega_{k'} = \omega_{k''}$
   - $\forall \omega_k \in U_n, \dfrac{1}{\omega_k} \in U_n.$

Exemple 1.1. *: Les racines cubiques de l'unités sont les nombres* 1, $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, j^2.
On a donc $1 + j + j^2 = 1 + j + \bar{j} = 0$.

2 Equations du second degré à coefficients complexes.

2.1 Etude d'un exemple

Définition 2.1. *On appelle racine carrée du nombre complexe* $z = -3 + 4i$ *tout nombre complexe* δ *tel que* $\delta^2 = -3 + 4i$.
On pose $\delta = x + iy$ *avec* $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Expliquer pourquoi $x^2 + y^2 = 5$
2. Résoudre le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

En déduire toutes les racines carrées de -3 +4i.
3. Déterminer la forme canonique du trinôme $z^2 + z + 1 + i$. En déduire une factorisation en utilisant les résultats de la question 2.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 + i = 0$.

2.2 Généralisation

En admettant que tout nombre complexe possède une racine carrée , proposer et démontrer une méthode de résolution des équations du second degré à coefficients complexes.

3 Linéarisation des polynômes trigonométriques.

3.1 Définition

On peut chercher à transformer un polynôme trigonométrique P en $\sin x$ et $\cos x$ en une somme de termes du type $\sin nx$ et $\cos nx$ $(n \in \mathbb{N})$. On dit alors qu'on ***linéarise*** le polynôme P.
Exemple : Linéarisation de $\cos^2 x$:

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Leftrightarrow \forall\ x \in \mathbb{R},\ \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

3.2 Méthode générale

Il est possible de linéariser n'importe quel polynôme trigonométrique en appliquant les formules d'Euler :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ et } \forall\, x \in \mathbb{R}, \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

La formule du ***binôme de Newton*** appliquée à $(e^{ix} + e^{-ix})^n$ et à $(e^{ix} - e^{-ix})^n$ permet le développement de l'expression ainsi obtenue . En ordonnant convenablement les termes du développement, l'expression obtenue peut être écrite sous la forme d'une ***combinaison linéaire*** d'expressions de la forme $(e^{ikx} + e^{-ikx})$ et $(e^{ikx} - e^{-ikx})$ avec $1 \leq k \leq n$. La linéarisation s'obtient alors en réutilisant les formules d'Euler :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ e^{ikx} + e^{-ikx} = 2\cos kx \text{ et } \forall\, x \in \mathbb{R},\ e^{ikx} - e^{-ikx} = 2i\sin kx.$$

3.3 Exercice résolu

Linéariser l'expression : $\cos^2 x \sin^4 x$.

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \cos^2 x \sin^4 x = \frac{1}{2^2}(e^{ix} + e^{-ix})^2 \frac{1}{2^4 i^4}(e^{ix} - e^{-ix})^4$$
$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \cos^2 x \sin^4 x = \frac{1}{2^6}(e^{2ix} - e^{-2ix})^2 (e^{ix} - e^{-ix})^2$$
$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \cos^2 x \sin^4 x = \frac{1}{2^6}(e^{4ix} + e^{-4ix} - 2)(e^{2ix} + e^{-2ix} - 2)$$
$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \cos^2 x \sin^4 x = \frac{1}{2^6}(e^{6ix} - e^{2ix} - 2e^{4ix} - e^{-2ix} + e^{-6ix} - 2e^{-4ix} + 4)$$
$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \cos^2 x \sin^4 x = \frac{1}{2^6}(e^{6ix} + e^{-6ix} - 2(e^{4ix} + e^{-4ix}) - (e^{2ix} + e^{-2ix}) + 4)$$
$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \cos^2 x \sin^4 x = \frac{1}{2^6}(2\cos 6x - 4\cos 4x - 2\cos 2x + 4)$$
$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \cos^2 x \sin^4 x = \frac{1}{32}(\cos 6x - 2\cos 4x - \cos 2x + 2)$$

3.4 Exemple d'application

La linéarisation permet de trouver les *primitives* des polynômes trigonométriques :
Etant donné un polynôme trigonométrique P, une primitive de P est une fonction F définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $F' = P$.
*E*xemple : Cherchons une primitive sur $\mathbb{R}$ du polynôme trigonométrique tel :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, P(x) = \cos^2 x \sin^4 x.$$

La linéarisation obtenue dans la précédente section nous permet d'écrire :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, P(x) = \frac{1}{32}\cos 6x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{32}\cos 2x + \frac{1}{16}$$

Sachant que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \forall\ x \in \mathbb{R}, (\sin nx)' = n\cos(nx)$ et $(\cos nx)' = -n\sin(nx)$,
P admet pour primitive la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{192}\sin 6x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{64}\sin 2x + \frac{1}{16}x.$$

4 Calcul de $\cos n\phi$ et $\sin n\phi$.

Rappelons la formule de Moivre :

$$\forall\ \phi \in \mathbb{R}, \forall\ \in \mathbb{Z},\ (\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi.$$

Elle permet de trouver l'expression de $\cos n\phi$ et de $\sin n\phi$ en fonction de $\cos\phi$ et de $\sin\phi$.
Exemple : n=2

$$\forall\ \phi \in \mathbb{R},\ (\cos\phi + i\sin\phi)^2 = \cos^2\phi - \sin^2\phi + 2i\sin\phi\cos\phi = \cos 2\phi + i\sin 2\phi$$

Donc :

$$\forall\ \phi \in \mathbb{R},\ \cos 2\phi = \cos^2\phi - \sin^2\phi$$

et

$$\forall\ \phi \in \mathbb{R}, \sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi.$$

Exercice 43. 1. Calculer $\cos 5\phi$ et $\sin 5\phi$ en fonction de $\cos\phi$ et $\sin\phi$.

2. En déduire que :

$$\mathrm{cotan}\, 5\phi = \frac{1 - 10\tan^2\phi + 5\tan^4\phi}{5\tan\phi - 10\tan^3\phi + \tan^5\phi}.$$

5 Formules trigonométriques.

Les formules de trigonométrie vues en 1ère S, et bien d'autres, peuvent être rapidement démontrées en utilisant les complexes.

5.1 Exemples

Exemple n°1 Soit à démontrer que :

$$\forall\ (x;y) \in \mathbb{R}^2, \cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)).$$

On utilise la même méthode vue dans 1.

$$\forall\ (x;y) \in \mathbb{R}^2, \cos x \cos y = \frac{1}{4}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\left(e^{iy} + e^{-iy}\right)$$
$$\forall\ (x;y) \in \mathbb{R}^2, \cos x \cos y = \frac{1}{4}\left(e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)} + e^{i(y-x)} + e^{-i(x+y)}\right)$$
$$\forall\ (x;y) \in \mathbb{R}^2, \cos x \cos y = \frac{1}{4}\left(e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)} + e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)}\right)$$
$$\forall\ (x;y) \in \mathbb{R}^2, \cos x \cos y = \frac{1}{4}(2\cos(x+y) + 2\cos(x-y))$$

Ce qui donne la formule demandée :

$$\forall\ (x;y) \in \mathbb{R}^2, \cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)).$$

Exemple n°2 Soit à démontrer que :

$$\forall\ (p;q) \in \mathbb{R}^2, \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}.$$

Cette égalité est une conséquence de l'exemple 1 précédent mais peut être démontrée directement :

$$\forall\ (p;q) \in \mathbb{R}^2, \cos p + \cos q = \frac{1}{2}(e^{ip} + e^{-ip} + e^{iq} + e^{-iq}).$$

Or :

$$\forall\ (p;q) \in \mathbb{R}^2, e^{ip} + e^{iq} = e^{i\left(\frac{p+q}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{p-q}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{p-q}{2}\right)}\right) = 2e^{i\left(\frac{p+q}{2}\right)}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Par conséquent :

$$\forall\ (p;q) \in \mathbb{R}^2, \cos p + \cos q = \frac{1}{2}(2e^{i(\frac{p+q}{2})}\cos(\frac{p-q}{2}) + 2e^{i(-\frac{p+q}{2})}\cos(\frac{-p+q}{2}))(1)$$

La fonction cosinus étant paire : $\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \cos\left(\frac{-p+q}{2}\right)$ nous avons :

$$(1) \Leftrightarrow \forall\ (p;q) \in \mathbb{R}^2\ , \cos p + \cos q = \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\left(e^{i(\frac{p+q}{2})} + e^{i(-\frac{p+q}{2})}\right)$$
$$(1) \Leftrightarrow \forall\ (p;q) \in \mathbb{R}^2, \cos p + \cos q = \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\left(2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\right).$$

Ce qui prouve l'égalité.

5.2 Exercices

Exercice 44. Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \sin 3x \cos 5x = \dfrac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x)$.

Exercice 45.

1. Factoriser $f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$.
2. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-\pi;\pi]$.

Exercice 46. Montrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos x \sin^4 x = \frac{1}{16}(\cos 5x - 3\cos 3x + 2\cos x).$$

Exercice 47. Aix Marseille 1987
Calculer

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^x \sin^5 t \cos t \, dt \right) dx.$$

Cinquième partie

Les fonctions

1 Généralités

Définition 1.1. *Une relation de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est une* ***fonction*** *si tout réel* x *est relié à au plus un élément* y *de* $\mathbb{R}$ *:* y *est alors noté* $f(x)$, *et l'on écrit :*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

- $f(x)$ *est l'image de* x *par* f.
- *Etant donné un réel* y, *s'il existe un réel* x *tel que* $y = f(x)$, x *est alors appelé* ***antécédent*** *de* y *par la fonction* f.

☞ **Remarque** : On parle de la **fonction f** et non de la **fonction f(x)** : en effet $f(x)$ est un réel et non pas une fonction.
L'ensemble des réels x ayant une image par f est appelé **ensemble de définition de** f, souvent noté $\mathcal{D}$ ou $\mathcal{D}_f$.
Si f est définie sur $\mathbb{R}$, f est une **application** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1. ***La fonction partie entière*** *Cette fonction, notée* E *ou* $\lfloor \cdot \rfloor$, *associe à tout réel* x *le plus grand entier inférieur ou égal à* x *:*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in [n; n+1[, \ E(x) = n.$$

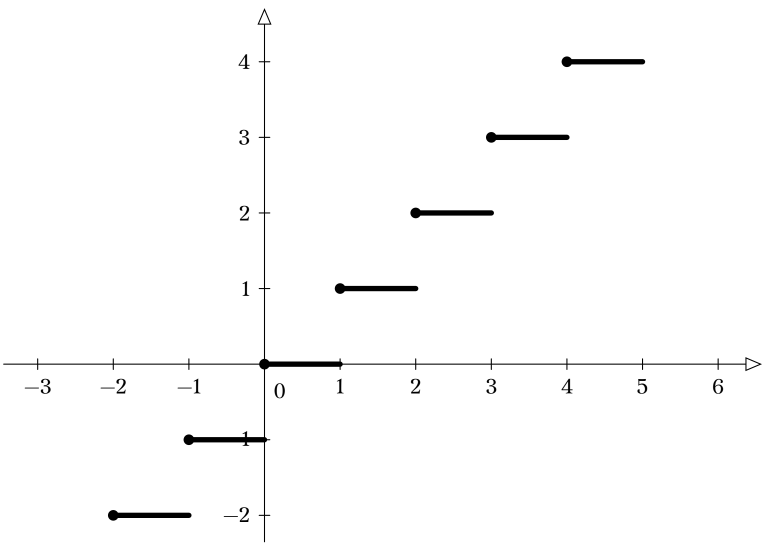
Conséquences :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ E(x) \leqslant x < E(x) + 1.$$

et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \ E(x+n) = E(x) + n.$$

Courbe représentative :



1.1 Image d'une partie A

Définition 1.2. *Soit* $A \subset \mathbb{R}$. *On appelle image de* A *par la fonction* f *l'ensemble des réels* $f(x)$ *lorsque* x *décrit* A.
On note cet ensemble $f(A)$ *:*

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{y \in \mathbb{R}/\exists x \in A,\ y = f(x).\}$$

Exemple 1.2. *:*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \qquad \text{et } A = [-1;4[.$$

Alors $f(A) = [0;16[$.

Si $A = \mathcal{D}_f$, $f(\mathcal{D}_f)$ est appelé l'image de f et est noté *Im* f. Il s'agit donc de l'ensemble des réels ayant un antécédent par f.

Exemple 1.3. *:*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Alors : Im $f = \mathbb{R}^+$.

1.2 Image réciproque d'une partie B

Définition 1.3. *Soit* $B \subset \mathbb{R}$. *On appelle image réciproque de* B *par* f *l'ensemble des antécédents par* f *des éléments de* B. *On le note* $f^{-1}(B)$ *:*

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}, /f(x) \in B\}.$$

Exemple 1.4. *Si* $B = \{\alpha\}$, *alors* $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \quad /f(x) = \alpha\}$ *est l'ensemble des antécédents du réel* α *par* f *:*
Si f *est la fonction carré définie sur* $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\{3\}) = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.

Exemple 1.5.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Si $B =]1;4]$, *alors* $f^{-1}(B) = [-2;-1[\cup]1;2]$.

Exemple 1.6. *Si* f *est la fonction partie entière :* $\forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $f^{-1}(x) = \emptyset$.
En effet, cette fonction ne prend que des valeurs dans $\mathbb{Z}$. *Si* x *désigne un réel non entier, il n'est la partie entière d'aucun réel. Par contre :* $f^{-1}(0) = [0;1[$.

☞ **Remarque** : la notation $f^{-1}(B)$ ne signifie pas que f est bijective , ni que la fonction f^{-1} existe.

1.3 Egalité de deux fonctions. Comparaisons.

Définition 1.4. *Deux fonctions* f *et* g *sont égales si et seulement si :*
• $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$
• $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) = g(x)$.

Définition 1.5. *De même : la relation* $f \leqslant g$ *signifie que :*
• $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$
• $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) \leqslant g(x)$.

1.4 Restriction d'une fonction

Définition 1.6. *Soit* A *une partie de l'ensemble de définition* $\mathcal{D}_f$ *d'une fonction* f*. On appelle restriction de* f *à* A *l'application* g *définie sur* A *par :*

$$\forall x \in A,\ g(x) = f(x).$$

g *est notée* $f_{/A}$.

☞ **Remarques** :
• $f = f_{/A} \Leftrightarrow A = \mathcal{D}_f$.
• La restriction d'une fonction à son ensemble de définition est une application.

1.5 Prolongement d'une fonction

Définition 1.7. *Si une partie* A *de* $\mathbb{R}$ *contient l'ensemble de définition d'une fonction* f*, on appelle prolongement de* f *à* A *toute application* g *définie sur* A *telle que :*

$$g_{/\mathcal{D}_f} = f.$$

Exemple 1.7.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2}{|x|} \end{array} \right.$$

f *est définie sur* $\mathbb{R}^*$.
Tout prolongement g *de* f *à* $\mathbb{R}$ *est défini par :*

$$g : \left\{ \begin{array}{rl} \forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ g(x) & = -x \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) & = x \\ g(0) & = a \end{array} \right. \quad \text{où } a \text{ est un réel quelconque.}$$

☞ **Remarque** : Si $a = 0$, le prolongement obtenu donne une fonction g continue sur $\mathbb{R}$: la fonction g est appelée prolongement par continuité de f.

1.6 Application injective ou injection

Définition 1.8. *Une fonction* f *est injective si et seulement si tout réel admet* ***au plus*** *un antécédent par* f*, c'est-à-dire : si :*

$$\forall (x;x') \in \mathcal{D}_f^2,\, f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$$

ou bien :

$$\forall (x;x') \in \mathcal{D}_f^2,\, x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$$

Exemple 1.8. *La fonction* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array} \right.$ *est injective.*

En effet : $\forall (x;x') \in \mathbb{R}^2,: f(x) = f(x') \Leftrightarrow x^3 = x'^3 \Leftrightarrow (x-x')(x^2+xx'+x'^2) = 0$

Or $\forall (x;x') \in \mathbb{R}^2 - \{(0;0)\}$, $x^2+xx'+x'^2 \neq 0$, *donc :* $\forall (x;x') \in \mathbb{R}^2,: f(x) = f(x') \Leftrightarrow x - x' = 0$.

Contre-exemple : $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ n'est pas injective car $5 \neq -5$ et $f(5) = f(-5)$.

1.7 Application surjective ou surjection

Définition 1.9. *Une fonction* f *définie sur* $\mathcal{D}_f$ *est surjective de* $\mathcal{D}_f$ *sur un ensemble* B *si tout réel de* B *admet au moins un antécédent par* f*, c'est-à-dire :*

$$\forall \quad \in B,\, \exists \quad x \in \mathcal{D}_f,\, y = f(x).$$

Exemple 1.9. *La fonction* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ *est une surjection de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}^+$ *car :* $\forall y \in \mathbb{R}^+,\, \exists x \in \mathbb{R}, y = x^2$.

☞ **Remarque** : Une application f est toujours surjective de $\mathcal{D}_f$ sur *Im* f.

1.8 Application bijective ou bijection

Définition 1.10. *Une fonction* f *définie sur* $\mathcal{D}_f$ *est bijective de* $\mathcal{D}_f$ *sur un ensemble* B *si tout réel de* B *possède un unique antécédent par* f*, c'est-à-dire :*

$$\forall y \in B,\, \exists! x \in \mathcal{D}_f, y = f(x).$$

Exemple 1.10. *La fonction* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ *est une bijection de* $\mathbb{R}^+$ *sur* $\mathbb{R}^+$ *car :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\, \exists! x \in \mathbb{R}^+, y = x^2 \text{ avec } x = \sqrt{y}.$$

Théorème 1.1. f *est une bijection de* A *sur* B *si et seulement si* f *est injective et surjective.*

Propriété 1.1. *Si f est une application bijective de A sur B, on peut définir une application de B dans A, notée f^{-1}, appelée application réciproque de f, par :*

$$f^{-1}: \begin{array}{ccl} B & \longrightarrow & A \\ y & \longmapsto & f^{-1}(y) = x \text{ avec } y = f(x) \end{array}$$

Définition 1.11. *Une application telle que $f = f^{-1}$ est appelée application involutive ou involution.*

1.9 Courbe représentative ou graphe d'une fonction

Définition 1.12. *La courbe représentative $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f dans un repère cartésien $(O;\vec{i};\vec{j})$ est l'ensemble des points M de coordonnées $(x; f(x))$ dans ce repère lorsque x décrit l'ensemble de définition de f.*

$$\mathcal{C} = \{M(x; f(x))_{(O;\vec{i};\vec{j})} / x \in \mathcal{D}_f\}$$

Proposition 1.1. *: $\forall M \in \mathcal{C}, \exists x \in \mathcal{D}_f, \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + f(x)\vec{j}$.*

Proposition 1.2. *: Si f est bijective de A vers B, le graphe de f^{-1} est, dans un repère orthonormé, l'image de la courbe de f par la réflexion d'axe la droite d'équation $y = x$, appelée première bissectrice.*

Conséquence : le graphe d'une involution est symétrique par rapport à la première bissectrice.

Exemple 1.11. *graphe de la fonction inverse.*

1.10 Changement d'origine

Théorème 1.2. *Soit $\mathcal{R} = (O;\vec{i};\vec{j})$ un repère donné et soit Ω le point de coordonnées $(a; b)$ dans ce repère (on a donc $\overrightarrow{O\Omega} = a\vec{i} + b\vec{j}$).*
Soit $\mathcal{R}' = (\Omega;\vec{i};\vec{j})$ un nouveau repère.
Donnons-nous un point M dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont $(x; y)$ et dont les coordonnées dans $\mathcal{R}'$ sont $(X; Y)$.
Les formules de changement d'origine sont :

$$\begin{cases} x = & X + a \\ y = & Y + b \end{cases}$$

Démonstration . $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ *et* $\overrightarrow{\Omega M} = X\vec{i} + Y\vec{j}$. *Or* $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ *donc :* $x\vec{i} + y\vec{j} = a\vec{i} + b\vec{j} + X\vec{i} + Y\vec{j}$. $\diamondsuit$

Equation d'une courbe dans les deux repères
Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
$M(x; y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow Y + b = f(X + a) \Leftrightarrow Y = F(X)$ où F est une nouvelle fonction.
$Y = F(X)$ est l'équation de la courbe $\mathcal{C}_f$ dans le repère $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$.
F est la fonction dont le graphe est $\mathcal{C}_f$ dans le repère $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$.

1.11 Domaine d'étude

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.

Définition 1.13.
• f est paire si et seulement si :
i) $\forall x \in \mathcal{D}, -x \in \mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0).
ii) $\forall x \in \mathcal{D},\ f(-x) = f(x)$.
$\mathcal{C}_f$ est invariante par la réflexion d'axe (Oy) dans un repère orthogonal.
On étudie alors f sur $\mathcal{D} \cap [0; +\infty[$.
• f est impaire si et seulement si :
i) $\forall x \in \mathcal{D}, -x \in \mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0).
ii) $\forall x \in \mathcal{D},\ f(-x) = -f(x)$. $\mathcal{C}_f$ est globalement invariante par la symétrie de centre O quel que soit le repère.
On étudie alors f sur $\mathcal{D} \cap [0; +\infty[$.
• La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal si et seulement si la fonction F définie ci-dessus est paire. Le point Ω est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si la fonction F définie ci-dessus est impaire.
Autre méthode : La droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si :

$$\forall x \in \mathcal{D}, 2a - x \in \mathcal{D} \text{ et } \forall x \in \mathcal{D}, f(2a - x) = f(x).$$

Le point $\Omega(a; b)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si :

$$\forall x \in \mathcal{D}, 2a - x \in \mathcal{D} \text{ et } \forall x \in \mathcal{D}, f(a - x) + f(a + x) = 2b.$$

• f est périodique de période $T \neq 0$ si et seulement si :

$$\forall x \in \mathcal{D},\ x + T \in \mathcal{D} \text{ et } x - T \in \mathcal{D},\ \text{ et } \forall x \in \mathcal{D}, f(x + T) = f(x).$$

$\mathcal{C}_f$ est alors globalement invariante par les translations de vecteur $kT\vec{i}$, pour tout k de $\mathbb{Z}$.
Il existe alors une période T strictement positive : f est dite T-périodique.
On étudie alors f sur $\mathcal{D} \cap [0; T[$.
On appelle période fondamentale la plus petite période strictement positive.

Exemple 1.12. *Les fonctions* cos *et* sin *ont pour période fondamentale* 2π.

Exercice 48. Soit ω et ϕ deux réels donnés de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Quelle est la période fondamentale des fonctions $x \mapsto \sin(\omega x + \phi)$ et $x \mapsto \cos(\omega x + \phi)$?

1.12 Changement de base

On note $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un premier repère, et soient $\vec{I} = a\vec{i} + b\vec{j}$ et $\vec{I} = c\vec{i} + d\vec{j}$ deux vecteurs du plan avec (a, b, c, d) un élément de $\mathbb{R}^4$.
Ces deux vecteurs du plan forment une nouvelle base du plan si et seulement si ils ne sont pas colinéaires, ce qui est équivalent au fait que leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, ce qui est équivalent aussi à $ad - bc \neq 0$. Un point M a pour coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et $(X; Y)$ dans le repère $(O; \vec{I}; \vec{I})$. On a alors :

Théorème 1.3.

$$\begin{cases} x = & aX + cY \\ y = & bX + dY \end{cases}$$

Exemple 1.13. *On suppose que le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *est orthonormé direct, et que le repère* $(O;\vec{I};\vec{J})$ *est déduit du précédent par la rotation de centre* O *est d'angle* $\theta[2\pi]$.
Dans ce cas : $\vec{I} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$ *et* $\vec{I} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$.

Equation d'une courbe dans deux repères.
Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. $M(x;y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow bX + cY = f(aX + cY)$. Suivant l'expression de f, il peut ne pas être possible d'exprimer Y en fonction de X.

Exemple 1.14. *Soit* $f : x \mapsto x^2$. *Soit* $\mathcal{C}_f$ *sa courbe représentative dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$. *Posons :* $\vec{I} = \vec{i} + \vec{j}$ *et* $\vec{I} = -\vec{i} + \vec{j}$.
Ces deux nouveaux vecteurs ne sont pas colinéaires, et :

$$M(x;y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = x^2 \Leftrightarrow X + Y = (X - Y)^2 \Leftrightarrow Y^2 - (2X+1)Y + X^2 - X = 0.$$

La parabole d'équation $y = x^2$ *dans le premier repère a pour équation* $Y^2 - (2X+1)Y + X^2 - X = 0$ *dans le second. Dans ce cas, elle n'est plus la courbe représentative d'une fonction et correspond à la réunion de courbes de deux fonctions.*

1.13 Fonction majorée, minorée, bornée

Définition 1.14. *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}$.
- *A est majorée par le réel M si :* $\forall x \in A,\ x \leqslant M$. *$M$ est un majorant de A.*
- *A est minorée par le réel m si :* $\forall x \in A,\ m \leqslant x$. *$m$ est un minorant de A.*

Tout réel supérieur à M est majorant de A ; tout réel inférieur à m est minorant de A.
- *M est le maximum de A si M est un majorant de A et appartient à A : on le note* $\max A$.
- *m est le minimum de A si m est un minorant de A et appartient à A : on le note* $\min A$.

Un ensemble majoré n'a pas toujours de maximum.
- *On appelle borne supérieure de A le plus petit des majorants de A, on le note* $\sup A$.

$$r = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \leqslant r \\ \forall s \in \mathbb{R}, [(\forall x \in A, x \leqslant s) \Longrightarrow r \leqslant s] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \leqslant r \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, r - \varepsilon < x \leqslant r \end{cases}$$
- *On appelle borne inférieure de A le plus grand des minorants de A, on le note* $\inf A$.

$$r = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \geqslant r \\ \forall s \in \mathbb{R}, [(\forall x \in A, x \geqslant s) \Longrightarrow r \geqslant s] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \geqslant r \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, r \leqslant x < r + \varepsilon \end{cases}$$

Exercice 49. Soit $A = \{x \in \mathbb{R}^+ / x^2 < 2\}$. Montrer que A est majorée par $\sqrt{2}$, que $\sqrt{2}$ est la borne supérieure de A mais que A n'a pas de maximum.

☞ **Remarque** : Si $\max A$ existe, alors $\max A = \sup A$.

Théorème 1.4. • *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.*
• *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.*

Définition 1.15. *Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$. Soit A une partie de $\mathcal{D}$.*
- *f est majorée sur A si* $\{f(x), x \in A\}$ *est majoré, c'est-à-dire si :*$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, f(x) \leqslant M$.
- *f est minorée sur A si* $\{f(x), x \in A\}$ *est minoré, c'est-à-dire si :*$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, f(x) \geqslant m$.
- *f est bornée sur A si* $\{f(x), x \in A\}$ *est borné, c'est-à-dire si :*$\exists M \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Dans ce cas : $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant k$.
- *f admet un maximum relatif (ou local) en x_0 de $\mathcal{D}$ s'il existe un voisinage V de x_0, tel que :* $\forall x \in V,\ f(x) \leqslant f(x_0)$.
- *f admet un minimum relatif (ou local) en x_0 de $\mathcal{D}$ s'il existe un voisinage V de x_0, tel que :* $\forall x \in V,\ f(x_0) \leqslant f(x)$.

1.14 Opérations sur les fonctions

Définition 1.16. *Soient* f *et* g *deux fonctions définies sur le même ensemble* $\mathcal{D}$.
Somme *La fonction* $f+g$ *est définie sur* $\mathcal{D}$ *par :* $\forall x \in \mathcal{D},\ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
Produit *La fonction* $f \times g$ *est définie sur* $\mathcal{D}$ *par :* $\forall x \in \mathcal{D},\ (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$.
Produit par un scalaire *Soit* λ *un réel. La fonction* λf *est définie sur* $\mathcal{D}$ *par :* $\forall x \in \mathcal{D},\ (\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$.
Inverse *On appelle zéro d'une fonction* f *tout réel* x *de* $\mathcal{D}$ *tel que* $f(x) = 0$.
Soit A *l'ensemble des zéros de* f. $(A = f^{-1}(0))$.
La fonction $\frac{1}{f}$ *est définie sur* $\mathcal{D} - A$ *par :* $\forall x \in \mathcal{D} - A,\ \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$.
Quotient *La fonction* $\frac{g}{f}$ *est définie sur* $\mathcal{D} - A$ *par :* $\forall x \in \mathcal{D} - A,\ \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$.
Composée ou produit de composition
Soit f *une fonction définie sur* D_f *telle que* g *soit définie sur* $f(D_f)$ *(donc :* $f(D_f) \subset D_g$*).*
On définit la fonction $g \circ f$ *par :* $\forall x \in D_f,\ (g \circ f)(x) = g[f(x)]$.
Le produit de composition n'est pas une opération commutative car en général : $g \circ f \neq f \circ g$.
Par contre, ce produit est associatif :
Si $h \circ (g \circ f)$ *existe, alors :* $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$.

☞ **Remarque** : Si f est bijective de A sur B, $f^{-1} \circ f = Id_A$ et $f \circ f^{-1} = Id_B$.
f est une involution de A si et seulement si : $f \circ f = Id_A$.

1.15 Exercices

Exercice 50. Montrer qu'un application strictement monotone sur un intervalle I est injective de I dans $\mathbb{R}$.

Exercice 51. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$, où a, b,c et d sont des réels tels que : • $c \neq 0$
• $ad - bc \neq 0$
est bijective d'un ensemble A sur un ensemble B à déterminer. Expliciter alors $(f_{/A})^{-1}$.

Exercice 52. Soit $f : x \mapsto x^2 + 4x - 3$. Montrer que $f_{/]-\infty;-2]}$ et $f_{/[-2;+\infty[}$ sont des bijections sur des ensembles à définir. Préciser dans chaque cas l'application réciproque de ces restrictions.

Exercice 53. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{|x-1|-3}$. Déterminer son ensemble de définition et son image.
Même question avec $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin \pi x}$.

Exercice 54. Préciser si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives de A sur B à déterminer.
$f : x \mapsto \sqrt{x+3}$; $\quad g : x \mapsto \sqrt{x^2+2x}$; $\quad h : x \mapsto |x-1| + |x+2| + 3x - 1$.

Exercice 55. Montrer que la fonction sinus est T-périodique si et seulement si $\cos T = 1$ et $\sin T = 0$.

Exercice 56. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x - E(x)$ est 1-périodique et que l'ensemble de ses périodes est $\mathbb{Z}$.

Exercice 57. On appelle fonction caractéristique d'une partie A de $\mathbb{R}$ l'application χ_A définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in A, \chi_A(x) = & 1 \\ \forall x \notin A, \chi_A(x) = & 0 \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des périodes de la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{Q}$.

Exercice 58. Soit C la courbe d'équation $x^2 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}y - y^2 + \sqrt{3}x + y + 1 = 0$ dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. On considère le repère $(O;\vec{I};\vec{J})$ déduit du premier repère par la rotation de centre O et d'angle $\theta[2\pi]$.

1. Exprimer $\vec{I}$ et $\vec{J}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$, puis les coordonnées $(x;y)$ d'un point M dans le premier repère en fonction des coordonnées $(X;Y)$ du point M dans le second repère.

2. Justifier que l'équation de C dans le second repère est :
   $X^2\left(\cos 2\theta - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2\theta\right) + Y^2\left(-\cos 2\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2\theta\right) + XY\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos 2\theta - 2\sin 2\theta\right) + X(\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta) + Y(-\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta) + 1 = 0$.
3. En déduire que cette équation peut se mettre sous la forme $aXY + bX + cY + d = 0$ si et seulement si $\tan 2\theta = \sqrt{3}$.
   En déduire dans ce cas une valeur de θ et l'équation de C dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$.
4. Reconnaître C et montrer qu'elle a un centre de symétrie dont on donnera les coordonnées dans le premier repère.

Exercice 59. Soit f et g deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par $f : x \mapsto 2x$ et $g : \begin{cases} x \mapsto \frac{x}{2} \text{ si } x \text{ est pair} \\ x \mapsto 0 \text{ si } x \text{ est impair} \end{cases}$

1. f est-elle injective ? est-elle surjective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$?
2. g est-elle injective ? est-elle surjective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$?
3. Déterminer $g \circ f$.
   En déduire que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ n'implique pas que f est bijective , ni que $f^{-1} = g$.
4. Montrer que si f est une application de A dans B, g une application de B dans A telles que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_B$, alors f est bijective de A sur B et $f^{-1} = g$.

Exercice 60. Soit $f : x \mapsto |x-3| + |x+3| - x^2$. Montrer que f est paire, majorée et non minorée.

Exercice 61. Montrer que la courbe d'équation d'équation $y = 9x^5 + 15x^4 + 12x^3 + \frac{16}{3}x^2 + \frac{38}{9}x + \frac{47}{27}$ admet un centre de symétrie.

Exercice 62. Etudier les fonctions suivantes et tracer leur courbe représentative :
$f : x \mapsto (-1)^{E(x)}(x - E(x))$, $g : x \mapsto E(x^2)$ et $f : x \mapsto E\left(\frac{1}{x}\right)$.

2 Limite d'une fonction. Continuité

2.1 Limite finie en un point x_0 de $\mathbb{R}$

2.1.1 Définitions

Soit f une fonction définie au moins sur un ensemble $\mathcal{D}$ de la forme $]x_0 - h; x_0 + h[$ ou $]x_0 - h; x_0[$ ou $]x_0 - h; x_0[\cup]x_0; x_0 + h[$ ou $[x_0; x_0 + h[$ ou $]x_0 - h; x_0[$ ou $]x_0; x_0 + h[$ où h est un réel strictement positif.

Définition 2.1. *Un tel ensemble $\mathcal{D}$ est appelé voisinage de x_0.*

Un intervalle I est par conséquent un voisinage du réel x_0 s'i est de la forme : $]x_0 - h; x_0 + h[$ ou $]x_0 - h; x_0[$ ou $[x_0; x_0 + h[$ ou $]x_0 - h; x_0[$ ou $]x_0; x_0 + h[$ où h est un réel strictement positif.

Définition 2.2. *On dit que f a pour limite le réel ℓ en x_0 si $|f(x) - \ell|$ peut être rendu aussi petit que l'on veut lorsque x se rapproche de x_0, c'est-à-dire lorsque $|x - x_0|$ est suffisamment petit. Autrement dit :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathcal{D},\ |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ *ou* $\lim\limits_{x_0} f(x) = \ell$ *ou* $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$

2.1.2 Propriétés

Théorème 2.1. *Les fonctions $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ ont pour limite 0 en 0.*

Proposition 2.1. *1. Si f a une limite en x_0, cette limite est unique.*

2. Si $\lim\limits_{x_0} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x_0} |f(x)| = |\ell|$.

La réciproque est fausse ! Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$. f est définie sur $D = \mathbb{R} - \{1\}$ et $\forall x \in \mathcal{D}$, $|f(x)| = |x+1|$.

Donc $\lim\limits_{1} |f| = 2$ mais f n'a pas de limite en 1.

3. Si f a une limite finie en x_0, f est bornée au voisinage de x_0.

4. Si f a une limite finie ℓ ***non nulle*** *en x_0, f garde un signe constant au voisinage de x_0 qui est le signe de ℓ.*

☞ **Remarque fondamentale** :
Il n'est pas nécessaire que f soit définie en x_0 pour avoir une limite finie en x_0.

Exemple 2.1. $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x}$: *f n'est pas définie en 0 mais $\lim\limits_{0} f = 0$.*
Par contre, si f est définie en x_0 et si f possède une limite finie ℓ en x_0, alors nécessairement : $\ell = f(x_0)$.
On dit alors que f est ***continue*** *en x_0.*

Théorème 2.2. ***Théorèmes de comparaison***

1. ***Théorème des gendarmes*** *S'il existe deux fonctions g et h de même limite finie ℓ en x_0, et si :*

$$\forall x \in \mathcal{D},\ g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x),$$

alors f a une limite finie en x_0 et : $\lim\limits_{x_0} f = \ell$.

2. Si f et g sont deux fonctions telles que :

$$\forall x \in \mathcal{D},\ f(x) < g(x) \qquad \text{et } \lim_{x_0} f = \ell \qquad \text{et } \lim_{x_0} g = \ell',$$

alors $\ell \leqslant \ell'$.

☞ **Remarquer qu'il y a affaiblissement des inégalités : l'inégalité concernant les fonction est stricte ; alors que celle concernant les limites est faible.**

2.1.3 Exemples de fonctions continues

1. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^+$.
   (a) Si $x_0 = 0$, $\lim\limits_{0} \sqrt{x} = 0 = f(0)$: f est continue en 0.
   (b) Soit $x_0 > 0$. f est définie sur un intervalle I de la forme $]x_0 - h; x_0 + h[$, h étant un réel strictement positif.
   Par exemple, f est définie sur $\left]\dfrac{x_0}{2}; \dfrac{3x_0}{2}\right[$ en ayant posé $h = \dfrac{x_0}{2}$.
   $$\forall x \in I,\ |f(x) - f(x_0)| = \frac{|x - x_0|}{|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}|} < \frac{|x - x_0|}{|\sqrt{x_0}|}.$$
   Or : $\lim\limits_{x_0} \dfrac{|x - x_0|}{|\sqrt{x_0}|} = 0$, donc $\lim\limits_{x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0} = f(x_0)$.
2. La fonction $f : x \mapsto \sin x$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
   (a) Soit $x_0 = 0$.
   $$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[,\ 0 \leqslant |\sin x| \leqslant |x|.$$
   Donc $\lim\limits_{0} \sin x = 0 = f(0)$: f est continue en 0.

(b) Soit $x_0 \neq 0$. f est définie sur un intervalle I de la forme $]x_0-h;x_0+h[$, h étant un réel strictement positif.

$$\forall x \in I,\ |f(x)-f(x_0)| = 2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|.$$

Or, $\lim\limits_{x_0}\left|\sin\dfrac{x-x_0}{2}\right| = 0$ car la fonction sinus est continue en 0. Donc : $\lim\limits_{x_0}\sin x = \sin x_0 = f(x_0)$.

3. Une fonction polynôme $f : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, avec $a_n \neq 0$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. f est définie sur un intervalle I de la forme $]x_0-h;x_0+h[$, h étant un réel strictement positif fixé.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)-f(x_0)| = |(x-x_0)g(x)|$, où g est une fonction polynôme de degré $n-1$. Posons par exemple :

$$g : x \mapsto a_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1.$$

Il existe deux réels m et M tels que :
- $\forall x \in I$, $|x| \leqslant m$
- et, via l'inégalité triangulaire :

$$\forall x \in I, |g(x)| \leqslant |a_n||x^{n-1}| + |b_{n-1}||x^{n-2}| + \cdots + |b_2||x| + |b_1| \leqslant M.$$

Donc : $\forall x \in I, 0 \leqslant |f(x)-f(x_0)| \leqslant M|x-x_0|$ et par conséquent : $\lim\limits_{x_0} f(x) = f(x)$.

☞ **Remarques :** $m = |x_0 + h|$. Le réel M est fonction de m et des coefficients de g.

2.1.4 Prolongement par continuité

Définition 2.3. *Si f n'est pas définie en x_0 et si f possède une limite finie ℓ en x_0, on peut alors prolonger f en x_0 en définissant la fonction g par :*

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ g(x) = f(x) \qquad \textit{et} \qquad g(x_0) = \ell.$$

g est continue en x_0 car : $\lim\limits_{x_0} g = \lim\limits_{x_0} f = \ell = g(x_0)$.
g est le prolongement par continuité de f en x_0.

Exemple 2.2. *La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ se prolonge par continuité en 0. En effet :*
$\forall x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$ *, donc :*
$\forall x \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $1 \leqslant \dfrac{x}{\sin x} \leqslant \dfrac{1}{\cos x}$ *et par parité :* $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, $1 \leqslant \dfrac{x}{\sin x} \leqslant \dfrac{1}{\cos x}$.
Par conséquent : $\lim\limits_{0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.
Le prolongement par continuité en 0 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad \textit{et} \qquad g(0) = 1.$$

2.2 Limite à droite en un point x_0 de $\mathbb{R}$. Limite à gauche en x_0

2.2.1 Définitions

Définition 2.4. *On dit que f a pour limite à droite en x_0 le nombre réel ℓ si la restriction de f à $\mathcal{D}\cap]x_0;+\infty[$ a pour limite ℓ en x_0.*
On note alors $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$ *ou* $\lim\limits_{x_0^+} f(x) = \ell$ *ou* $f(x) \underset{x\to x_0^+}{\longrightarrow} \ell$ *ou* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$.

☞ **Remarque importante** Si f est définie en x_0, on n'a pas nécessairement $\ell = f(x_0)$.

Définition 2.5. • *Si* f *est définie en* x_0 *et si* $\lim\limits_{x_0^+} f = f(x_0)$, *on dit que* f *est continue à droite de* x_0.

• *Si* f *est définie en* x_0 *et si* $\lim\limits_{x_0^+} f \neq f(x_0)$, *on dit que* f *n'est pas continue à droite de* x_0.

Définition 2.6. *On dit que* f *a pour limite à gauche en* x_0 *le nombre réel* ℓ *si la restriction de* f *à* $\mathcal{D} \cap]-\infty ; x_0[$ *a pour limite* ℓ *en* x_0.
On note alors $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ *ou* $\lim\limits_{x_0^-} f(x) = \ell$ *ou* $f(x) \underset{x \to x_0^-}{\longrightarrow} \ell$ *ou* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$.

Exemple 2.3. $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0 \neq f(1)$. *La fonction partie entière n'est donc pas continue à gauche de 1.*

Définition 2.7. • *Si* f *est définie en* x_0 *et si* $\lim\limits_{x_0^-} f = f(x_0)$, *on dit que* f *est continue à gauche de* x_0.

• *Si* f *est définie en* x_0 *et si* $\lim\limits_{x_0^-} f \neq f(x_0)$, *on dit que* f *n'est pas continue à gauche de* x_0.

2.2.2 Prolongement par continuité à gauche ou à droite

Exemple 2.4. *Soit* $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|}$. *La fonction* f *est définie sur* $\mathbb{R} - \{1\}$.

Ecrivons $f(x)$ *sans employer les valeurs absolues :* $\begin{cases} f(x) = -x - 1 \text{ si } x < 1 \\ f(x) = x + 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{1^-} f = -2$ *et* $\lim\limits_{1^+} f = 2$.
Il est donc possible de définir :
• *le prolongement par continuité à gauche* g_1 *de* f *:*
$g_1 : \begin{cases} g_1(x) = -x - 1 \text{ si } x < 1 \\ g_1(x) = x + 1 \text{ si } x > 1 \\ g_1(1) = -2 \end{cases}$ *que l'on peut aussi écrire* $g_1 : \begin{cases} g_1(x) = -x - 1 \text{ si } x \leqslant 1 \\ g_1(x) = x + 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$
• *le prolongement par continuité à droite* g_2 *de* f *:*
$g_2 : \begin{cases} g_2(x) = -x + 1 \text{ si } x < 1 \\ g_2(x) = x + 1 \text{ si } x > 1 \\ g_2(1) = 2 \end{cases}$ *que l'on peut aussi écrire* $g_2 : \begin{cases} g_2(x) = -x - 1 \text{ si } x < 1 \\ g_2(x) = x + 1 \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$

Théorème 2.3. *Si* f *n'est pas définie en* x_0 *:*

$$\lim_{x_0} f = \ell \Leftrightarrow \lim_{x_0^-} f = \lim_{x_0^+} f = \ell.$$

Théorème 2.4. *Si* f *est définie en* x_0 *:*
- *si* $\lim_{x_0^+} f \neq \lim_{x_0^-} f$, f *n'a pas de limite en* x_0.
- *si* $\lim_{x_0^+} f = \lim_{x_0^-} f = \ell \neq f(x_0)$, f *n'a pas de limite en* x_0.
- *si* $\lim_{x_0^+} f = \lim_{x_0^-} f, = f(x_0)$, f *a une limite en* x_0 *qui est égale à* $f(x_0)$ *et donc est continue en* x_0.

Définition 2.8. *On dit qu'une fonction* f *est continue sur un intervalle* I *si elle est continue en tout point de* I.

3 Extension de la notion de limite

3.1 Limite finie d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$

3.1.1 Définitions

Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ avec $a > 0$ (resp. sur $]-\infty;b[$ avec $b < 0$).

Définition 3.1. f *a pour limite le réel* ℓ *en* $+\infty$ *(resp. vers* $-\infty$*) si le réel* $|f(x) - \ell|$ *peut être rendu aussi petit que l'on veut lorsque* x *tend vers* $+\infty$ *(resp. vers* $-\infty$*), c'est-à-dire si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in]a;+\infty[,\ [x > A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon].$$

resp :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in]-\infty;b[,\ [x < -A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon].$$

On note alors :
- *Pour les limites en* $+\infty$ *:* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ *ou* $\lim_{+\infty} f(x) = \ell$ *ou* $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.
- *Pour les limites en* $-\infty$ *:* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ *ou* $\lim_{-\infty} f(x) = \ell$ *ou* $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \ell$.

☞ **Remarque** Nous avons les définitions équivalentes :
f a pour limite le réel ℓ en $+\infty$ (resp. vers $-\infty$) si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in]a;+\infty[,\ [x > A \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon].$$

resp :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in]-\infty;b[,\ [x < -A \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon].$$

Théorème 3.1.
- *Les fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$ *ont pour limite 0 en* $+\infty$ *et en* $-\infty$.
- *La fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ *a pour limite 0 en* $+\infty$.

Démonstration . *Claire* ♢

3.1.2 Propriétés

Théorème 3.2. ***Théorème de comparaison*** *S'il existe un réel A strictement positif, un réel ℓ et une fonction ϕ de limite nulle en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) tels que :*

$$\forall x \in]a;+\infty[,\ [x > A \Longrightarrow |f(x)-\ell| < \phi(x)]$$

resp :

$$\forall x \in]-\infty;b[,\ [x < -A \Longrightarrow |f(x)-\ell| < \phi(x)]$$

alors f a pour limite ℓ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

Exemple 3.1. *Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$. La fonction sinus n'a pas de limite ni en $+\infty$ ni en $-\infty$ mais :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ |f(x)| \leqslant \frac{1}{|x|}.$$

Ceci permet de conclure que f possède une limite en $+\infty$ ainsi qu'une limite en $-\infty$ avec :

$$\lim_{-\infty} f = 0 \text{ et } \lim_{+\infty} f = 0.$$

Théorème 3.3.

1. *Une fonction croissante et majorée sur $]a;+\infty[$ avec $a > 0$ possède une limite finie en $+\infty$*
2. *Une fonction décroissante et minoré sur $]a;+\infty[$ avec $a > 0$ possède une limite finie en $+\infty$*
3. *Une fonction croissante et minorée sur $]-\infty;b[$ avec $b < 0$ possède une limite finie en $-\infty$*
4. *Une fonction décroissante et majorée sur $]-\infty;b[$ avec $b < 0$ possède une limite finie en $-\infty$*

3.2 Fonction de limite $+\infty$ en x_0, à droite en x_0, à gauche en x_0

Soit f une fonction définie au moins sur un ensemble $\mathcal{D}$ de la forme $]x_0-h;x_0+h[$ ou $]x_0-h;x_0[$ ou $]x_0-h;x_0[\cup]x_0;x_0+h[$ ou $[x_0;x_0+h[$ ou $]x_0-h;x_0[$ ou $]x_0;x_0+h[$ où h est un réel strictement positif, **sauf en** x_0.

Définition 3.2.

1. *On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut lorsque $|x-x_0|$ est suffisamment petit, c'est-à-dire si :*

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D},\ [|x-x_0| < \alpha \Longrightarrow f(x) > A]$$

On note alors $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty$.

2. *On dit que f admet $+\infty$ pour limite à droite en x_0 (resp. à gauche de x_0) si la restriction de f à $]x_0;+\infty[$ (resp.à $]-\infty;x_0[$) a pour limite $+\infty$ en x_0.*
On note alors pour la limite à droite en x_0 :
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim\limits_{x_0^+} f(x) = +\infty$ *ou* $f(x) \underset{x\to x_0^+}{\longrightarrow} +\infty$ *ou* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty.$

3.3 Fonction de limite $-\infty$ en x_0, à droite en x_0, à gauche en x_0

Soit f une fonction définie au moins sur un ensemble $\mathcal{D}$ de la forme $]x_0-h;x_0+h[$ ou $]x_0-h;x_0[$ ou $]x_0-h;x_0[\cup]x_0;x_0+h[$ ou $[x_0;x_0+h[$ ou $]x_0-h;x_0[$ ou $]x_0;x_0+h[$ où h est un réel strictement positif, **sauf en** x_0.

Définition 3.3. 1. *On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si $f(x)$ peut être rendu aussi petit que l'on veut lorsque $|x-x_0|$ est suffisamment petit, c'est-à-dire si :*

$$\forall A>0,\ \exists \alpha>0, \forall x \in \mathcal{D},\ [|x-x_0|<\alpha \Longrightarrow f(x)<-A]$$

On note alors $\lim\limits_{x_0} f=-\infty$ *ou* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ *ou* $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} -\infty$.

2. *On dit que f admet $-\infty$ pour limite à droite en x_0 (resp. à gauche de x_0) si la restriction de f à $]x_0;+\infty[$ (resp.à $]-\infty;x_0[$) a pour limite ∞ en x_0.*

On note alors pour la limite à droite en x_0 :

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$ *ou* $\lim\limits_{x_0^+} f(x)=-\infty$ *ou* $f(x) \underset{x\to x_0^+}{\longrightarrow} -\infty$ *ou* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=-\infty$.

et pour la limite à gauche : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$ *ou* $\lim\limits_{x_0^-} f(x)=-\infty$ *ou* $f(x) \underset{x\to x_0^-}{\longrightarrow} -\infty$ *ou* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=-\infty$.

Théorème 3.4. f *admet $-\infty$ pour limite à droite en x_0 si et seulement si $-f$ admet $+\infty$ pour limite à droite en x_0.*

3.4 Fonction de limite $+\infty$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$)

Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ avec $a>0$ (resp. sur $]-\infty;b[$ avec $b<0$).

Définition 3.4. *On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (resp. en $]-\infty[$) si $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut lorsque x est suffisamment grand (resp. petit), c'es-à-dire si :*

$$\forall A>0, \exists B>0, \forall x>a, [x>B \Longrightarrow f(x)>A]$$

resp :

$$\forall A>0, \exists B>0, \forall x<b, [x<-B \Longrightarrow f(x)>A]$$

Les notations suivent ici aussi le même modéle que précédemment : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$...

Théorème 3.5. *Les fonctions $x\mapsto x^n$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\mapsto\sqrt{x}$ ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.*

3.5 Fonction de limite $-\infty$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$)

Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ avec $a>0$ (resp. sur $]-\infty;b[$ avec $b<0$).

Définition 3.5. *On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si $f(x)$ peut être rendu aussi petit que l'on veut lorsque x est suffisamment grand (resp. petit), c'es-à-dire si :*

$$\forall A>0, \exists B>0, \forall x>a, [x>B \Longrightarrow f(x)<-A]$$

resp :

$$\forall A>0, \exists B>0, \forall x<b, [x<-B \Longrightarrow f(x)<-A]$$

Théorème 3.6. f *admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$ si et seulement si $-f$ admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$.*

3.6 Propriétés des limites infinies

Théorème 3.7. ***Théorèmes de comparaison***

1. *S'il existe une fonction* g *telle que :*
   - *il existe un voisinage de* x_0 *(ou de* $-\infty$ *ou de* $+\infty$*) sur lequel on ait :* $f > g$ *ou* $f \geqslant g$
   - $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$ *(resp.* $\lim\limits_{-\infty} g = +\infty$ *)*

   Alors f *a pour limite* $+\infty$ *en* x_0 *(ou en* $-\infty$ *ou en* $+\infty$*).*
2. *S'il existe une fonction* g *telle que :*
   - *il existe un voisinage de* x_0 *(ou de* $-\infty$ *ou de* $+\infty$*) sur lequel on ait :* $f < g$ *ou* $f \leqslant g$
   - $\lim\limits_{x_0} g = -\infty$ *(resp.* $\lim\limits_{-\infty} g = -\infty$

   Alors f *a pour limite* $-\infty$ *en* x_0 *(ou en* $-\infty$ *ou en* $+\infty$*).*

Théorème 3.8. 1. *Une fonction croissante et non majorée sur* $]a; +\infty[$, $a > 0$ *a pour limite* $+\infty$ *en* $+\infty$.

2. *Une fonction croissante et non majorée sur* $]a; b[$ *admet* $+\infty$ *à gauche en* b
3. *Une fonction décroissante et non minorée sur* $]a; +\infty[$, $a > 0$ *a pour limite* $-\infty$ *en* $+\infty$
4. *Une fonction décroissante et non minorée sur* $]a; b[$ *admet* $-\infty$ *pour limite à gauche en* b

4 Opérations sur les limites

Les tableaux suivants sont valables pour les limites en x_0, à droite et à gauche en x_0, en $+\infty$ et en $-\infty$.

Somme

lim f	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
lim g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
lim (f+g)	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Produit

lim f	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$\ell = 0$	$\ell = 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
lim g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
lim (fg)	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	?	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Inverse

lim f	$\ell \neq 0$	0 et $f > 0$	0 et $f < 0$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$

Quotient

lim f	ℓ	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\varepsilon\infty$	$\varepsilon\infty$ $\varepsilon \in \{-1; 1\}$	$\varepsilon \in \{-1; 1\}$
lim g	$\ell' \neq 0$	0 et $g > 0$ au voisinage de x_0	0 et $g < 0$ au voisinage de x_0	$\pm\infty$	0	0 et $g > 0$	0 et $g < 0$ au voisinage de x_0	au voisinage de x_0
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$	F.I	F.I	$\varepsilon\infty$	$-\varepsilon\infty$	

Sixième partie
Dérivation

Dans tout ce qui suit, f désigne une fonction définie sur un intervalle I voisinage d'un réel x_0, contenant x_0.

1 Dérivée en un point. Fonction dérivable

1.1 Définitions

1.1.1 Développement limité d'ordre 1

Définition 1.1. *Une fonction f admet un développement limité d'ordre 1 au point x_0 s'il existe un réel A et une fonction ε définie sur I tels que :*

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x), \qquad \textit{avec} \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Ce qui peut s'écrire aussi en posant $x = x_0 + h$:
$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + h\varepsilon(h)$ *avec* $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Définition 1.2. *L'application affine $x \mapsto f(x_0) + A(x - x_0)$ est appelée fonction tangente à f en x_0.*

Exemple 1.1. • $f : x \mapsto x^2$ *admet un développement limité à l'ordre 1 en 2 , car :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2) + 4(x - 2) + (x - 2)(x - 2).$$

Donc ici : $A = 4$ *et* $\varepsilon : x \mapsto x - 2$. *La fonction tangente correspondante est* $x \mapsto 4x - 4$.
• *Toute fonction affine* $f : x \mapsto ax + b$ *possède un développement limité d'ordre 1 en tout point* x_0 *de* $\mathbb{R}$ *:*
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$.
Donc ici : $A = a$ *et* $\varepsilon : x \mapsto 0$.
• *La fonction* $x \mapsto \sqrt{x}$ *ne possède pas de développement limité à l'ordre 1 en 0.*
En effet, nous aurions : $\exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in]0; +\infty[, \ \sqrt{x} = Ax + x\varepsilon(x)$, *soit :*

$$\forall x > 0, \quad \varepsilon(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} - A\cdot$$

Et donc dans ce cas : $\lim\limits_{x \to 0^+} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} - A = +\infty$, *ce qui contredit donc la définition de* ε.

☞ **Remarque : Exemple d'un développement d'ordre 2**

Soit ε la fonction définie par $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, & \varepsilon(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2} - \dfrac{1}{2} \\ \varepsilon(0) = 0 \end{cases}$

Cette fonction possède une limite nulle en 0 car $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}\cdot$ Elle est donc continue en 0 et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Cette égalité est le développement limité d'ordre 2 de la fonction cosinus en 0, car l'exposant de $(x - x_0)$ dans le dernier terme est égal à 2.

1.1.2 Fonction différentiable- Nombre dérivé

Définition 1.3. *Une fonction* f *est différentiable-ou dérivable- en* x_0 *si et seulement si la fonction* $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *possède une limite finie en* x_0.

Théorème 1.1. *La fonction* f *est différentiable en* x_0 *si et seulement si elle y admet un développement limité d'ordre 1.*

Démonstration . *Si* f *est dérivable en* x_0*, alors :*

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x), \qquad \text{avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

soit : $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A + \varepsilon(x)$ *et donc :* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A$. ♢

1.2 Fonction dérivée

Définition 1.4. *On dit qu'une fonction* f *est dérivable sur un intervalle ouvert* I *si et seulement si elle est dérivable en tout point de* I.
On appelle alors fonction dérivée de f *et on note* f'*, l'application de* I *vers* $\mathbb{R}$*, qui à tout réel* x *de* I *associe le nombre dérivé au point* x *:*

$$f' : \quad \begin{aligned} I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

Notation différentielle : On note aussi : $f' = \dfrac{df}{dx}$.

Définition 1.5. *On dit qu'une fonction* f *est dérivable sur un intervalle* $[a;b]$ *si et seulement si elle est dérivable sur* $]a;b[$*, dérivable à droite au point* a *et dérivable à gauche au point* b.

Exemple 1.2. • *Toute fonction polynomiale est dérivable sur* $\mathbb{R}$.
• *Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur* $\mathbb{R}$.
• *La fonction valeur absolue est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et sur* $\mathbb{R}_-^*$.
• *La fonction racine carrée est dérivable sur* $]0;+\infty[$.
• *Une fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle sur lequel elle est définie.*

Théorème 1.2. *Toute fonction dérivable continue sur un intervalle* I *y est continue.*

☞ **Remarque** : La réciproque est fausse! La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'y est pas dérivable!

2 Dérivée d'une fonction réciproque

Nous admettrons le théorème suivant :

Théorème 2.1. *Soit* f *une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle]a ;b[.*
Sa fonction réciproque f^{-1} *est dérivable en tout point* $y_0 = f(x_0)$ *de* $f <]a; b[>$ *tel que* $f'(x_0) \neq 0$ *et :*

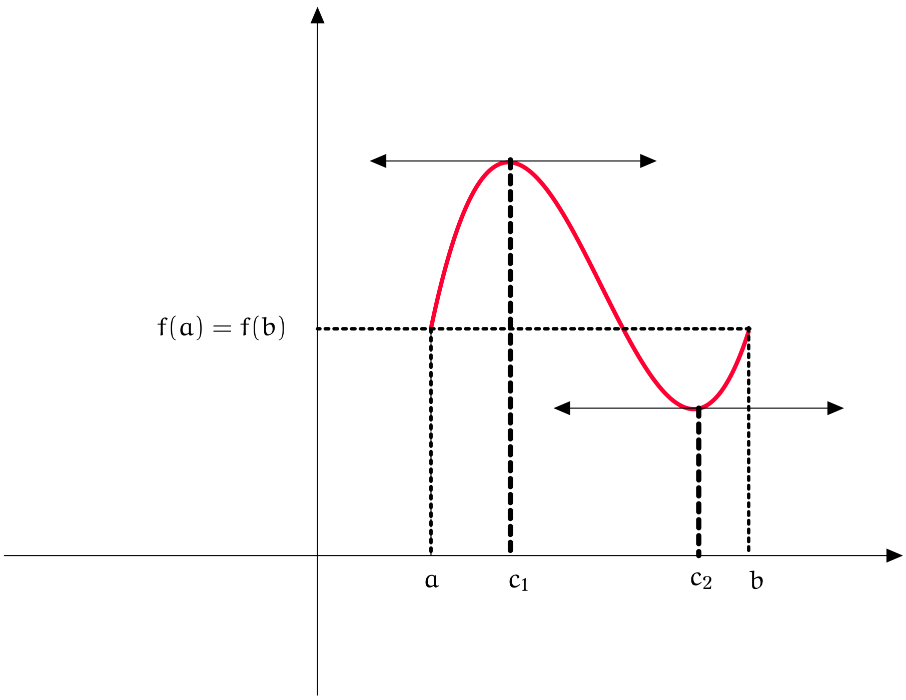
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

☞ **Remarque** Si $f'(x_0) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en y_0 mais la courbe représentative de f^{-1} possède une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(y_0; f^{-1}(y_0))$.
Afin d'étudier l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} il convient donc dans l'ordre :
• De résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
• De déterminer l'image par f des solutions ainsi trouvées.
f^{-1} est alors dérivable sur l'intervalle $f <]a; b[>$ dont on aura exclu les images trouvées ci-dessus.

3 Accroissements finis

3.1 Théorème de Rolle

Théorème 3.1. *Soit f une fonction définie sur intervalle [a ;b] avec a < b, telle que :*
• continue sur [a ;b] ;
• dérivable sur]a ;b[;
• f(a)= f(b).
Alors, il existe un réel c de]a ;b[tel que f'(c) =0.



☞ **Remarque** : Ce théorème assure l'existence mais pas l'unicité d'un tel réel comme le montre la figure ci-dessus.

3.2 Inégalité des accroissements finis

Théorème 3.2. *Soit* f *une fonction dérivable sur un intervalle* I*. S'il existe deux réels* m *et* M *tels que* $m \leqslant f' \leqslant M$ *sur* I*, alors pour tous réels* a *et* b *de* I *avec* $a \leqslant b$ *:*

$$m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a).$$

Démonstration . *Soit* g *la fonction définie sur* I *par* $g(x) = Mx - f(x)$. *Alors* g *est dérivable sur* I *et pour tout* x *de* I *:* $g'(x) = M - f'(x)$. *La fonction* g' *est donc positive sur* I.
La fonction g *est donc croissante sur* I *:*

$$\forall (a,b) \in I^2, a \leqslant b \Longrightarrow g(a) \leqslant g(b).$$

Ce qui implique :

$$\forall (a,b) \in I^2, a \leqslant b \Longrightarrow Ma - f(a) \leqslant Mb - f(b),$$

et donc finalement :

$$\forall (a,b) \in I^2, a \leqslant b \Longrightarrow f(a) - f(b) \leqslant M(b-a).$$

L'autre inégalité se démontre de même en utilisant la fonction h *définie sur* I *par* $h(x) = mx - f(x)$. $\diamondsuit$

Corollaire Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. S'il existe un réel M tel que $|f'| \leqslant M$ sur I, alors :

$$\forall (a,b) \in I^2, |f(a) - f(b)| \leqslant M\,|b-a|\,.$$

Remarquons que l'inégalité est vraie, que $a \leqslant b$ ou $a \geqslant b$.

Exemple 3.1.

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, |\sin a - \sin b| \leqslant |b-a|\,.$$

3.3 Exercices

Exercice 63. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
On sait seulement que $f(0) = 0$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

1. Dresser le tableau de variation de f. En déduire le signe de f.
2. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant f'(x) \leqslant 1.$$
3. Soit x un réel positif. En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur $[0;x]$, montrer que $0 \leqslant f(x) \leqslant x$.

Exercice 64. Appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[10000; 10001]$ et en déduire un majorant de l'erreur commise en remplaçant $\sqrt{10001}$ par 100.

Exercice 65. Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Exercice 66. f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle $[b; +\infty[$ tel que :

$$\exists a > 0, \forall x \geqslant b, f'(x) \geqslant a.$$

1. Montrer que pour tout x de $[b; +\infty[$: $f(x) \geqslant a(x-b) + f(b)$.
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 67. Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{\dfrac{1}{u_n}}$.

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.
   (a) Déterminer f' et f''.
   (b) Etudier le sens de variation de f.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique L strictement positive. Justifier que $L \in]\frac{3}{2}; 2[$.
3. (a) Tracer, dans un repère orthonormé, la courbe représentative C de f.
   (b) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite u.

4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [\frac{3}{2}; 2]$.
   (b) Montrer que : $\forall x \in [\frac{3}{2}; 2], \frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}} \leqslant f'(x) \leqslant -\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}}$.
   (c) En déduire qu'il existe k dans $]0;1[$, tel que : $\forall x \in [\frac{3}{2}; 2], |f'(x)| \leqslant k$.
   (d) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $|u_{n+1} - L| \leqslant k\,|u_n - L|$.
   (e) Montrer que la suite u converge vers L.
   (f) Montrer, en utilisant les variations de f, que les réels $|u_{n+1} - L|$ et $|u_n - L|$ sont de signes contraires. En déduire que pour tout n entier naturel, L est compris entre u_n et u_{n+1}.
   En justifiant la méthode utilisée, donner une valeur approchée de L à 10^{-2} prés.

3.4 Une application de l'inégalité des accroissements finis : demi-tangentes à une courbe

Théorème 3.3. *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle [a ;b] (a<b) et dérivable sur]a ;b[. Si* f' *admet une limite finie à droite* ℓ *en a, alors f est dérivable à droite en a et :*

$$f'_d(a) = \ell$$

.

Démonstration . f' *admet une limite* ℓ *à droite de* a*, donc :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]a; b[, |x - a| < \alpha \Longrightarrow |f'(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Posons alors $b' = \inf(a; b - a)$. f' *est alors bornée sur* $]a; b'[$ *par* $\ell - \varepsilon$ *et* $\ell + \varepsilon$.
Il est donc possible d'appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction f *sur tout intervalle* $[a, x]$ *où* x *appartient à* $]a; b'[$. *Ce qui donne :*

$$\forall x \in]a; b'[, \ell - \varepsilon < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \ell + \varepsilon.$$

Au final nous avons donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists b' > 0, \forall x \in]a; b[, |x - a| < b' \Longrightarrow \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell \right| < \varepsilon.$$

c'est-à-dire :

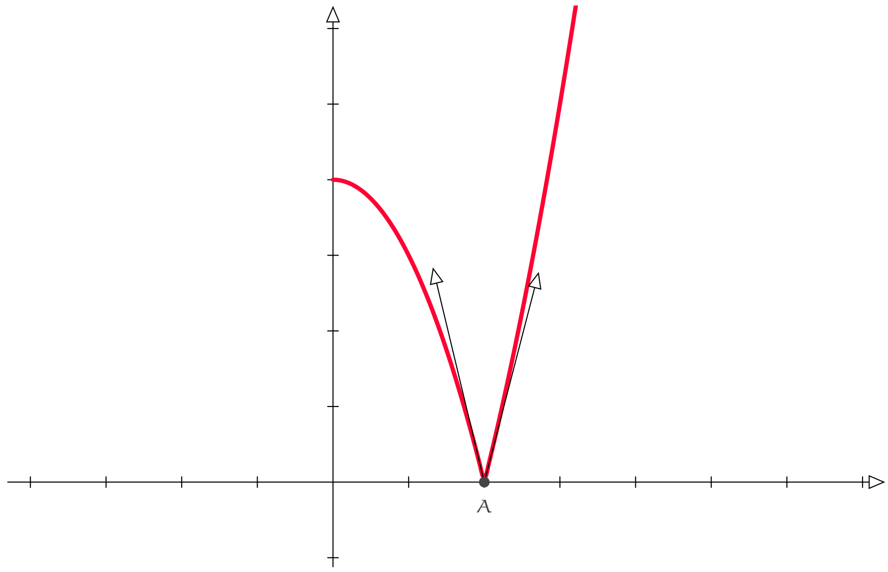
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell.$$

c'est ce qu'il fallait démontrer. $\diamondsuit$

Exemple 3.2. *f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $x \mapsto \left|x^2-4\right|$.*
Nous avons :

- $\forall x \in [0;2]$, $f(x) = 4 - x^2$ *et :* $\forall x \in [0;2[$, $f'(x) = -2x$. *Donc :* $\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = -4$.
- $\forall x \in [2;+\infty[$, $f(x) = x^2 - 4$ *et :* $\forall x \in [2;+\infty[$, $f'(x) = 2x$. *Donc :* $\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = 4$.

La courbe représentative de f *admet donc au point* $A(2;0)$ *une demi-tangente à gauche de coefficient directeur* -4 *et une demi-tangente à droite de coefficient directeur* 4 *.*
A est un point anguleux.



☞ **Remarque importante** La réciproque fausse, c'est-à-dire que f peut être dérivable en a sans que f' ne possède une limite en a.

Exemple 3.3. *Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par* $\begin{cases} f(x) &= x^2 \sin\dfrac{1}{x} \qquad \text{si}\, x \neq 0 \\ f(0) &= 0 \end{cases}$

f *est continue sur $\mathbb{R}$. Pour s'assurer de sa continuité en 0, qui seule pose problème, nous pouvons* ☞ *remarquer que :* $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $|f(x)| \leqslant x^2$, *ce qui implique que* f *a une limite égale à 0 en 0.*
D'autre par , f *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *et :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}\cdot$$

La fonction $x \mapsto 2x\sin\dfrac{1}{x}$ *possède une limite nulle en 0, alors que* $x \mapsto \sin\dfrac{1}{x}$ *n'en possède pas. Par conséquent,* f' *n'a pas de limite en 0.*
Par contre :

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \leqslant |x| \Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0.$$

Par conséquent f *est dérivable en 0 en* $f'(0) = 0$.

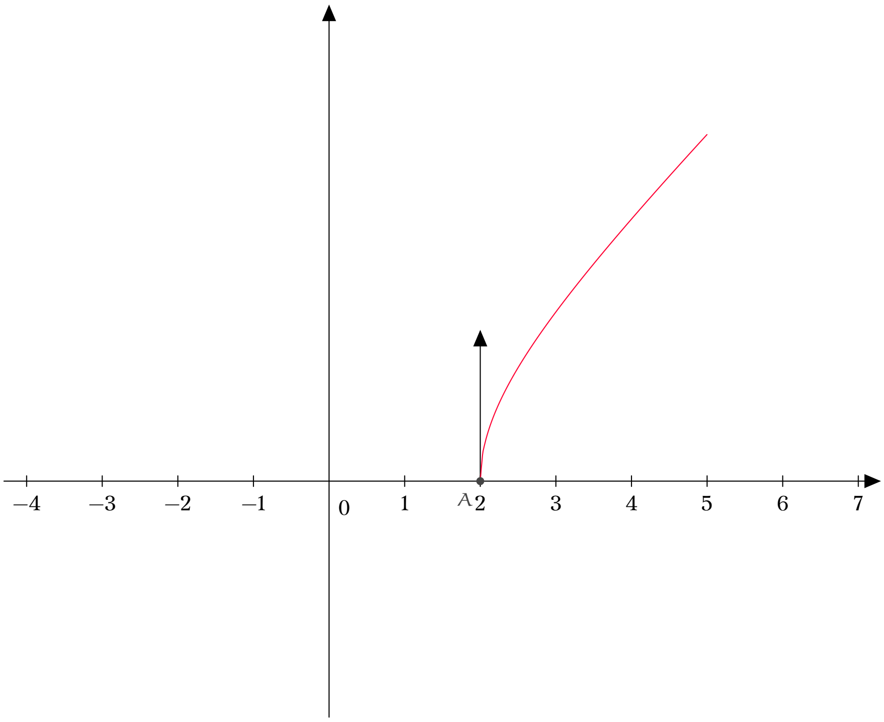
Nous admettrons le théorème suivant, analogue au théorème précédent :

Théorème 3.4. *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle [a ;b] (a<b) et dérivable sur]a ;b[. Si ' admet une limite infinie à droite en a, alors f est dérivable à droite en a et :*

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^+} f'(x).$$

Interprétation graphique
La courbe représentative de f possède au point $A(a;f(a))$ une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

En particulier, f n'est pas dérivable au point a.



Septième partie

Fonctions u^v

1 Présentation

L'objet de cette section est de définir sous forme de questions les fonctions de la forme u^v où u et v désignent deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Nous connaissons déjà les fonctions puissances de la forme $x \mapsto x^n$, n désignant un nombre entier relatif non nul.
En partant de la propriété :

$$\forall a > 0, a = e^{\ln a}$$

et en la généralisant, nous obtenons la définition suivante :

Définition 1.1. ***Soient u et v deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, u étant strictement positive sur I.***
La fonction u^v est définie par :

$$\forall x \in I, (u^v)(x) = u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}.$$

2 Fonctions puissances

Définition 2.1. *Soit α un réel donné. La fonction f_α est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

1. Etude de f_α.
   Suivant les valeurs de α, étudier :
   • la continuité de f_α (est-elle prolongeable par continuité en 0 ?) ;
   • sa dérivabilité (on déterminera l'expression de $f'_\alpha(x)$) ;
   • les variations de f_α ;
   • sa limite en $+\infty$ (on étudiera en particulier les branche infinies). Construire la courbe representative de f_α.
2. Montrer que pour tout α différent de 0, f_α admet une fonction réciproque à déterminer.

3 Fonctions exponentielles de base a

Définition 3.1. *a étant un réel strictement positif, on appelle fonction exponentielle de base a, la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = a^x = e^{x \ln a}.$$

1. Faire l'étude complète de f_a sur $\mathbb{R}$ (cf. question 2.2).
2. **Règles de calculs**
   Pour tous a et b réels strictement positifs et pour tous x et y réels, démontrer les égalités suivantes :
   $a^{x+y} = a^x a^y \qquad a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y} \qquad a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} \qquad (a^x)^y = a^{xy} \qquad \dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$
3. Déterminer la limite en $+\infty$ du quotient $\dfrac{a^x}{x^\alpha}$, a étant un réel strictement positif et α étant un réel quelconque.

4 Autres fonctions

Etudier les fonctions suivantes

1. $f : x \mapsto x^x$. Justifier la notation $0^0 = 1$.
2. $f : x \mapsto (\ln x)^x$.

5 Exercices

Exercice 68. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(x+1))^x$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^n}{e^{px}}$, n et p étant des rationnels positifs.

Exercice 69. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \left(1 - \dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Etudier la limite de f en 1.
3. Montrer que $\ln f(x) = \frac{1}{x}(\ln(1+h(x))$, avec :
$$h(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln\frac{1}{x}}.$$
4. Etudier la limite de h en 0. En déduire la limite en 0 de $\ln f(x)$ puis celle de f.

Exercice 70.

1. Démontrer que, quels que soient les réels positifs a et b, et quel que soit l'entier naturel non nul p :
$$(a-b) = (a^{\frac{1}{p}} - b^{\frac{1}{p}})(\sum_{k=1}^{p} a^{\frac{p-k}{p}} b^{\frac{k-1}{p}}).$$
2. Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = x\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{p}} - 1\right].$$
Etudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. Soit, pour n entier naturel supérieur à 2, la fonction f_n définie par :
$$f_n(x) = \frac{(\sqrt{\cos x}-1)(\sqrt[3]{\cos x}-1)\dots(\sqrt[n]{\cos x}-1)}{x^{2n-2}}.$$
Donner la limite de cette fonction en 0.

Exercice 71. Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = |x|^{\frac{1}{x-1}}.$$

1. Indiquer les intervalles sur lesquels f est continue.
2. Quelle est la limite de f en 0 ?
3. Quelle est la limite de f en 1 ? Soit F le prolongement par continuité de f sur $\mathbb{R}^*$.
4. Quelles sont les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$?
5. Quelle est la dérivée de F ?
6. Etudier les variations de f.
7. Construire la courbe de F dans un repère orthonormé.

Exercice 72. Gabon 1976

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-x)^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x \leqslant -1 \qquad f(x) = ax + b \text{ si } x > -1.$$

Comment peut-on choisir les réels a et b pour la fonction f soit :

1. continue en -1 ?
2. dérivable en -1 ?

   Pour les valeurs trouvées en 2. on étudiera la fonction f et l'on tracera sa courbe représentative dans un plan orthonormé.

Huitième partie
Etude de fonctions

1 Plan d'étude d'une fonction

Voici le plan d'étude d'une fonction f donnée par l'expression explicite de l'image $f(x)$.

1. Détermination de l'ensemble de définition.
   Si l'ensemble de définition n'est pas indiqué dans l'énoncé, il est nécessaire d'énoncer clairement toutes les contraintes d'existence du réel $f(x)$.
   En Terminale, trois problèmes peuvent se présenter :
   - $\ln u(x)$ existe $\Leftrightarrow u(x) > 0$
   - $\sqrt{u(x)}$ existe $\Leftrightarrow u(x) \geqslant 0$.
   - $\dfrac{1}{u(x)}$ existe $\Leftrightarrow u(x) \neq 0$.

   Rédaction
   f est définie pour tout x tel que : ......

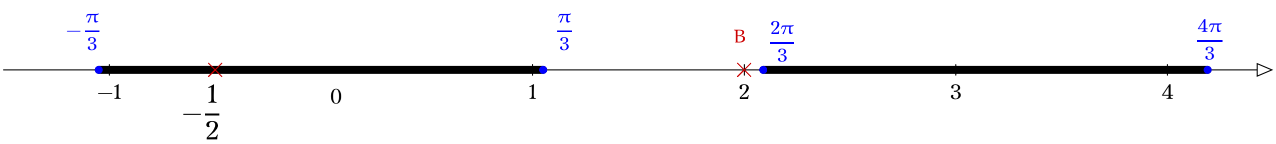
   Exemple 1.1. *Si* $f(x) = \ln(x + \frac{1}{2}) + \dfrac{3x}{x^2 - 4} + \sqrt{4\cos^2 x - 1}$.
   f *est définie pour tout* x *tel que :*

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x + \frac{1}{2} & > & 0 \\ x^2 - 4 & \neq & 0 \\ 4\cos^2 x - 1 & \geqslant & 0 \end{array}\right. \quad (1)$$

   Or :

   $$(1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & > & -\frac{1}{2} \\ x & \neq & 2 \\ \cos x & \leqslant & \frac{-1}{2} \text{ ou } \cos x \geqslant \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & > & -\frac{1}{2} \\ x & \neq & 2 \\ x & \in & \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi] \cup [\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi] \end{array}\right.$$

   Conclusion
   $D_f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}\pi, \frac{4\pi}{3}\right] \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \left(\left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right]\right)$.
   Ne pas hésiter à construire une droite graduée, surtout lorsque l'ensemble à déterminer est un peu difficile à visualiser, comme ici :

2. Domaine d'étude.
   - Si f est T-périodique, il suffit d'étudier la fonction sur un intervalle de longueur T.
   - Si f est paire ou impaire, il suffit d'étudier la fonction sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$.

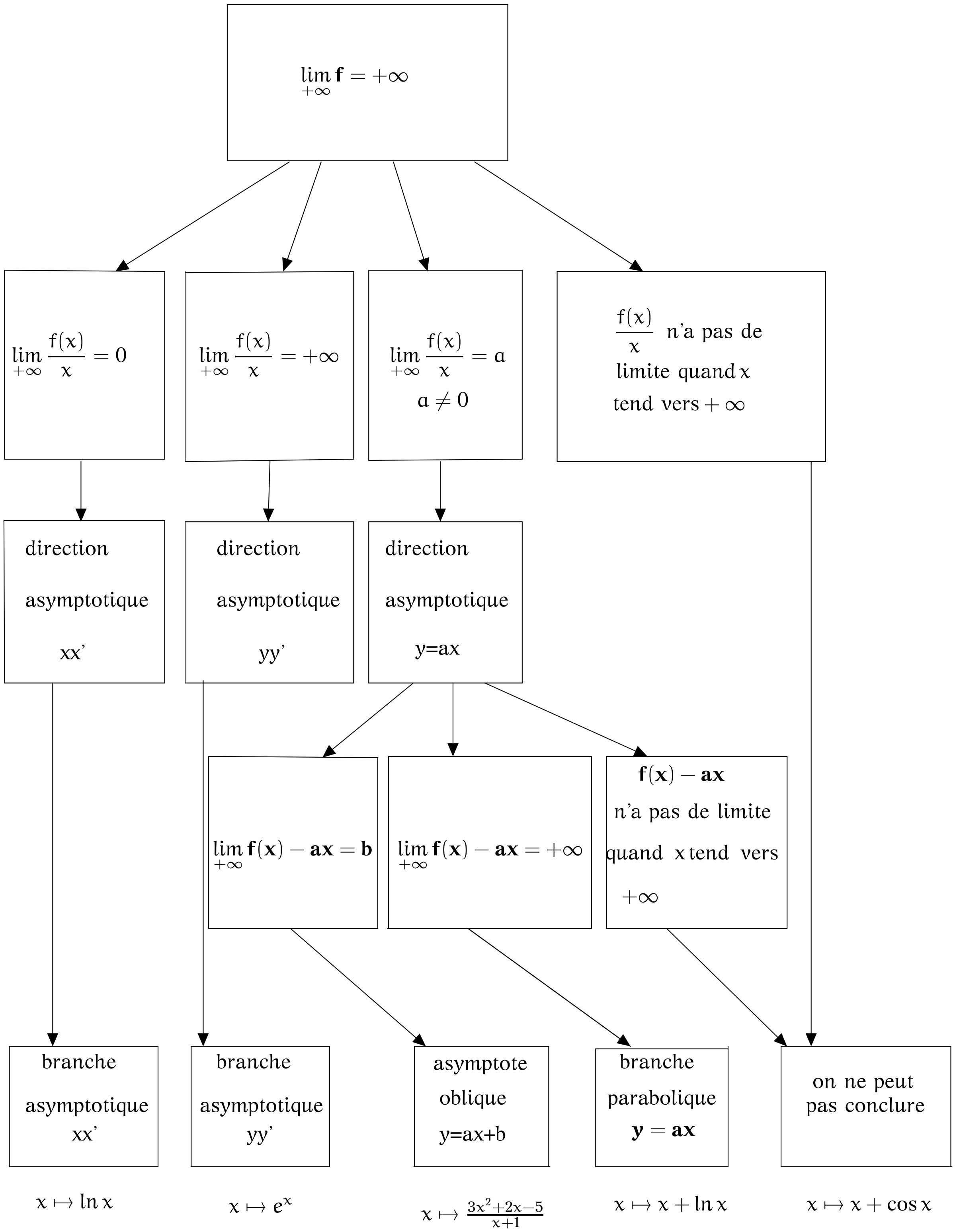
   Le but est bien entendu de trouver l'ensemble d'étude le plus petit possible.

   Exemple 1.2. $f : x \mapsto 4\sin^3 x - 3\sin(2x)$.
   f *est définie sur* $\mathbb{R}$. *Elle est impaire et* 2π*-périodique. Il est donc possible de l'étudier sur* $[0;\pi]$.

3. Dérivabilité- Calcul de la dérivée-Etude du signe de la dérivée sur le domaine d'étude. Calcul des minima et maxima éventuels.

4. Etude des limites de f aux bornes du domaine d'étude. Recherche des asymptotes éventuelles. Etude des branches infinies de la courbe le cas échéant (cf. infra).
5. Construction d'un tableau de variations sur le domaine d'étude.

2 Etude des branches infinies d'une courbe



3 Exercices corrigés

Exercice 73. Faire l'étude complète des fonctions suivantes :

- $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x+2+\sqrt{x^2+4}}$
- $g(x) = \sup(-x^3+x^2+5x, 2x^3+x)$
- $h(x) = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{1+\cos x}}$
- $\phi(x) = \tan\dfrac{x}{2} + \sin x.$

4 Exercices

Faire l'étude complète des fonctions suivantes :

Exercice 74. $f(x) = x^3+3x-2$; $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2.$ $h(x) = x^2 + |x-1|$;

Exercice 75. $f(x) = \dfrac{2x-3}{3x+3}$; $g(x) = \dfrac{|x+1|-2x}{|x-1|}$. $h(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{x^2+6x+8}$; $\phi(x) = \left|\dfrac{x^2-2x}{x-1}\right|$.

Exercice 76. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4x+5}$; $g(x) = \dfrac{-3x+2}{x^2-3x+2}$; $h(x) = x^{\frac{1}{3}} + \dfrac{1}{x}$; $\phi(x) = x + \sqrt{x-1}.$

Exercice 77. $f(x) = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{\dfrac{1}{x}}$; $g(x) = \sqrt{\dfrac{-x^3}{x+1}}$; $h(x) = \sqrt{\dfrac{x^2(x+1)}{x-1}}$; $\phi(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x+1}$.

Exercice 78. $f(x) = \sqrt{|2-x|}$; $g(x) = x^2-6x+5$; $h(x) = \dfrac{|x^2+x|+1}{|x|+1}$.

Exercice 79. $f(x) = (1-x)\sqrt{x+1}$; $g(x) = x\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$; $h(x) = (-1)^{E(x)}(x-E(x))$; $\phi(x) = E(2x) - x$;

Exercice 80. $f(x) = \dfrac{1}{x-E(x)}$. $g(x) = 2x-1+\sqrt{x-4}$; $h(x) = x+3+\dfrac{1}{2}\sqrt{6x^2+24x}$; $\phi(x) = \dfrac{2x^3}{(2x-1)^3}$.

Exercice 81. $f(x) = \sqrt{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x+2}$; $g(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}$;
$h(x) = x + \sqrt{x(2-x)}$; $\phi(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x.$

Exercice 82. $f(x) = \cos^2 x.$ $g(x) = 2\cos 3x + 1$; $h(x) = 3\sin 2x + 2\cos 3x - 3$; $\phi(x) = \dfrac{\cos 3x}{1+\cos 2x}$.

Exercice 83. $f(x) = \dfrac{\cos 3x}{(\cos x - 1)^2}$; $g(x) = \dfrac{\cos^3 x}{(\cos x-1)^2}$; $h(x) = \sqrt{\dfrac{1-2\sin x}{1+2\sin x}}$; $\phi(x) = \dfrac{\cos 2x}{\sin x}$.

Exercice 84. $f(x) = \sin^2 x - 2\cos x$; $g(x) = x - \sin x$; $h(x) = \dfrac{1}{\sin x}$; $\phi(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin 2x}$.

Exercice 85. $f(x) = \dfrac{4\cos x - 3}{2\cos x}$; $h(x) = \cos^2 x + \sin x \cos x$; $\phi(x) = \dfrac{\tan x}{1-2\sin x}$.

Exercice 86. $f(x) = \tan x + \cos x.$

Exercice 87. Résoudre :

1. $\ln(150-25x-x^2) = 3\ln(5-x).$
2. $2\ln(3x-5) + \ln(10x-4) = \ln(5x-2).$
3. $\begin{cases} xy+x+y = 2 \\ \ln(x+1)+\ln(y-1) = 1 \end{cases}$
4. $\ln(150-25x-x^2) = 3\ln(5-x).$
5. $\sqrt{\ln x} > 2.$
6. $\ln|2x+1| \geqslant 1.$
7. $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases}$
8. $\ln(x^2-1) \geqslant \ln(x-2) + \ln(x-3).$
9. $\begin{cases} x^2+y^2 = 4a^2 \\ \ln x + \ln y = 2\ln 3a - 3\ln 2 \end{cases}$
10. $\sqrt{\ln x} > 2.$kk $(\ln x)^4 - 34(\ln x)^2 - 225 = 0.$
11. $2(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0.$
12. $(\ln x)^2 - (\ln x^2) - 3 = 0.$
13. $\begin{cases} 5x+4y = 7 \\ \ln x + \ln y = \ln 3 - \ln 5 \end{cases}$
14. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x.$

Exercice 88. Trouver les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sqrt{\dfrac{\ln x - 1}{\ln x + 1}}$.
2. $x \mapsto \ln(\ln(\ln x)))$.

Exercice 89. Calculer les dérivées des fonctions suivantes après avoir donné leurs ensembles de définition :
$f(x) = x \ln x$; $\quad g(x) = \ln\left|\tan \dfrac{x}{2}\right|$; $\quad h(x) = \ln\left|\tan(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4})\right|$.
Quelles primitives peut-on ainsi trouver ?

Exercice 90. Démontrer :

$$\forall x > 0, \qquad x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x.$$

Exercice 91. Montrer que pour tout n entier strictement positif :

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

Aide : On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis.

En déduire que :

1. La suite u de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ a pour limite $+\infty$.
2. La suite v de terme général $v_n = u_n - \ln n$ est minorée et décroissante. En déduire qu'elle converge vers un réel noté γ.
   Ecrire un algorithme (avec Algobox) et le tester pour conjecturer une valeur approchée de γ à 0,01 prés.
   Cette limite est-elle rationnelle ? (Bon courage.......)

Exercice 92. Démontrer que $\dfrac{\ln 2}{\ln 5}$ est irrationnel.

Exercice 93. Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{x \ln x}{\ln(1+ax)} \quad (a \neq 0)$.
2. $\displaystyle\lim_{x \to e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$.

Exercice 94. Etudier la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{1}{\ln|x+1|}$.

Exercice 95. Partie A

1. f est une application dérivable de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$; a est un réel strictement positif donné.
   Soit g_a l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

   $$x \mapsto f(ax) - f(x).$$

   Montrer que g_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée.
2. On se propose de déterminer l'ensemble $\mathfrak{F}$ des applications f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, f(xy) = f(x) + f(y). \qquad (1)$$

   (a) Vérifier que, pour tout réel k, la fonction $k.\ln$ appartient à $\mathfrak{F}$.
   (b) Si f est un élément de $\mathfrak{F}$ montrer que $f(1)=0$.
   (c) Si f est un élément de $\mathfrak{F}$ que peut-on dire de toute fonction g_a introduite au 1°) ? En déduire que :

   $$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \; af'(a) - f'(1) = 0.$$

   (d) Conclure alors que f est une fonction de la forme :

   $$x \mapsto k \ln x.$$

   (k désignant une constante réelle) puis donner $\mathfrak{F}$.

Partie B Soit A l'ensemble des couples de réels (a, α) où a est strictement positifs et α un réel. On définit une opération ★ de la façon suivante :

$$(a, \alpha)\bigstar(b, \beta) = (ab, a\beta + b\alpha).$$

1. Montrer que A muni de cette opération est un groupe abélien.
2. f est une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans A, l'application ϕ par : $\phi(a) = (a, f(a))$.
   A quelle condition $\mathfrak{H}$ sur f cette application ϕ définit-elle un morphisme de groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(A, \bigstar)$.
3. (a) f étant de dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifiant $\mathfrak{H}$, soit h l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

   $$\forall x > 0, \qquad h(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

   Montrer que h est un élément de $\mathfrak{F}$.

   (b) Montrer que l'ensemble des applications de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$,dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifiant $\mathfrak{H}$ est l'ensemble des applications :

   $$x \mapsto kx \ln x \qquad (k \in \mathbb{R}).$$

Exercice 96. Soient u et v les suites définies par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n = \ln u_n.$$

1. Démontrer que la suite u converge et déterminer sa limite.
2. En déduire que u converge. Quelle est sa limite ?

Exercice 97. Soit a et b deux réels tels que 0<a<b.
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(ax+1)}{\ln(bx+1)}.$$

1. Trouver l'ensemble de définition de f.
2. Calculer f'(x).
3. On pose :

   $$g(x) = a(bx+1)\ln(bx+1) - b(ax+1)\ln(ax+1).$$

   Calculer g'(x) et en déduire le sens de variations de f.
4. Démontrer que : $\ln\left(\frac{a}{b}+1\right)\ln\left(\frac{b}{a}+1\right) < (\ln 2)^2$.

Exercice 98. Démontrer que pour tout entier n supérieur à 8 :

$$n^{\sqrt{n+1}} > (n+1)^{\sqrt{n}}$$

Exercice 99. Déterminer la limite et le plus grand terme de la suite u définie par : $u_n = \sqrt[n]{n}$.

Exercice 100. [83] Soit $f_a : x \mapsto \ln(x^2 + a)$ où a est un réel donné.

1. Déterminer, suivant les valeurs de a l'ensemble de définition de f_a ainsi que les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition.
2. Etudier suivant les valeurs de a les variations de f_a sans utiliser la dérivée de cette dernière. Dresser les différents tableaux de variation de f_a suivant les valeurs de a.
3. Montrer que pour tout x positif, $f_a(x) = \ln x^2 + \ln\left(1 + \frac{a}{x^2}\right)$.
   En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_a}{x}$.

Exercice 101. [Bac C-Lyon 1973]
Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2\log_x y + 2\log_y x &= -5 \\ xy &= e \end{cases}$$

Exercice 102. [85 suite]

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{\frac{1}{u_n}}$.

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.
   (a) Déterminer f' et f".
   (b) Etudier le sens de variation de f.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique L strictement positive. Justifier que $L \in]\frac{3}{2}; 2[$.
3. (a) Tracer, dans un repère orthonormé, la courbe représentative C de f.
   (b) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite u.
4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [\frac{3}{2}; 2]$.
   (b) Montrer que : $\forall x \in [\frac{3}{2}; 2], -\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}} \leqslant f'(x) \leqslant -\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}}$.
   (c) En déduire qu'il existe k dans]0; 1[, tel que : $\forall x \in [\frac{3}{2}; 2], |f'(x)| \leqslant k$.
   (d) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $|u_{n+1} - L| \leqslant k\,|u_n - L|$.
   (e) Montrer que la suite u converge vers L.
   (f) Montrer, en utilisant les variations de f, que les réels $u_{n+1} - L$ et $u_n - L$ sont de signes contraires.
   En déduire que pour tout n entier naturel, L est compris entre u_n et u_{n+1}.
   En justifiant la méthode utilisée, donner une valeur approchée de L à 10^{-2} prés.

Exercice 103 (85 INTEGRALE Somme riemann SUITE). 1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,dx$.

2. n étant un entier naturel non nul, on pose : $S(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} e^{-\frac{k}{n}}$. Montrer que S(n) a une limite lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$. Préciser cette limite.

Exercice 104. [dijon sept 1979]

1. (a) Etudier les variations de la fonction f de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ par :
   $$f : x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}e^x$$
   Construire sa courbe dans un repère orthonormé.
   (b) Déduire de l'étude précédente, suivant les valeurs du paramètre réel a, le nombre de racines réelles de l'équation :
   $$1 - axe^{-x} = 0.$$
2. On se propose d'étudier la famille de fonctions g_m de la variable réelle x, définies sur $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par :
   $$g_m : x \mapsto g_m(x) = x^m e^{-x}.$$
   où m désigne un paramètre réel strictement positif.
   Le plan est muni d'un repère orthonormé (on prendra 5 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée).
   (a) Etudier la limite de g_m en 0.
   (b) Soit la famille de fonctions f_m de $[0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définies par :
   $f_m(x) = g_m(x)$ si $x>0$ et $f_m(0) = 0$.
   On désigne par C_m la courbe représentatitve de f_m. Montrer que les fonction f_m sont continues en 0.
   (c) Calculer la limite de f_m en $+\infty$. En déduire que les courbes C_m possèdent une asymptote commune.
   (d) Etudier les variations de f_m.
   (e) En considérant la définition de la dérivée à droite, étudier la tangente à C_m en 0 (on sera amené à distinguer les cas suivants : 0<m<1 , m=1 et m>1).
   (f) Etudier les cas particulier m=1; m=0,5 et m=2. Tracer les courbes correspondantes. Montrer que toutes les courbes C_m passent par un point fixe autre que l'origine.

Exercice 105. [Bac C et E, Amiens 1982]

1. Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}*, \qquad \phi(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}+1.$$

Déduire de l'étude des variations de ϕ dans $\mathbb{R}^*$, celle du signe de $\phi(x)$ dans $\mathbb{R}^*$.

2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, \ f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}. \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

   (a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
   (b) Déterminer le tableau de variations complet de f dans $\mathbb{R}$.
   (c) Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
   Etudier la limite de $f(x) - \dfrac{x}{2}$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$.
   Montrer que C admet une asymptote et construire C.
   Montrer que C se trouve tout entière au-dessus de son asymptote.

Exercice 106. [Bac C, Caen, 1982, partiel]
Soit λ un réel non nul, on considère la fonction f_λ, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_\lambda(x) = x + \lambda(x+1)e^{-x}.$$

On désigne par C_λ la courbe représentative de la fonction f_λ dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer f'_λet f''_λ les dérivées première et seconde de f_λ.
2. Discuter, suivant le réel λ, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x :

$$f'_\lambda(x) = 0.$$

   Préciser la position de ces solutions par rapport à 0 et 1 (on distinguera les 4 cas : $\lambda<0$, $0<\lambda<e$, $\lambda=e$, $\lambda>0$).
3. Déduire de ce qui précéde, le sens de variations de f_λ suivant les valeurs du réel λ.
4. Etudier les limites de f_λ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   Préciser les branches infinies de la C_λ.
5. Montrer qu'il existe un unique point commun A à toutes les courbes C_λ.
6. Soit I_λ le point de C_λ dont l'abscisse est 1. Ecrire une équation de la tangente D_λà C_λ au point I_λ.
   Montrer que les droites D_λ ont un point commun B.
7. On se propose de construire avec précision les courbes C_{-1}, C_e, C_4.
   Les courbes seront tracées sur une même figure sur papier millimétré en prenant 2 cm comme unité.
   (a) On prend $\lambda = -1$. Montrer que l'équation d'inconnue x, $f'_{-1}(x) = 0$ n'a qu'une seule solution notée x_1 comprise entre - 0,57 et - 0,56.
   Construire la courbe C_{-1}.
   (b) Construire la courbe C_e.
   (c) Montrer que l'équation d'inconnue x, $f'_4(x) = 0$ a deux solutions : x_1, comprise entre 0,35 et 0,36 et x_2 comprise entre 2,15 et 2,16.
   Tracer C_4.

Neuvième partie

Intégration

Sauf mention contraire, (a, b) désigne un couple de réels tels que $a < b$. Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1 Intégration des fonctions en escalier sur un segment $[a; b]$

1.1 Fonctions en escalier sur un segment $[a; b]$

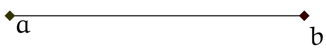
Définition 1.1. *Soit* $[a; b]$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$. *On appelle subdivision de* $[a; b]$ *toute famille finie de réels* $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ *telle que :*

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b.$$

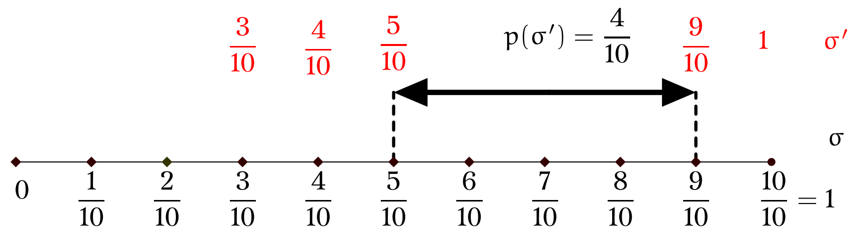
Les réels $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ sont appelés les points de la subdivision σ.
Le segment $[a; b]$ est ainsi découpé en n intervalles $[a; a_1]$, $[a_1; a_2], \cdots, [a_{n-1}; b]$.

Exemple 1.1. • $\sigma = (a, b)$ *est une subdivision de* $[a, b]$.

•$\sigma = (a, b)$ est une subdivision de $[a; b]$.



• $[a; b] = [0; 1]$:



$\sigma = \left(0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}, \frac{9}{10}, 1\right)$: σ est une *subdivision à pas constant* égal à $\frac{1}{10}$.

$\sigma' = \left(0, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{9}{10}, 1\right)$

σ' est une subdivision dont le pas $p(\sigma')$ est défini par $p(\sigma') = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} (a_{i+1} - a_i)$.

Ici : $p(\sigma') = \frac{4}{10}$.

σ et σ' sont deux subdivisions du même segment. Tous les points de σ' sont des points de σ : la subdivision σ est dite *plus fine* que σ'.

• Toute subdivision de $[a; b]$ à pas constant est de la forme $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ avec :

$$\forall i \in [\![0; n]\!],\ a_i = a + i\frac{b-a}{n}.$$

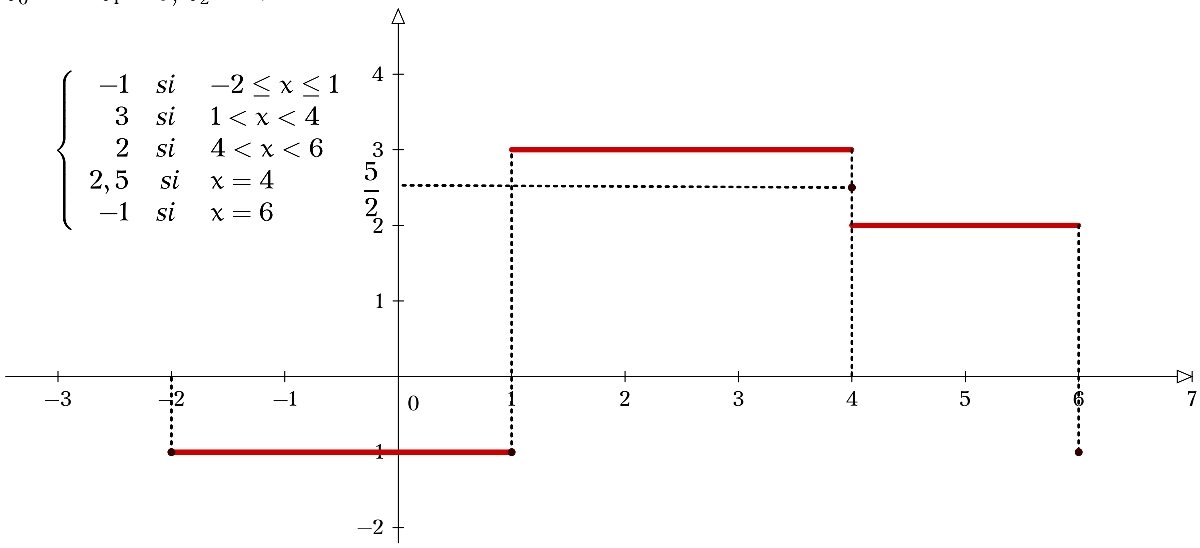
Définition 1.2. *Une fonction* $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite en escalier si et seulement s'il existe une subdivision* $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ *telle que pour tout* i *de* $[\![0;n-1]\!]$ *,* f *restreinte à* $]a_i;a_{i+1}[$ *est constante :*

$$\forall i \in [\![0;n-1]\!], \exists c_i \in \mathbb{R}, \forall x \in]a_i;a_{i+1}[, f(x) = c_i.$$

Définition 1.3. *Une telle division* σ *est dite* ***adaptée*** *à* f.

Exemple 1.2. *Dans cet exemple, il est possible de prendre* $\sigma = (-2, 1, 4, 6)$*. Dans ce cas :* $n = 3$, $c_0 = -1\, c_1 = 3$, $c_2 = 2$.

$$\begin{cases} -1 & si \quad -2 \leq x \leq 1 \\ 3 & si \quad 1 < x < 4 \\ 2 & si \quad 4 < x < 6 \\ 2,5 & si \quad x = 4 \\ -1 & si \quad x = 6 \end{cases}$$



Bien entendu, toute subdivision de $[-2, 6]$ plus fine que σ est aussi adaptée à f (par exemple : $\sigma' = (-2, 1, 2, 3, 4, 6)$).
Par contre, la subdivision $\sigma = (-2, 0, 4, 6)$ n'est pas adaptée car f n'est pas constante sur l'intervalle]0 ;4[.

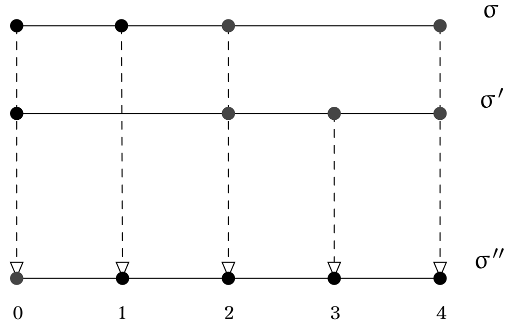
1.1.1 Propriétés

Propriété 1.1. *Soit* $\mathcal{E}$ *l'ensemble des fonctions en escalier sur un segment* $[a;b]$ *donné. Alors :*
- $\mathbb{1}_{[a;b]} : x \mapsto 1$ *appartient à* $\mathcal{E}$.
- $\forall (f, g) \in \mathcal{E}^2, \begin{cases} f+g & \in & \mathcal{E} \\ fg & \in & \mathcal{E} \end{cases}$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{E}, \lambda f \in \mathcal{E}$.
- $\forall f \in \mathcal{E}, |f| \in \mathcal{E}$.

Démonstration . *:*
• *Il suffit de prendre la subdivision* $\sigma = (a, b)$.
• *Soient* $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ *et* $\sigma' = (\alpha_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}$ *deux subdivisions adaptées respectivement à f et g. Nous allons construire une subdivision* $\sigma' = (\beta_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ *adaptée à* $f + g$ *et à* fg.
Par définition, il est nécessaire de poser : $\beta_0 = a_0 = \alpha_0 = a$.
Ensuite il est possible d'ordonner par ordre strictement croissant les valeurs des points des deux subdivisions σ *et* σ'*. Cette nouvelle suite de points est finie et permet de définir une nouvelle subdivision* σ''*adaptée à* f *et* g*, et plus fine que* σ *et* σ'.

Exemple 1.3.

$$\begin{array}{rcl}]\beta_0;\beta_1[& = &]0;1[\\ ]\beta_1;\beta_2[& = &]1;2[\\ ]\beta_2;\beta_3[& = &]2;3[\\ ]\beta_3;\beta_4[& = &]3;4[\end{array}$$



$$\text{Si } \sigma = (0,1,2,4) \text{ et } \sigma' = (0,2,3,4), \text{ alors } \sigma'' = (0,1,2,3,4).$$

f et g étant constantes sur les intervalles $]\beta_i;\beta_{i+1}[$, où i appartient à $[\![0;p-1]\!]$, il en est de même pour les fonctions $f+g$ et fg qui sont donc des éléments de $\mathcal{E}$.
•Toute subdivision $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ adaptée pour f l'est aussi pour λf :

$$\forall i \in [\![0;n-1]\!], \exists c_i \in \mathbb{R}, \forall x \in]a_i;a_{i+1}[, \lambda f(x) = \lambda c_i.$$

• Toute subdivision $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ adaptée pour f l'est aussi pour $|f|$:
$\forall i \in [\![0;n-1]\!], \exists k_i \in \mathbb{R}^+, \forall x \in]a_i;a_{i+1}[, |f(x)| = k_i.$ ♢

Propriété 1.2. *Si f est un élément de $\mathcal{E}$ et si $[\alpha;\beta]$ est inclus dans $[a;b]$, alors f est une fonction en escalier sur $[\alpha;\beta]$.*

Démonstration . *Soit $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision adaptée à f sur $[a;b]$.*
Il faut construire une subdivision σ' adaptée à f sur $[\alpha;\beta]$. Il existe une famille finie, éventuellement vide [a] $(a_i)_{p\leqslant i\leqslant q}$ de points de σ, telle que :

$$\alpha \leqslant a_p < \cdots < a_q \leqslant \beta.$$

La subdivision $\sigma' = (\alpha, a_p, \cdots, \beta)$ convient. ♢

☞ **Remarque** Une fonction en escalier sur $[a;b]$ y possède un nombre fini de points de discontinuité, lesquels appartiennent à l'ensemble des points communs à toute subdivision adaptée à f.
De plus, f n'en possède aucun si et seulement si elle est constante sur $[a;b]$.

1.2 Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment $[a;b]$

1.2.1 Définitions et exemples

Définition 1.4. *Soit f une fonction en escalier sur $[a;b]$ et soit une subdivision $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ adaptée à f telle que :*

$$\forall i \in [\![0;n-1]\!], \forall x \in]a_i;a_{i+1}[, f(x) = c_i.$$

• Le réel $I(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)c_i$ est appelé intégrale de f sur $[a;b]$ et est noté : $\mathbf{I}(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$,
*qui se lit : " **somme de a à b de $f(x)dx$**" ou " **intégrale de a à b de $f(x)dx$**".*
• a est la borne inférieure de l'intégrale et b est la borne supérieure de l'intégrale.

a. Ce qui se produit lorsque α et β sont compris entre deux points consécutifs de σ : $\sigma' =[\alpha;\beta]$ convient.

☞ **Remarques**
• x est une variable muette : elle peut être remplacée par tout autre lettre. Ainsi :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \cdots$$

• $I(f)$ ne dépend pas des valeurs prises par f en ses points éventuels de discontinuité.
Exemples à connaître :
• Si f est une fonction nulle sur $[a; b]$ sauf en un nombre fini de points $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $[a; b]$ en lesquels elle des valeurs quelconques, alors :

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

• Si f est constante égale à k sur $[a; b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = k(b-a)$.

• $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 1 \\ 3 & \text{si} \quad 1 < x < 4 \\ 2 & \text{si} \quad 4 < x < 6 \\ 2,5 & \text{si} \quad x = 4 \\ -1 & \text{si} \quad x = 6 \end{cases} \qquad \displaystyle\int_a^b f(x)dx = -1 \times (1-(-2)) + 3 \times (4-1) + 2 \times (6-4) = 10.$

Démonstration . *: laissée en exercice.* ♢

Interprétation graphique
▶ Cas d'une fonction positive sur $[a; b]$.
Dans ce cas : $\forall i \in [\![0; n-1]\!], c_i \geqslant 0$.
De la définition de l'intégrale, il vient alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

Propriété 1.3. *L'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *est égale à l'aire du domaine* $(\mathfrak{D})$ *compris entre la courbe représentative de* f*, l'axe* $x'Ox$*, et les droites d'équations* $x = a$ *et* $x = b$.
Cette aire est exprimée en unité d'aire (souvent notée u.a) correspondant à l'aire du rectangle formé par les points O, I, J *et* K *de cordonnées* $(1; 1)$.

Démonstration . *:* $\mathfrak{D}$ *est la réunion de* n *rectangles d'aires* $(a_{i+1} - a_i)c_i$. ♢

▶ Cas d'une fonction négative sur $[a; b]$. Dans ce cas : $\forall i \in [\![0; n-1]\!], c_i \leqslant 0$.
Ceci entraine que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est un réel négatif. Cette intégrale correspond à l'*aire algébrique* limitée par la courbe représentative de f, l'axe $x'Ox$, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
▶ Cas d'une fonction de signe quelconque sur $[a; b]$.
L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est égale à la somme des aires algébriques (positives ou négatives) des rectangles $(R_i)_{(1\leqslant i\leqslant n)}$.

Définition 1.5. *Soit* f *une fonction en escalier sur* $[a, b]$*. Par définition :*
i) $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$.
ii) $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

1.2.2 Propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier

Rappel : $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des fonctions en escalier sur un segment $[a; b]$ donné.

Propriété 1.4. *L'application :* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(x)dx \end{array}\right.$ *est linéaire, c'est-à-dire :*

- $\forall (f,g) \in \mathcal{E}^2$, $\displaystyle\int_a^b f(x)+g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)$.
- $\forall f \in \mathcal{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$.

Démonstration . *:*
• *Il existe une subdivision* $\sigma = (\alpha_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ *adaptée simultanément à* f, g *et à* $f+g$ *telle que :*

$$\forall i \in [\![0;n-1]\!], \exists\, (\gamma_i, \delta_i) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in]\alpha_i;\alpha_{i+1}[, f(x) = \gamma_i \text{ et } g(x) = \delta_i.$$

σ *est adaptée à* $f+g$ *donc :*

$$\int_a^b f(x)+g(x)dx = \int_a^b (f+g)(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{i+1}-\alpha_i)(\gamma_i+\delta_i)$$

$$\int_a^b f(x)+g(x)dx = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{i+1}-\alpha_i)\gamma_i}_{I_1} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{i+1}-\alpha_i)\delta_i}_{I_2}$$

Mais σ *est adaptée à* f, *donc* $I_1 = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$, *et* σ *est adaptée à* g, *donc* $I_2 = \displaystyle\int_a^b g(x)dx$.
• *Soit* $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ *adaptée à* f. *Elle l'est aussi pour* λf *:*

$$\forall i \in [\![0;n-1]\!],\ \exists\, c_i \in \mathbb{R},\ \forall x \in]a_i;a_{i+1}[,\ \lambda f(x) = \lambda c_i.$$

Ainsi : $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1}-a_i)\lambda c_i = \lambda \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1}-a_i)c_i = \lambda \int_a^b f(x)dx$ ♢

Propriété 1.5. ***Propriété** : **Relation de Chasles***

Soit f *un élément de* $\mathcal{E}$. *Pour tout réel* c *de* $[a;b]$ *:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Démonstration . *:*
Si c *est égal à* a *ou* b, *l'égalité est triviale.*
Si $c \in]a;b[$
***Lemme** : Il est possible de construire une subdivision* $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ *adaptée à* f *sur* $[a;b]$ *contenant* c, *c'est-à-dire telle que :*

$$\exists\, k \in [\![0;n]\!], c = a_k.$$

Démonstration . *: laissée en exercice.* ♢

Les points $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ *(resp.*$(a_i)_{k \leqslant i \leqslant n}$*), forment une subdivision adaptée à* f *sur* $[a;c]$ *(resp. sur* $[c;b]$*). La suite de la démonstration est laissée en exercice.* ♢

Propriété 1.6. ***Croissance de l'intégrale***
Soient f *et* g *deux élément de* $\mathcal{E}$. *Soient* a *et* b *deux réels tels que* $a \leqslant b$.

- *Si* $\forall x \in [a;b], f(x) \geqslant 0$, *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.
- *Si* $\forall x \in [a;b], f(x) \leqslant g(x)$, *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)$.

☞ **Remarque importante** : La condition $a \leqslant b$ est essentielle pour appliquer ces propriétés.

Démonstration . *:*
• *Ce point a été vu lors de l'interprétation graphique de l'intégrale.*
• *La fonction* $\phi = g - f$ *appartient à* $\mathcal{E}$ *et est positive sur* $[a;b]$*.Par linéarité de l'intégrale :*
$\int_a^b \phi(x)dx \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \geqslant \int_a^b f(x)dx.$ ♢

Propriété 1.7. ***intégrale et valeur absolue***
Pour toute fonction f *de* $\mathcal{E}$ *(avec* $a \leqslant b$*),*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Démonstration . *Par propriété de la valeur absolue :*

$$-|f| \leqslant f \leqslant |f|$$

La croissance de l'intégrale, avec $a \leqslant b$ *permet ainsi d'écrire :*

$$-\int_a^b |f(x)|\, dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Ce qui revient à[a] *:* $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx.$♢

Corollaire : Si $|f|$ est majorée par M sur $[a;b]$, alors : $\int_a^b |f(x)|\, dx \leq (b-a)M$.

a. Vous aurez remarqué qu'il est fait aussi usage de la linéarité de l'intégrale pour faire apparaître le signe - devant l'intégrale dans le premier membre de l'intégrale.

2 Intégrale d'une fonction continue

Ici commence le programme officiel du cours de TS.

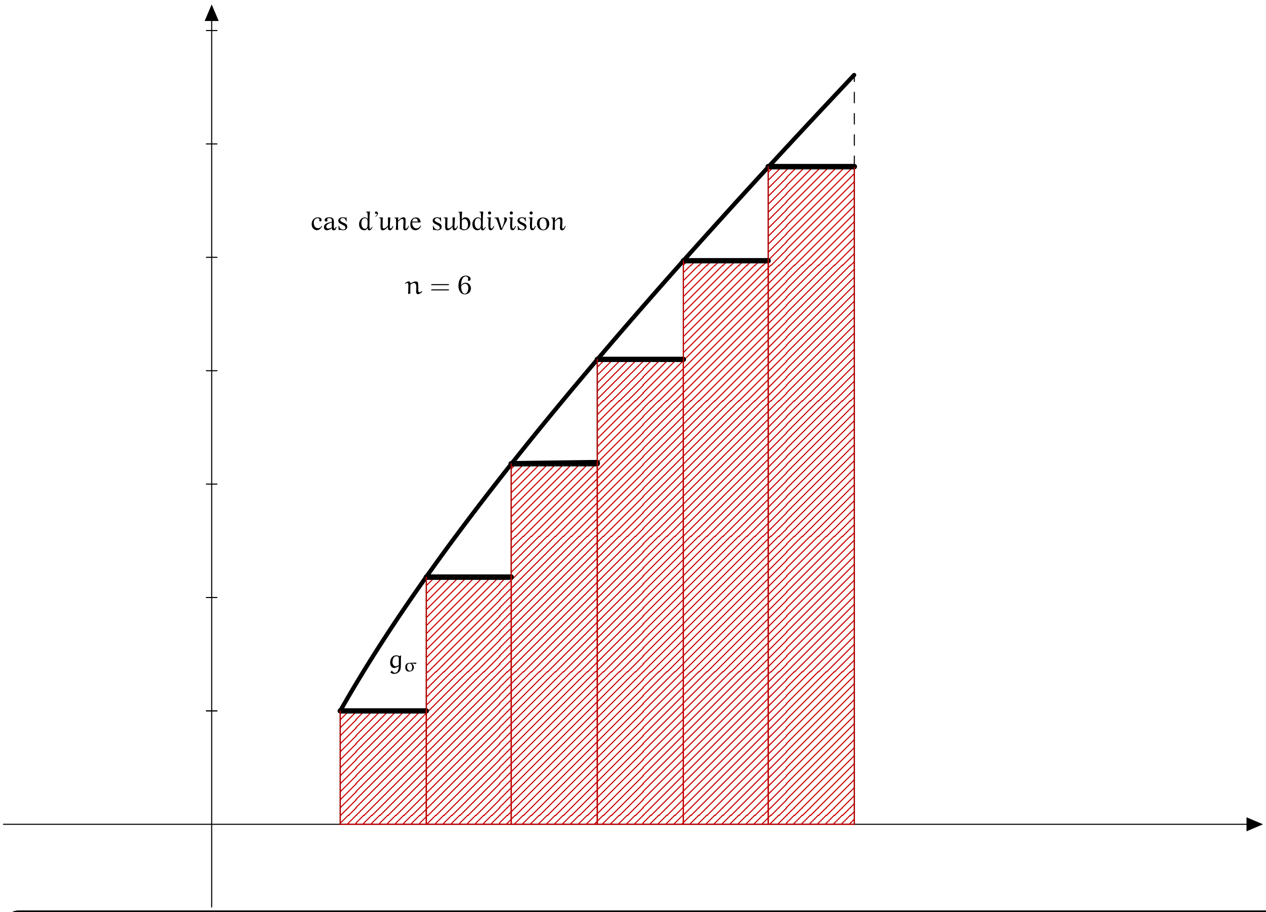
2.1 Intégrale d'une fonction continue et monotone sur $[a;b]$

L'intégrale d'une fonction en escalier positive sur $[a;b]$ étant égale à "l'aire sous la courbe"; l'idée pour définir l'intégrale d'une fonction continue sur $[a;b]$ est de l'encadrer par une suite de fonctions en escalier sur $[a;b]$. Dans ce qui suit, nous supposerons que f est croissante sur $[a;b]$.

2.1.1 Fonctions en escalier minorant f

Soit $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision quelconque du segment $[a;b]$. Soit g_σ la fonction en escalier sur $[a;b]$ définie par :

$$\forall k \in [\![1;n]\!], \forall t \in [a_{k-1}, a_k[, \; g_\sigma(t) = f(a_{k-1}) \quad \text{et} \quad g_\sigma(b) = f(a_{n-1}).$$



Propriété 2.1. g_σ *minore* f, *c'est-à-dire :* $\forall t \in [a;b], g_\sigma(t) \leqslant f(t)$.

Démonstration . *La fonction* f *est croissante sur* $[a;b]$, *donc a fortiori sur les intervalles* $[a_{k-1}, a_k[$.
Par conséquent :

$$\forall t \in [a;b[, \exists k \in [\![1;n]\!], t \in [a_{k-1}, a_k[\text{et} : g_\sigma(a_{k-1}) \leq f(a_{k-1}) \leq f(t).$$

De plus, $g_\sigma(b) \leq f(b)$. *Ceci prouve que* f *est minorée par* g_σ. $\diamondsuit$

Propriété 2.2. *Pour une subdivision donnée* σ *de* $[a;b]$, *la fonction* g_σ *définie précédemment est la meilleure fonction minorante de* f *en ce sens :*
Si ϕ *est une fonction en escalier sur* $[a;b]$ *pour laquelle* σ *est adaptée. Si de plus,* ϕ *minore* f *alors :* $\phi \leqslant g_\sigma$.

Démonstration . *: laissée en exercice.* $\diamondsuit$

Corollaire Avec les notations précédentes :

$$\int_a^b \phi(x)dx \leq \int_a^b g_\sigma(x)dx.$$

Démonstration .

$$\forall x \in [a;b],\ \phi(x) \leq g_\sigma(x) \qquad (1)$$

L'encadrement cherché est obtenu en utilisant la croissance de l'intégrale à (1), qui peut être appliquée car $a < b$. $\diamondsuit$

Propriété 2.3. *Quelle que soit la subdivision* σ *adaptée à* f *:*

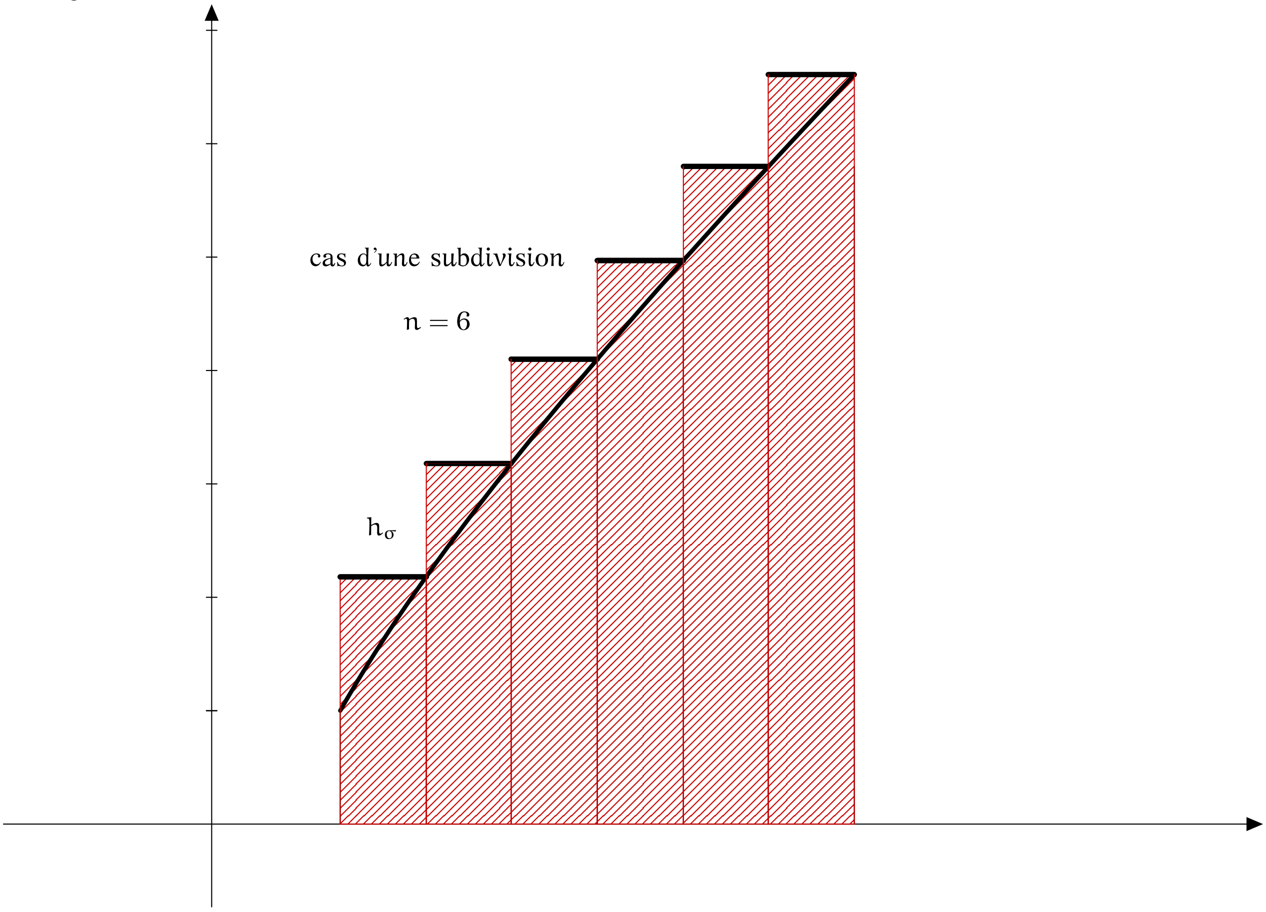
$$\int_a^b g_\sigma(x)dx \leq (b-a)f(b).$$

Démonstration . f *étant croissante sur* $[a;b]$ *:* $\forall x \in [a;b],\ g_\sigma(x) \leq f(x) \leq f(b)$.
L'inégalité voulue est obtenue en utilisant la croissance de l'intégrale. $\diamondsuit$

Lorsque σ parcourt toutes les subdivisions adaptées à f, l'ensemble $\{\int_a^b g_\sigma(x)dx\}$ forme une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$: elle possède donc une borne supérieure, notée I_-.

2.1.2 Fonctions en escalier majorant f

Soit $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision quelconque du segment $[a;b]$. Il est possible de définir de manière analogue la fonction h_σ en escalier sur $[a;b]$ dont un exemple est représenté ci-dessous :



En adaptant les résultats de la section précédente [a], on obtient le résultat suivant :

a. travail laissé en exercice.

Théorème 2.1. *Lorsque* σ *parcourt toutes les subdivisions adaptées à* f*, l'ensemble* $\{\int_a^b h_\sigma(x)dx\}$ *possède une borne inférieure, notée* I_+*.*

2.1.3 Conclusion et généralisation

Théorème 2.2. $I_+ = I_-$

Démonstration . *Montrons que pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* σ *telle que :* $\displaystyle\int_a^b h_\sigma(x)dx - \int_a^b g_\sigma(x)dx < \varepsilon$.

Or : $\displaystyle\int_a^b h_\sigma(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1})$ *et* $\displaystyle\int_a^b g_\sigma(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$.

Par suite : $\displaystyle\int_a^b h_\sigma(x)dx - \int_a^b g_\sigma(x)dx = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1}].[x_k - x_{k-1}]$.

Désignons par σ_ε *une subdivision telle que :* $\forall k, |x_k - x_{k-1}| < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$.

Alors : $\displaystyle\int_a^b h_\sigma(x)dx - \int_a^b g_\sigma(x)dx < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.\sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1}]$, *soit :* $\displaystyle\int_a^b h_\sigma(x)dx - \int_a^b g_\sigma(x)dx < \varepsilon$.

le réel ε *étant arbitrairement petit,* $I_+ = I_-$. $\diamondsuit$

Définition 2.1. *Le nombre* $\mathbf{I_+ = I_-}$ *est l'intégrale de f sur* $[a; b]$*. Il est noté :* $\displaystyle\int_a^b \mathbf{f(x)dx}$.

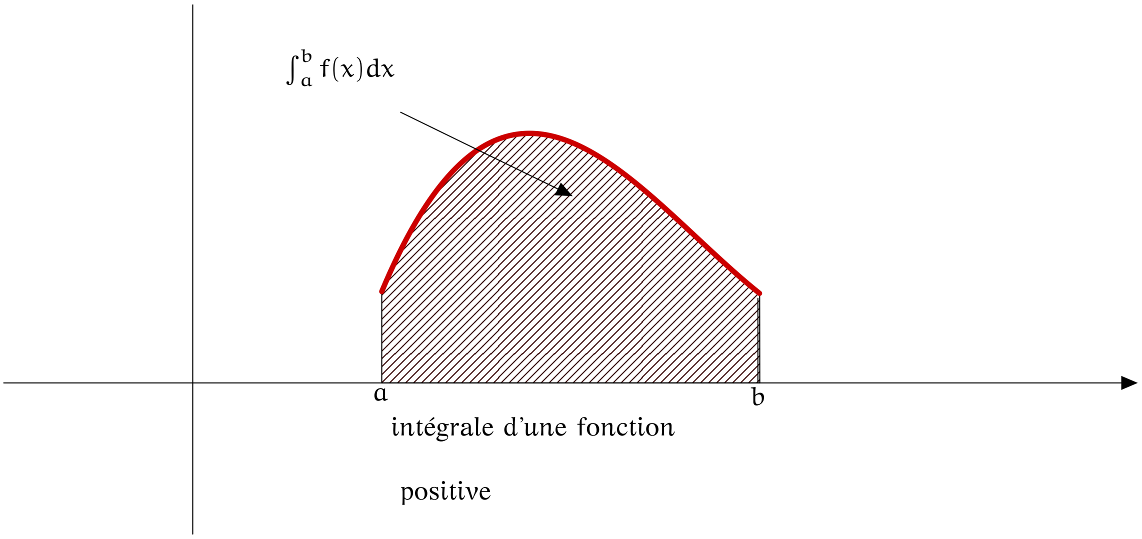
Propriété 2.4. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ ***correspond à l'aire du domaine du plan, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan délimité par la courbe représentative de*** f***, l'axe des abscisses ; et les droites d'équation*** $x = a$ ***et*** $x = b$.

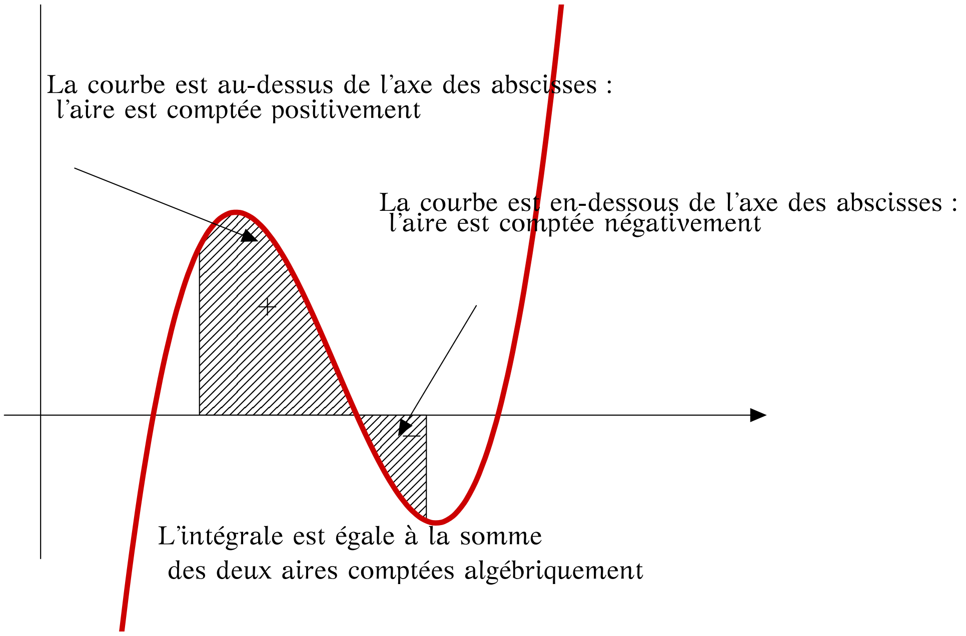
Démonstration . *admise*$\diamondsuit$

Généralisation

Il est possible de reprendre la méthode qui vient d'être détaillée pour une fonction positive et croissante sur $[a; b]$ pour toute fonction f continue sur le segment $[a; b]$, ce qui donne la définition suivante :

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, le réel noté $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est égal à l'aire *algébrique* comprise entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.





2.2 Lien entre intégrale et primitive

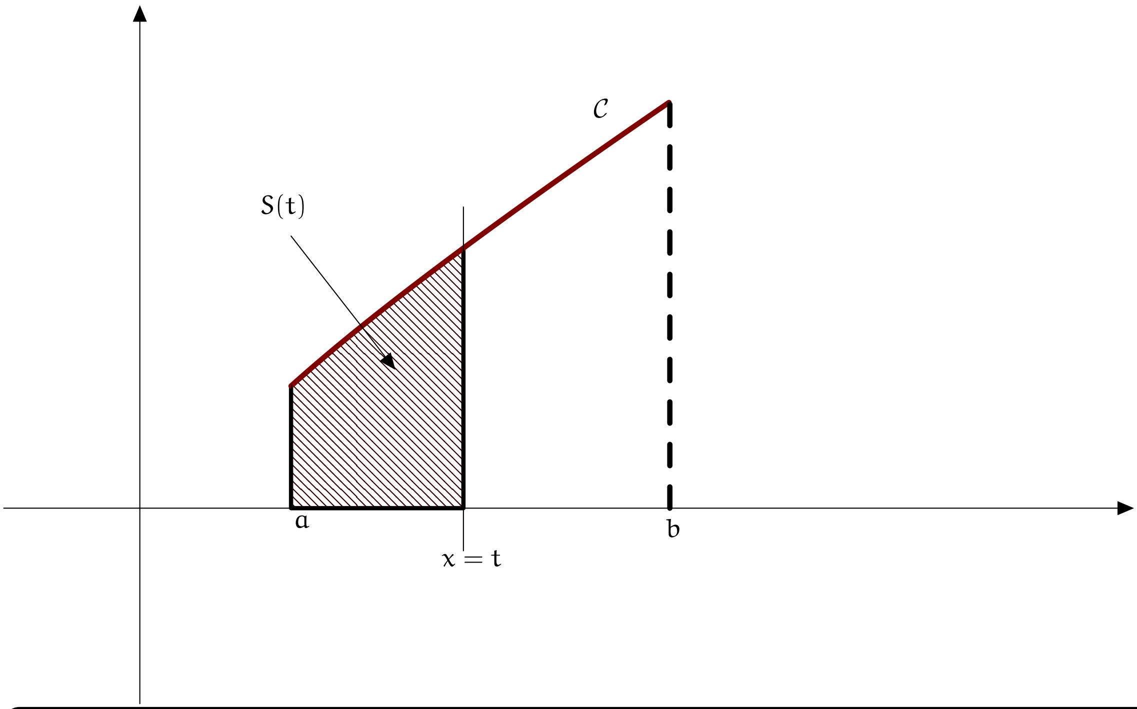
Soit f une fonction continue, positive et strictement croissante sur un intervalle $[a; b]$ représentée par la courbe $\mathcal{C}$. Pour t appartenant à $[a; b]$, on note $S(t)$ l'aire [a] du domaine hachuré $\mathfrak{D}$ sous la courbe.

Propriété 2.5. *$\mathfrak{D}$ est la partie du plan délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$:*

$$M(x; y) \in \mathfrak{D} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant & x & \leqslant b \\ 0 \leqslant & y & \leqslant f(x) \end{cases}$$

Propriété 2.6. *Si f est continue sur $[a; b]$, il en est de même pour S.*

a. aire géométrique - et donc algébrique- car $\mathcal{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses.



Théorème 2.3. *La fonction S est la primitive de f sur $[a;b]$ qui s'annule en a.*

Démonstration . *(cf. graphiques ci-dessous)*
Soit t_0 un réel fixé dans l'intervalle [a ;b[. Nous allons montrer que S est dérivable à droite en t_0.
Soient R_{inf} le rectangle $ABCD$ et R_{sup} le rectangle $AB'C'D$.
L'aire de R_{inf} est égale à $(t-t_0)f(t_0)$ et l'aire de R_{sup} est égale à $(t-t_0)f(t)$.
L'aire $S(t)-S(t_0)$ est comprise entre les aires de R_{inf} et de R_{sup}, donc :
$(t-t_0)f(t_0) \leqslant S(t)-S(t_0) \leqslant (t-t_0)f(t)$.
Par conséquent ($t-t_0<0$) :

$$f(t_0) \leqslant \frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0} \leqslant f(t).$$

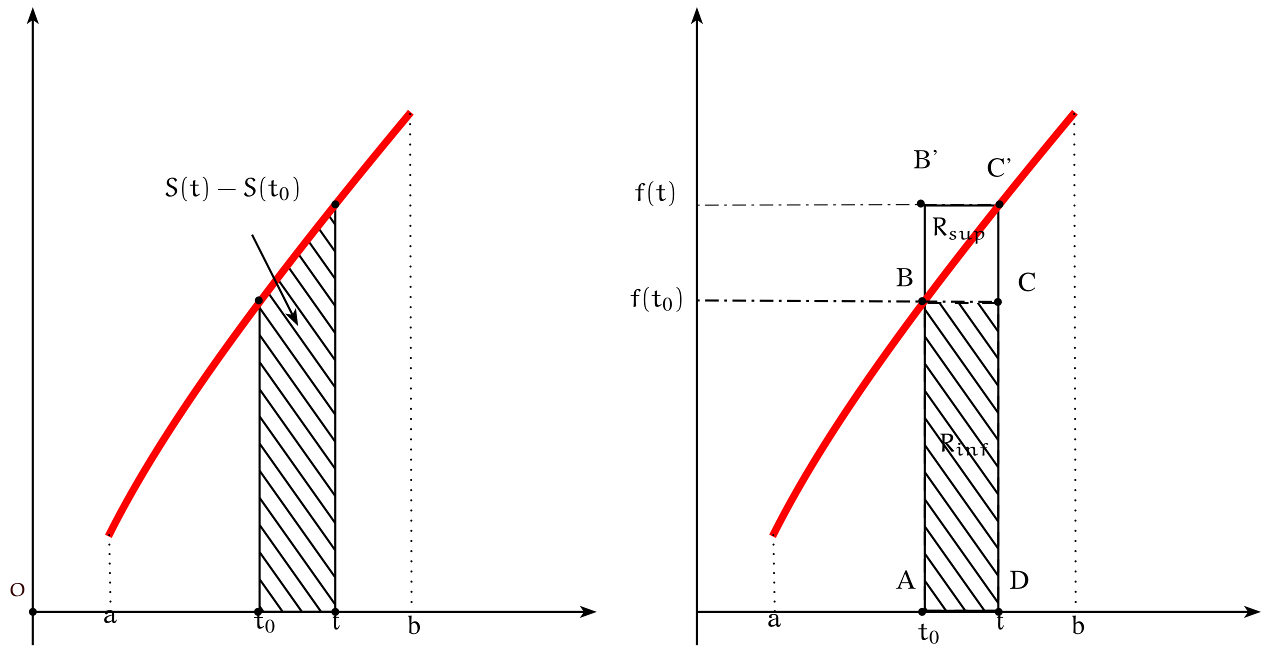
f étant continue en t_0 : $\lim\limits_{t\to t_0^+} f(t) = f(t_0)$, donc :

$$\lim_{t\to t_0^+} \frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0} = f(t_0)$$

On démontre de même que S est dérivable à gauche en t_0, élément de $]a;b]$ et que :

$$\lim_{t\to t_0^-} \frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0} = f(t_0)$$

Par conséquent : $\forall t_0 \in]a;b[, S'_d(t_0) = S'_g(t_0)$.
De plus S est continue sur $[a;b]$. Par conséquent S est dérivable sur $[a;b]$ et $S' = f$.
Pour finir la démonstration, il suffit de remarquer que $S(a) = 0$. $\diamondsuit$



Conséquence

$$\int_a^b f(x)\,dx = S(b).$$

Théorème 2.4. *Soit* f *une fonction continue sur* $[a,b]$. *Soit* F *l'une de ses primitive sur* $[a;b]$. *Alors :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Le réel $F(b)-F(a)$ *est souvent noté* $[F(x)]_a^b$ *(cf. exemples ci-dessous).*

Démonstration . *Il existe un réel* k *tel que* $F = S + k$. *Par conséquent :*
$F(b) - F(a) = (S(b)+k) - (S(a)+k) = S(b)$ *car* $S(a) = 0$. $\diamondsuit$

☞ **Remarque**
- Cette dernière égalité peut servir de définition à l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.
- Dans le programme de TS, on ne considère que l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Exemples :
- $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 - (-1) = 2.$
- Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\|$=2 cm et $\|\vec{j}\|$= 3 cm. Déterminer l'aire $\mathfrak{A}$ en cm^2 de la partie du plan définie par :

$$\begin{cases} 0 \leqslant & x & \leqslant 2 \\ 0 \leqslant & y & \leqslant e^{-x} \end{cases}$$

Dans un premier temps, il faut déterminer $\mathfrak{A}$ en unité d'aire. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ étant positive et 0<2 :

$$\mathfrak{A} = \int_0^2 e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^2 = 1 - e^{-2}.$$

Une unité d'aire étant égale à $2 \times 3 = 6cm^2$, l'aire recherchée est égale à $6(1-e^{-2})cm^2$.

2.3 Propriétés

Toutes les propriétés prouvées pour les intégrales de fonctions en escalier sont encore vraies.
Dans tout ce qui suit, toutes les fonctions introduites sont continues sur un intervalle I quelconque. F désigne une primitive quelconque de f sur I, G désigne une primitive quelconque de g sur I.

Relation de Chasles Pour TOUS réels a, b et c de I :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Démonstration . $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(c) - F(a) - (F(c) - F(b)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$. ♢

Propriété 2.7. ***Linéarité de l'intégrale***
Pour TOUS réels a, b de I, pour tous réels α et β :

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Démonstration . $\alpha F + \beta G$ *est une primitive sur* I *de* $\alpha f + \beta g$ *donc :*

$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)dx = (\alpha F(b) - \beta G(b)) - (\alpha F(a) - \beta G(a)) = \alpha(F(b) - F(a)) + \beta(G(b) - G(a))$

$= \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)$. ♢

Propriété 2.8. ***Positivité de l'intégrale***

- *Si* f *est positive sur* $[a; b]$ *et si* $a \leq b$, *alors :* $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- *Si* f *est négative sur* $[a; b]$ *et si* $a \leq b$, *alors :* $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

Propriété 2.9. • $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

• $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Démonstration . • $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b))$.

• $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$. ♢

Propriété 2.10. ***Croissance de l'intégrale***
• *Si* a *et* b *sont deux réels tels que* $a \leqslant b$ *;*
• *Si* $\forall x \in [a; b], f(x) \leqslant g(x)$ *;*
alors $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$.

Propriété 2.11. ***Intégrale et valeur absolue***
Si $a \leqslant b$, *alors pour toute fonction f continue sur* $[a; b]$ *:*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Théorème 2.5. ***Théorème fondamental***
La fonction définie sur $I : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ *est la primitive de* f *sur* I *qui s'annule en* a.

Propriété 2.12. ***Inégalité de la moyenne***
Si f *est bornée par* m *et* M *(i.e* $m \leq f \leq M$*) et si* $a \leq b$, *alors :*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Démonstration . *Il suffit d'utiliser la croissance de l'intégrale sur l'encadrement* $m \leq f \leq M$. $\diamondsuit$

Définition 2.2. ***Valeur moyenne de f***
Si $a < b$, *la valeur moyenne de la fonction f sur* $[a;b]$ *est le réel noté* μ *défini par :*

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Interprétation en physique :
Si f est la vitesse instantanée d'un mobile en mouvement, on sait que la fonction $d : t \mapsto d(t)$ ou $d(t)$ est la distance parcourue à l'instant t, est une primitive de f. Alors le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ peut s'écrire :$\frac{d(b)-d(a)}{b-a}$.
Ce nombre correspond à la vitesse moyenne du mobile sur l'intervalle de temps $[a;b]$, c'est-à-dire la vitesse constante qu'il faudrait donner au mobile pour qu'il parcoure la même distance pendant la même durée.

2.4 Intégration par parties

Cette partie n'est plus au programme de la Terminale S depuis la rentrée 2012. Elle l'est tout de même pour vous.

2.4.1 Etude d'un exemple

Posons : $I = \int_1^e \ln x dx$.

Pour calculer I, il faut trouver une primitive de la fonction $\ln$ ...
De la formule : $(FG)' = fG + Fg$, nous pouvons affirmer que FG est une primitive de $fG + Fg$, ce qui revient à dire que :

$$\int_a^b f(x)G(x)dx = [(FG)(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g(x)dx$$

(Ceci est licite car fG et gF sont continues sur $[a;b]$).
Posons donc : $f(x) = 1$ et $G(x) = \ln x$, cela donne : $F(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ et :

$$I = [x\ln x]_1^e - \int_1^e x.\frac{1}{x}dx$$

Le miracle se réalise devant nos yeux puisque nous obtenons :

$$I = [x\ln x]_1^e - \int_1^e 1dx$$

Ce qui tout calcul fait nous donne la valeur exacte de I : $I = 1$.
Mieux, en reprenant cette méthode avec $I = \int_1^x \ln t dt$, nous obtenons que la primitive de $\ln$ sur $]0;+\infty[$ s'annulant en 1 est $x \mapsto x\ln x - x + 1$.

Commentaire : cette méthode, dite d'intégration par parties, est motivée par le fait qu'il n'existe pas pas de formule générale donnant les primitives de fg connaissant F et G. Elle permet de trouver beaucoup de primitives, mais ne fonctionne pas à tout coup car la nouvelle intégrale obtenue n'est pas toujours aussi agréable que dans cet exemple. Par exemple, elle est inopérante pour la fonction $x \mapsto e^{x^2}$ pour laquelle il est possible de montrer que les primitives ne peuvent pas s'exprimer à l'aide des fonctions classiques que nous connaissons.

2.4.2 Formule d'intégration par parties

Théorème 2.6. *Si u et v deux fonctions dérivables sur $[a;b]$, et si les fonctions u' et v' sont continues sur $[a;b]$, alors :*

$$\int_a^b \mathbf{u(x)v'(x)dx} = [\mathbf{u(x)v(x)}]_a^b - \int_a^b \mathbf{u'(x)v(x)dx}.$$

Démonstration .

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx = \int_a^b u(x)v'(x) + u'(x)v(x)dx = \int_a^b (uv)'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b.$$

♢

☞ **Remarques**
• L'hypothèse u, u', v et v' continues sur $[a;b]$ est primordiale pour appliquer ce théorème. Il faut absolument le mentionner pour pour pouvoir l'appliquer !
• Par contre, l'ordre des bornes d'intégration peut être quelconque.

2.5 Formule de changement de variables

Théorème 2.7. *Soient $u : I \to J$ une fonction dérivable sur I et de dérivée continue sur I. Soit f une fonction continue sur J.*
Alors pour tous réels a et b de I : $\displaystyle\int_a^b \mathbf{f(u(t))u'(t)dt} = \int_{u(a)}^{u(b)} \mathbf{f(x)dx}.$

Démonstration . $F(u)$ *est une primitive de* $u'.f(u)$ *donc....* ♢

Exemples :
Exemple 1
Calcul de $\displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t + t\ln t}$
On utilise le changement de variable $x = \ln t$. On écrit [a] alors $dx = \dfrac{dt}{t}$.
Pour $t = 1$, $x = 0$ et pour $t = e$, $x = 1$.
On obtient alors : $\displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t + t\ln t} = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln 2.$
Exemple 2
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ telle que : $\forall x \in [a;b], f(a+b-x) = f(x)$.
• Montrer que $\displaystyle\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$
Application (nécessitant la connaissance de la fonction arctan) :
• En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$

a. Voir explications en classe

3 Intégrale généralisée : recherche d'un équivalent simple d'une série de Riemann

α désigne un réel donné de $]1;+\infty[$. Le but de cet exercice est de montrer que la suite S définie par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

est convergente et de donner un équivalent simple de son reste de rang n.

1. En utilisant la méthode des rectangles, montrer que :

$$\forall k \geqslant 2, \quad \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

2. En déduire que :

$$\forall n \geqslant 1, \forall m \geqslant n+1, \quad \int_{n+1}^{m+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{n}^{m} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

3. Montrer l'existence de l'intégrale : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$.
4. Montrer que S est croissante et qu'elle est convergente. Sa limite sera notée $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.
5. Justifier l'existence de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ appelé reste de la série de rang n, où n désigne un entier naturel donné.
6. Justifier l'encadrement suivant :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant R_n \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

7. En déduire que :

$$R_n \sim \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Rappel : Suites équivalentes. Si la suite v ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors :

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \to 1.$$

4 Exercices

Exercice 107. Intégrales de Wallis. Intégrale de Gauss. Formule de Stirling.
Partie A : Intégrales de Wallis
Pour tout entier naturel n, on pose :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que la suite W est décroissante et strictement positive.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

4. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :
   (a)

$$1 \leqslant \frac{W_n}{W_{n+1}} \leqslant \frac{n+2}{n+1}.$$

(b)

$$\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \frac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}(p!)^2} \qquad \text{et} \qquad \forall p \in \mathbb{N}, I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

5. Montrer que la suite $\left(\dfrac{W_n}{W_{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
6. On pose pour tout entier n : $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. Montrer que la suite u est constance et déterminer u_n pour tout entier n.
7. Déduire des questions précédentes la limite de la suite $(nW_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, puis celle de $(\sqrt{n}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
8. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Partie B : Calcul de l'intégrale de Gauss

1. Démontrer que pour tout x de $]-1,+\infty[$ on a :
$$\ln(1+x) \leqslant x.$$
2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$\forall t \in [0,\sqrt{n}],\ \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$
3. Montrer que pour tour entier naturel n non nul, on a :
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} u du.$$
On pourra poser $t = \sqrt{n}\cos u$.
4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} = \sqrt{n}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} u du.$$
On pourra poser $t = \sqrt{n}\,\mathrm{cotan}\, u$.
5. En déduire que pour tout n non nul, on a :
$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}.$$
6. Démontrer la convergence de l'intégrale de Gauss définie par $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et en donner sa valeur.

Partie C : Formule de Stirling

On considère la suite (a_n) définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par : $a_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{e}{n}\right)^n$.

1. Soient f et g les applications définies sur $]0;1[$ par :
$$f(x) = \frac{3x-2x^3}{3(1-x^2)} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ et } g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x - \frac{x^3}{3}.$$
Etudier les variations de f et g sur $]0;1[$, ainsi que leur valeur en 0.
En déduire que, pour tout x de $]0;1[$, on a :
$$x + \frac{x^3}{3} < \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) < x + \frac{x^3}{3(1-x^2)}.$$
2. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n :
$$\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = \frac{1}{2u_n}\ln\left(\frac{1+u_n}{1-u_n}\right) - 1 \text{ où } u_n = \frac{1}{2n+1}.$$
En déduire que, pour tout entier naturel non nul n :
$$\frac{1}{12(n+1)(n+2)} < \ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) < \frac{1}{12n(n+1)}.$$

3. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ les deux suites définies par :
$$x_n = \ln a_n - \frac{1}{12n} \text{ et } y_n = \ln a_n - \frac{1}{12(n+1)}.$$
Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite
En déduire que la suite (a_n) converge vers une limite ℓ.
Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{2n}}{a_n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{I_{2n}\sqrt{2n}}{\pi}.$$
En déduire que $\ell = \sqrt{2\pi}$.
4. En déduire la **Formule de Stirling** :
$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

Exercice 108. Noyau de Dirichlet
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note D_n le *noyau de Dirichlet*, défini par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx.$$

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $x \not\equiv 0[2\pi]$, on a :
$$D_n(x) = \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}.$$
2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note L_n l'intégrale :
$$L_n = \int_0^{\pi} xD_n(x)dx.$$
   (a) Calculer l'intégrale $\int_0^{\pi} x\cos(kx)dx$ pour tout entier $k \geqslant 1$.
   (b) En déduire que :
$$L_n = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1}{k^2}.$$
3. On note f le prolongement par continuité en 0 de la fonction définie sur l'intervalle $]0;\pi]$ par :
$$x \mapsto \frac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$
Démontrer que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $[0;\pi]$.
4. Soit $\phi : [0;\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[0;\pi]$. Démontrer que :
$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\pi}\phi(x)\sin(\lambda x)dx = 0.$$
5. Démontrer que : $\lim_{n\to+\infty} L_n = 0$.

Exercice 109 (85 EXP SUITE). 1. Calculer $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

2. n étant un entier naturel non nul, on pose : $S(n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}e^{-\frac{k}{n}}$.
Montrer que $S(n)$ a une limite lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$. Préciser cette limite.

Exercice 110. [85 INTEGRALE] Pour tout entier naturel n on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$$

1. Montrer qu'il existe des réels a et b tels que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \qquad \frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x}{1-\sin x} + \frac{b\cos x}{1+\sin x}.$$

En déduire le calcul de I_0.

2. Montrer, par une intégration par parties, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}.$$

En déduire le calcul de I_2.

Exercice 111 (83 INTEGRALES). Pour tout entier n strictement positif, on pose :

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1}n!}\int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}}\,dt.$$

1. Calculer I_1.
2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = I_n - \dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$.
3. En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{e} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} + I_n$.
4. Montrer qu'il existe une constante A telle que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2^n n!}A$.
(On pourra étudier la fonction $t \mapsto (1-t)e^{\frac{t}{2}}$ sur [0 ;1]).
5. En déduire la limite de la suite u telle que $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!}$.

Exercice 112 (Dijon bac E, 1974). Le but du problème est la détermination d'un encadrement de π en calculant de deux façons l'intégrale :

$$I = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Partie A : Méthode donnant la valeur exacte de I.

1. Calculer $\tan\theta$ en fonction de $\tan\dfrac{\theta}{2}$. En déduire que $\tan\dfrac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$.
2. Soit f l'application de $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \tan x$. Démontrer que f admet un application réciproque F de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$. Dresser le tableau de variations de F.
3. Déterminer F'.
En déduire que :

$$I = \frac{\pi}{12}$$

Partie B : Méthode donnant un encadrement de I.

1. (a) Calculer $(2-\sqrt{3})^3$ et $(2-\sqrt{3})^4$ en fonction de $\sqrt{3}$.

   (b) Vérifier que pour tout x réel :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{1+x^2}.$$

2. Calculer en fonction de $\sqrt{3}$:

$$J = \int_0^{2-\sqrt{3}} 1 - x^2\,dx.$$

3. On désigne par K l'intégrale :
$$K = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{x^4}{1+x^2} dx.$$
   (a) Démontrer que pour tout x réel positif :
$$\frac{x^4}{1+x^2} \leqslant \frac{x^3}{2}.$$
   (b) En déduire que :
$$0 \leqslant K \leqslant \frac{97}{8} - 7\sqrt{3}.$$
4. Trouver une relation simple entre I, J et K. En déduire :
$$4\sqrt{3} - \frac{20}{3} \leqslant I \leqslant \frac{131}{24} - 3\sqrt{3}.$$
   Sachant que $1,73205 \leqslant \sqrt{3} \leqslant 1,73206$, déterminer le meilleur encadrement de π possible en utilisant les données du problème.

Exercice 113. Soit f une fonction continue à dérivée continue sur [a ;b]. On pose : $I = \int_a^b f(t)\sin(nt)dt$.
Montrer à l'aide d'une intégration par parties que la suite (I_n) tend vers 0.

Exercice 114. Liban 1978
L'objet de ce problème est de calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt$

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f : x \mapsto f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x}{\cos^2 t}} dt$.
   Montrer que : $\forall x \geq 0, f(x) \leq e^{-x}$.
   Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. (a) Montrer que pour tout réel b strictement positif :
$$\forall x \in \mathbb{R}, x \leq b \Longrightarrow e^x - 1 - x \leq \frac{1}{2}e^b x^2.$$
   Montrer que pour tout réel b strictement positif :
$$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq -b \Longrightarrow e^x - 1 - x \geq \frac{1}{2}e^{-b} x^2.$$
   (b) Montrer que pour tout réel a, il existe une application ϕ_a de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en a, telle que $\phi_a(a) = 0$, et :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - f(a) = (x-a)\left[-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-\frac{a}{\cos^2 t}}}{\cos^2 t} dt + \phi_a(x)\right].$$
   En déduire que f est dérivable, et donner l'expression de f'.
3. Soit P une primitive sur $\mathbb{R}$ de l'application $u :\mapsto e^{-u^2}$ (on ne cherchera pas à la calculer).
   A tout réel x, on associe l'application Q_x de $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par
   $t :\mapsto Q_x(t) = P(x\tan t)$, où x est un paramètre.
   Montrer que Q_x est dérivable sur I, et expliciter sa dérivée, c'est-à-dire $\frac{dQ_x}{dt}$.
   Prouver que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_0^x e^{-u^2} du = x\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2\tan^2 t}}{\cos^2 t} dt$$
4. Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x^2)$.
   Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2} dt.$$
   Que peut-on dire de la fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $h(x) = g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2$?
   Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt$

Exercice 115 (exo 7). Soit $F(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt$.

1. Quel est l'ensemble de F ?
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}F(x)$ en comparant F à $H(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}dt$.

Exercice 116. Soit la suite numérique $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par :

$$I_n=\frac{1}{n!}\int_0^1(1-x)^n e^x dx.$$

1. Calculer I_1
2. Par intégration par parties, exprimer I_n en fonction de I_{n-1} pour $n\geqslant 2$.
   En déduire que : $I_n=e-\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}$ pour $n\geqslant 1$.
3. Majorer la fonction $x\mapsto(1-x)^n e^x$ sur l'intervalle $[0;1]$.
   En déduire de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et montrer que :

$$e=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

Exercice 117. Espagne 87.
Pour tout entier naturel non nul n, on note f_n la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f_n(x)=\frac{x^n e^{-x}}{n!}\cdot$$

On appelle C_n la courbe représentative de f_n dans un repère (unités : 2 cm en abscisses et 10 cm en ordonnées).

Partie A

1. Etablir le tableau de variations de f_n sur $[0;+\infty[$.
2. Pour tout entier $n\geqslant 2$, étudier la position relative de C_n et C_{n-1} et vérifier que le point $A_n(n;f_n(n))$ appartient à C_{n-1} .
3. Construire dans un même repère C_1 C_2 et C_3. On placera les tangentes en O à ces trois courbes.

Partie B Le but de cette partie est d'étudier la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=f(n)$.

1. (a) En utilisant les résultats de la partie précédente, démontrer que la suite u est décroissante.
   (b) Cette suite est-elle convergente ?
2. (a) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$g(t)=\ln(1+t)-t+\frac{t^2}{4}\cdot$$

   En utilisant les variations de g, démontrer que pour tout t de $[0;1]$ on a :

$$\ln(1+t)\leqslant t-\frac{t^2}{4}\cdot$$

   (b) En déduire que pour tout entier naturel $n>0$, on a :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant e^{1-\frac{1}{4n}}.$$

3. (a) Démontrer que pour tout entier $n>0$ on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant e^{-\frac{1}{4n}}.$$

(b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a :

$$u_n \leqslant e^{-1-\frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right)}.$$

4. (a) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$\int_1^n \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

(b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$u_n \leqslant e^{-1-\frac{1}{4}\ln n}.$$

(c) Quelle est la limite de la suite u ?

Partie C Pour tout entier $n > 0$ et pour tout réel a positif ou nul, fixé, on pose :

$$I_n(a) = \int_0^a f_n(t)dt.$$

1. Calculer $I_1(a)$.
2. Démontrer que pour tout entier $n > 0$ et tout réel t positif ou nul, on a :

$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{t^n}{n!}.$$

En déduire un encadrement de $I_n(a)$.

3. (a) Démontrer que pour tout entier $n > 0$, on a :

$$\frac{1}{n!} < \left(\frac{e}{n}\right)^n.$$

(b) Déterminer alors une nouvelle majoration de $I_n(a)$, puis la limite de $I_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$.

4. (a) Etablir pour tout entier $n \geqslant 2$ une relation entre $I_n(a)$ et $I_{n_1(a)}$.

(b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ on a :

$$I_n(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k!}\right).$$

Cette égalité est-elle vraie pour $n = 1$?

5. Démontrer que pour tout a de $[0; +\infty[$, on a :

$$e^a = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{a}{1!} + \cdots + \frac{a^n}{n!}\right).$$

Exercice 118. Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
A tout entier n, on associe la fonction f_n définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x).$$

Le problème est consacré à l'étude de la famille des fonctions f_n et à celle d'une suite liée à ces fonctions f_n.
On désigne par C_n la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphique 2 cm.
I. Etude des fonctions f_n.

1. Soit h_n la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

Etudier le sens de variation de h_n. En utilisant la valeur de $h_n(0)$, déterminer le signe de h_n sur $]-1; +\infty[$.

2. (a) Pour tout x appartenant à $]-1;+\infty[$ vérifier que :

$$f_1'(x) = h_1(x),$$

et que pour tout n strictement supérieur à 1,

$$f_n'(x) = x^{n-1}h_n(x).$$

(b) On suppose n impair. Pour tout x de appartenant à $]-1;+\infty[$ justifier que $f_n'(x)$ et $h_n(x)$ sont de même signe.
Dresser alors le tableau de variations de la fonction f_n lorsque n est impair, en précisant ses limites en -1 et $+\infty$.

(c) On suppose n pair. Dresser de même le tableau de variations de f_n en précisant ses limites en -1 et $+\infty$.

3. (a) Etudier la position relative des courbes C_1 et C_2.

(b) Tracer ces deux courbes.

II. Etude d'une suite.
Dans cette partie, u désigne la suite définie pour n supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx.$$

1. Etude de la convergence.

(a) Démontrer que :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\ln 2}{n+1}.$$

(b) En déduire que la suite u est convergente et donner sa limite.

(c) A l'aide de l'encadrement obtenu précédemment, déterminer un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\ln 2}{100}.$$

2. Calcul de u_1.

(a) En remarquant que pour tout x appartenant à $[0;1]$, on a :

$$\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{x+1}.$$

Calculer :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx.$$

(b) Calculer u_1 au moyen d'une intégration par parties.

3. Calcul de u_n.
Pour tout x de $[0;1]$ et pour tout $n \geqslant 2$, on pose :

$$S_n(x) = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n. \qquad (1)$$

(a) Démontrer que :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall x \in [0;1],\ S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}. \qquad (2)$$

(b) En déduire que :

$$\forall n \geqslant 2,\ \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx.$$

(c) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$u_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p+1}\right].$$

4. Application

   Soit E l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifiant :
$$0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad f_2(x) \leqslant y \leqslant f_1(x).$$
   Calculer u_2 et en déduire l'aire de E en cm^2.

Exercice 119. [BordeauxC 1991]
Le problème a pour objet :
• Dans la partie A. d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle [0 ;1] par :
$$f(x) = \frac{-x^2 \ln x}{1+x} \text{ si } x \neq 0, \text{ et } f(0) = 0.$$
• Dans la partie B. de calculer une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_0^1 f(t)dt$.
• Partie A. **Etude et représentation graphique de** f. le plan est rapporté au repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 10 cm sur $x'x$ et 20 cm sur $y'y$)
On désigne par C la courbe représentative de f dans ce repère.
I. **Etude d'une fonction auxiliaire.**
Soit u la fonction définie sur $]0;1]$ par :
$$u(x) = \frac{1+x}{2+x} + \ln x.$$
1. Montrer que la fonction u est strictement croissante sur ensemble de définition. Donner son tableau de variations en précisant la limite en 0 et la valeur en 1.
2. En déduire que u s'annule pour un unique nombre réel β compris entre 0 et 1.
   Monter que :
$$0,54 < \beta < 0,55.$$

II. **Etude et représentation graphique de f.**
1. (a) Etudier la limite de f en 0.
   (b) Montrer que la fonction f est continue sur [0; 1].
2. (a) Etudier la dérivabilité de f en 0.
   (b) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et vérifier que $f'(x)$ et $-u(x)$ ont le même signe.
3. Donner le tableau de variations de f.
4. Construire la courbe C en précisant les tangentes aux points d'abscisses respectives 0 et 1.

• Partie B. Justifier l'existence de l'intégrale I. (On ne cherchera pas à déterminer une primitive de f).
I. **Etude d'une intégrale auxiliaire.**
Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. On désigne par g_n la fonction numérique définie sur [0; 1] par :
$$g_n(t) = -t^n \ln t \quad \text{si} \quad t > 0 \quad \text{et} \quad g_n(0) = 0.$$
1. Démontrer que g_n est continue sur [0; 1].
2. Soit G_n la fonction définie sur [0; 1] par : $\begin{cases} G_n(t) &= -\dfrac{t^{n+1}\ln t}{n+1} + \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)^2} \qquad \text{si } t > 0 \\ G_n(0) &= 0 \end{cases}$.
   (a) Montrer que G_n est une primitive de g_n sur [0; 1].
   (b) En déduire la valeur de l'intégrale :
$$I_n = \int_0^1 g_n(t)dt.$$

II. **Etude de** I.
1. Soit t un nombre réel et n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
   (a) Calculer le produit :
$$P_n(t) = (1+t)(1-t+t^2+\cdots+(-1)^n t^n).$$

(b) En déduire que pour tout nombre t différent de 1 :

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2+\cdots+(-1)^n t^n+(-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{1+t}.$$

(c) Montrer que pour tout réel t de $[0;1]$:

$$f(t)=g_2(t)-g_3(t)+\cdots+(-1)^{n+1}g_{n+1}(t)+(-1)^n\frac{g_{n+2}(t)}{t+1},$$

puis que :

$$I=I_2-I_3+\cdots+(-1)^{n+1}I_{n+1}+(-1)^n\int_0^1\frac{g_{n+2}(t)}{t+1}dt.$$

(d) Montrer que :

$$0\leqslant\int_0^1\frac{g_{n+2}(t)}{t+1}dt\leqslant\frac{1}{(n+3)^2}.$$

2. Soit $n\geqslant 1$ un entier naturel. On pose :

$$S_n=\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+2)^2}.$$

(a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=I$.

(b) Montrer que $S_8\leqslant I\leqslant S_9$.

(c) En déduire une valeur approchée de I à 5.10^{-3} prés.

Exercice 120. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}t\,dt \quad \text{et} \quad b_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos^{2n}t\,dt.$$

1. (a) Calculer a_0 et b_0 et montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n>0.$$

(b) Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+1}=\frac{2n+1}{2n+2}a_n.$$

2. (a) Montrer que :

$$\forall t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right],\ t\leqslant\frac{\pi}{2}\sin t.$$

(b) En déduire que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leqslant b_n\leqslant\frac{\pi^2}{4}(a_n-a_{n+1}).$$

(c) En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_n}=0.$$

3. (a) Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+1}=(2n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin t\cos^{2n+1}t\,dt.$$

En déduire que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \frac{a_{n+1}}{n+1}=(2n+1)b_n-(2n+2)b_{n+1}.$$

(b) En déduire que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 2\left(\frac{b_n}{a_n}-\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{(n+1)^2}.$$

4. Prouver que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

5 Les intégrales au baccalauréat

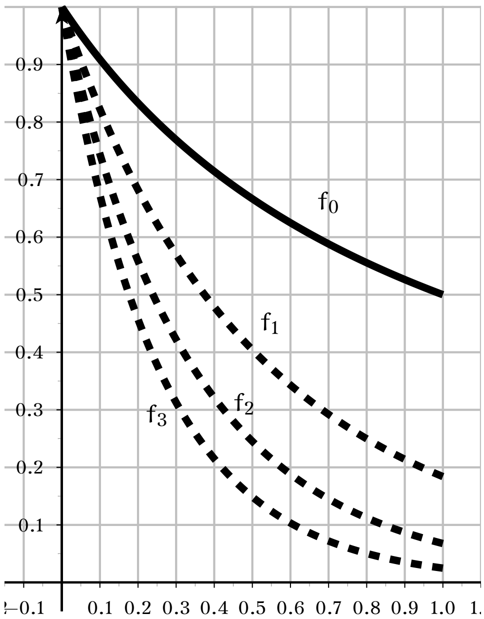
Exercice 121. Pondichery avril 2012 On considère les suites (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}\,dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2}\,dx.$$

1. Sont représentées ci-dessous les fonctions f_n définies sur l'intervalle [0 ; 1] par

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+x}$$

pour différentes valeurs de n :



   (a) Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en expliquant la démarche.

   (b) Démontrer cette conjecture.

2. (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ; 1] :

$$0 \leqslant \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \frac{e^{-nx}}{1+x} \leqslant e^{-nx}.$$

   (b) Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

3. (a) Montrer, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$I_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{e^{-n}}{2} - J_n\right).$$

   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

Exercice 122. Amérique du Nord mai 2012
Soit f une fonction définie et dérivable sur [0 ; 1] telle que :

$$f(0) = 0 \text{ et } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ pour tout } x \text{ de } [0\ ;\ 1].$$

On ne cherchera pas à déterminer f.
Partie A

1. Déterminer le sens de variation de f sur [0 ; 1].
2. Soit g la fonction définie sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$ par $g(x) = f(\tan(x))$.

(a) Justifier que g est dérivable sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$, puis que, pour tout x de $\left[0\,;\ \frac{\pi}{4}\right]$, $g'(x) = 1$.

(b) Montrer que, pour tout x de $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$, $g(x) = x$, en déduire que $f(1) = \frac{\pi}{4}$.

3. Montrer que, pour tout x de $[0\ ;\ 1]$, $0 \leq f(x) \leqslant \frac{\pi}{4}$.

Partie B Soit (I_n) la suite définie par $I_0 = \int_0^1 f(x)dx$ et, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \int_0^1 x^n f(x)dx$.

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, $I_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n \geqslant 0$.

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n \leqslant \frac{\pi}{4(n+1)}$.

   (c) En déduire la limite de la suite (I_n).

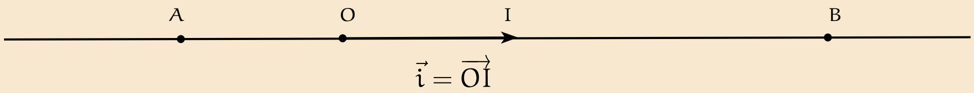
Dixième partie

Mesures algébriques

1 Définition

Définition 1.1. *Soient* A *et* B *deux points d'un axe* $(O, \vec{i})$. *La mesure algébrique du vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *relativement au vecteur unitaire* $\vec{i}$ *de cet axe est le réel noté* $\overline{AB}$ *défini par :*

$$\overline{AB} = x_B - x_A.$$



Exercice 123. Soient (O, I) et (O', I') deux repères de la droite (AB). Montrer qu'il existe deux réels α et β avec α non nul, tels que tout point M de (AB) d'abscisse x dans le repère (O, I) a pour abscisse $x' = ax + b$ dans le repère (O', I').

2 Propriétés

A, B et C désignent trois points quelconques d'un même axe $(O, \vec{i})$. Les démonstrations sont laissées en exercice (utiliser les abscisses).

Propriété 2.1.
- $\overline{BA} = -\overline{AB}$
- $\overline{AB}^2 = AB^2$
- *Relation de Chasles :* $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$
- $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$
- $\overline{AB}$ *est indépendant de l'origine choisie sur l'axe*
- $\overline{AB} = 0 \Leftrightarrow A = B$
- $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\vec{i}$
- $x_B = \dfrac{\overline{OM}}{\overline{OI}}$

Propriété 2.2. ***Quotient de mesures algébriques***

Soient A, B, C *et* D *quatre points alignés distincts deux à deux. Alors le quotient* $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ *ne dépend pas du repère choisi sur la droite* (AB).

Démonstration . *Soient* (O, I) *et* (O', I') *deux repères de la droite* (AB). *D'après l'exercice précédent, il existe* α *et* β *réels que tout point* M *de* (AB) *d'abscisse* x *dans le repère* (O, I) *a pour abscisse* $x' = ax + b$ *dans le repère* (O', I'). *Il en résulte donc que :*

$$\frac{\overline{AB}_{(O',I')}}{\overline{CD}_{(O',I')}} = \frac{b' - a'}{d' - c'} = \frac{(\alpha b + \beta) - (\alpha a + \beta)}{(\alpha d + \beta) - (\alpha c + \beta)} = \frac{b - a}{d - c} = \frac{\overline{AB}_{(O,I)}}{\overline{CD}_{(O,I)}}$$

$\diamondsuit$

Cette dernière propriété est fondamentale pour énoncer le théorème de Thalès (cf. infra)

3 Barycentres

Dans cette section, nous nous placerons, sauf mention contraire, indifféremment dans le plan ou dans l'espace qui seront notés E.

3.1 Barycentre d'un système de deux points pondérés

3.1.1 Définitions

Théorème 3.1. *Soit* $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ *un système de deux points pondérés tels que* $\alpha+\beta\neq 0$. *Il existe un unique point* G *tel que :*
$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}.$$

Définition 3.1. G *est appelé barycentre du système* $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$.

Démonstration . *Il suffit d'utiliser la relation de Chasles :*

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}=\beta\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{(\alpha+\beta)}\overrightarrow{AB}.$$

Cette dernière égalité prouve l'existence et l'unicité de G[a].♢

Définition 3.2. *Si* $\alpha=\beta\neq 0$, G *est appelé isobarycentre de* A *et de* B.

Propriété 3.1. *L'isobarycentre de deux points* A *et* B *est le milieu du segment* [AB].

☞ **Remarques**

1. Si A et B sont confondus et si $\alpha+\beta\neq 0$, alors G existe et est confondu avec A et B.
2. Si $\alpha=0$ et $\beta\neq 0$, alors G existe et est confondu avec B.
3. Si $\alpha\neq 0$ et $\beta=0$, alors G existe et est confondu avec A.
4. Si $\alpha+\beta=0$, nous avons dans ce cas :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Leftrightarrow\alpha\overrightarrow{BA}=\vec{0}.$$

   • Si $\alpha=0$ ou si A et B sont confondus, l'égalité précédente est équivalente à $\vec{0}=\vec{0}$. Dans ce cas, tout point M vérifie l'égalité $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.
   • Si $\alpha\neq 0$ et si $A\neq B$, alors $\alpha\overrightarrow{BA}\neq\vec{0}$. Dans ce cas, il n'existe aucun point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

3.1.2 Propriétés

Soit $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ un système de deux points pondérés tels que $\alpha+\beta\neq 0$. Soit G le barycentre de ce système.

Propriété 3.2. *Pour tout point* M, *on a :*

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}.$$

a. Rappelons cette propriété essentielle, vraie dans le plan et l'espace :
Soit $\vec{u}$ un vecteur donné et soit A un point quelconque. Il existe alors un unique point B tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$

Propriété 3.3. • *Si* A *et* B *appartiennent à un plan muni d'un repère quelconque, alors :*

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \qquad \text{et} \qquad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}.$$

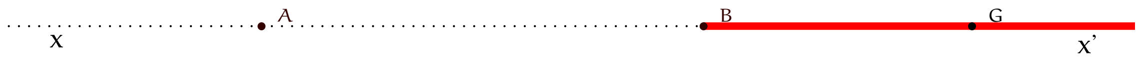
•*Si* A *et* B *appartiennent à l'espace muni d'un repère quelconque, alors :*

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \qquad \text{et} \qquad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \qquad \text{et} \qquad z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}.$$

x_G *(reps.* y_G *; resp* z_G*) est donc la moyenne pondérée des réels* x_A *et* x_B *(resp. de* y_A *et* y_B *; resp. de* z_A *et* z_B*) affectés des coefficients* α *et* β.

Propriété 3.4. ***Position de*** G
Ici, A *et* B *sont distincts.*
• G *appartient à la droite* (AB)
• *Si* α *et* β *sont de même signe, alors* G *appartient au segment* [AB]*. Dans ce cas,* G *est plus prés du point ayant le plus grand poids en valeur absolue que de l'autre point.*
• *Si* α *et* β *sont de signes contraires, alors* G *est à l'extérieur de* [AB].
Plus précisément :
G *appartient à* (xA] *si* $|\alpha| > |\beta|$:

G appartient à $[Bx')$ si $|\alpha| < |\beta|$:



Propriété 3.5. ***homogénéité du barycentre***
Soit k *un réel non nul. Alors* G *est aussi barycentre du système* $\{(A, k\alpha), (B, k\beta)\}$.

Exemple : les systèmes $\{(A, -4), (B, -8)\}$; $\{(A, 4), (B, 8)\}$; $\{(A, 1), (B, 2)\}$ ont le même barycentre.

Propriété 3.6. *Soient* A *et* B *deux points distincts.*
• *L'ensemble des barycentres des points* A *et* B *est la droite* (AB).
• *Le segment* [AB] *est l'ensemble des barycentres de* A *et* B *affectés de coefficients positifs ou nuls. C'est aussi l'ensemble des barycentres des systèmes* $\{(A, t), (B, 1-t)\}$ *lorsque* t *varie dans* $[0; 1]$.

3.2 Barycentre d'un système de trois points pondérés

3.2.1 Définitions

Théorème 3.2. *Soit* $\{(A,\alpha),(B,\beta);(C,\gamma)\}$ *un système de trois points pondérés tels que* $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$. *Il existe un unique point* G *tel que :*

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$

G est appelé barycentre du système $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$.

Définition 3.3. *Si* $\alpha=\beta=\gamma\neq 0$, G *est appelé isobarycentre des points* A,B *et* C.

3.3 Propriétés

Soit $\{(A,\alpha),(B,\beta);(C,\gamma)\}$ un système de trois points pondérés tels que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$. Soit G le barycentre de ce système.

Propriété 3.7. *Pour tout point* M, *on a :*

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}.$$

Propriété 3.8. *Si* A , B *et* C *appartiennent à un plan muni d'un repère quelconque, alors :*

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}\qquad\text{et}\qquad y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Si A,B *et* C *appartiennent à l'espace muni d'un repère quelconque, alors :*

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}\qquad\text{et}\qquad y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\qquad\text{et}\qquad z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

x_G *(resp.* y_G *; resp.* z_G*) est donc la moyenne pondérée des réels* x_A, x_B *et* xC *(resp. de* y_A, y_B *et* y_C *; resp. de* z_A, z_B *et* z_C*) affectés respectivement des coefficients* α,β *et* γ.

Propriété 3.9. ***Position de*** G
- *Si* $A=B=C$, *alors G est confondu avec ces trois points.*
- *Si* A,B *et* C *sont alignés, alors* G *appartient à la droite* (AB).
- *Si Si* A,B *et* C *ne sont alignés, alors* G *appartient au plan* (ABC).

Ce dernier cas -quoique vrai dans le plan- n'a de réel intérêt que dans l'espace : A,B,C et G sont coplanaires.

Propriété 3.10. ***homogénéité du barycentre***
Soit k *un réel non nul. Alors* G *est aussi barycentre du système* $\{(A,k\alpha),(B,k\beta);(C,k\gamma)\}$.

Théorème 3.3. ***Théorème du barycentre partiel- ou d'associativité du barycentre***
Soit $\{(A,\alpha),(B,\beta);(C,\gamma)\}$ *un système de trois points pondérés tels que* $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, *de barycentre* G. *Si* $\alpha+\beta\neq 0$, *et si* G' *est le barycentre de* $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$, *alors* G *est le barycentre du système* $\{(G',\alpha+\beta),(C,\gamma)\}$.

Conséquence

L'isobarycentre de trois points A,B et C est le centre de gravité du triangle (ABC).

Propriété 3.11. *Soient* A, B *et* C *trois points non alignés. L'ensemble des barycentres des points* A, B *et* C *est le plan* (ABC).

3.4 Barycentre d'un système de n points pondérés

3.4.1 Fonction vectorielle de Leibniz

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des vecteurs formés par les points de E.

3.4.2 Définition

Définition 3.4. *Soit* n *un entier supérieur ou égal à 1, et* $(A_i;\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *un système de* n *points pondérés de* E.
La fonction vectorielle de Leibniz f *associée au système* $(A_i;\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *est l'application définie par :*

$$f: \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \mapsto & \overrightarrow{f(M)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_k}. \end{cases}$$

3.4.3 Propriétés

Propriété 3.12. • *Pour tout couple de points* M *et* M', *on a :*

$$\overrightarrow{f(M)} - \overrightarrow{f(M')} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MM'}.$$

• *Donc si la somme* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ *est nulle, la fonction* f *est constante.*

Théorème 3.4. *Soit* n *un entier supérieur ou égal à 1, et* $(A_i;\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *un système de* n *points pondérés de* E.
On suppose que la somme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ *est non nulle.*
La fonction vectorielle de Leibniz f *associée au système* $(A_i;\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *est une bijection de* E *sur* $\mathcal{E}$, *c'est-à dire :*

$$\forall \overrightarrow{u} \in \mathcal{E}, \exists! \, M \in E, \overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{u}.$$

En particulier, il existe un unique point G *tel que* $\overrightarrow{f(G)} = \overrightarrow{0}$, *c'est-à-dire tel que* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_k} = \overrightarrow{0}$.

Définition 3.5. *G est appelé barycentre du système* $(A_i;\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Propriété 3.13.

$$\forall M \in E, \overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\overrightarrow{MA_i}$$

Propriété 3.14. *Si* E *est muni d'un repère dans lequel les points* $(A_i; \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *ont pour coordonnées* $(x_i; y_i)$ *(ou* $(x_i; y_i; z_i)$ *si* E *représente l'espace) ; alors* G *a pour coordonnées :*

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \quad ; \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \quad \textit{et éventuellement} \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$

Propriété 3.15. ***Homogénéité du barycentre***
Soit n *un entier supérieur ou égal à 1, et* $(A_i; \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *un système de* n *points pondérés de* E *possédant un barycentre* G*. Soit* k *un réel non nul.*
Alors, G *est barycentre du système* $(A_i; k\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Propriété 3.16. ***Associativité du barycentre***
Soit n *et* p *des entiers tels que* $p \geqslant 3$ *et* $2 \geqslant p \geqslant n-1$.
Soit $(A_i; \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *un système de* n *points pondérés de* E *possédant un barycentre* G.
On suppose de plus que la somme $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i$ *est non nulle ; soit* G' *le barycentre du système* $(A_i; \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$.
Alors G *est le barycentre du système* $\{(G', \sum_{i=1}^{p} \alpha_i); (A_{p+1}, \alpha_{p+1}); \cdots; (A_n, \alpha_n)\}$.

3.5 Coordonnées barycentriques

3.5.1 Dans le plan

Donnons-nous trois points A, B et C non alignés dans le plan et rappelons la dernière propriété du paragraphe **2.2** :
Soient A, B et C trois points non alignés. L'ensemble des barycentres des points A, B et C est le plan (ABC). Ceci signifie que pour tout point M du plan , il existe un triplet $(\alpha; \beta; \gamma)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que M est le barycentre $\{(A, \alpha), (B, \beta); (C, \gamma)\}$.

Définition 3.6. *Le triplet* $(\alpha; \beta; \gamma)$ *est appelé coordonnées barycentriques de* M.
Un point donné possède donc une infinité de coordonnées barycentriques en vertu de la propriété d'homogénéité du barycentre.

Il est possible de contourner ce problème grâce à la définition suivante :

Définition 3.7. *Tout point* M *possède un unique triplet de coordonnées barycentriques dont la somme est égale à 1. Ces coordonnées sont les coordonnées barycentriques normalisées de* M.

3.5.2 Dans l'espace

Cette partie est laissée en exercice au lecteur et n'est qu'une réécriture de ce qui précéde. Il convient de prendre pour base quatre points A, B, C et D non coplanaires.

3.6 Ensembles de niveau

Définition 3.8. *Soit f une application de E dans $\mathbb{R}$ et k un réel.*
On appelle ensemble de niveau k l'ensemble des antécédents de k par f.

3.6.1 Etude de $f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i{}^2$

Nous reprenons ici les notations de la partie précédente.
Lemme

$$\forall (M, M') \in E^2,\ f(M) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i) MM'^2 + 2\overrightarrow{MM'} \cdot (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i}) + f(M') \qquad (2)$$

Démonstration . *Laissée en exercice. Utiliser les égalités suivantes :*

$$AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}^2 = AC^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + CB^2$$

♢

Théorème 3.5. ***Cas*** $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$
Soit G le barycentre du système $(A_i; \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$
L'égalité (2) donne la formule de Leibniz :

$$\forall M \in E, f(M) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i) MG^2 + f(G).$$

Dans le plan :
L'ensemble de niveau k de f est soit l'ensemble vide, soit réduit à $\{G\}$, soit un cercle de centre G.
Dans l'espace :
L'ensemble de niveau k de f est soit l'ensemble vide, soit réduit à $\{G\}$, soit une sphère de centre G.

Théorème 3.6. ***Cas*** $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$

- *Si* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i} = \overrightarrow{0}$, *l'ensemble de niveau k de f est soit l'ensemble vide, soit E .*
- *Si* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i} \neq \overrightarrow{0}$, *l'ensemble de niveau k de f est :*

dans le plan : une droite orthogonale à $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i}$;

dans l'espace : un plan orthogonal à $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i}$.

3.6.2 Etude de $g(M) = \dfrac{MA}{MB}$

Soit A et B deux points distincts.

Théorème 3.7. *1.* ***Si*** $k < 0$

L'ensemble de niveau k *de* f *est vide*

2. ***Si*** $k = 1$

L'ensemble de niveau k *de* f *est alors :*

- *dans le plan : la médiatrice de* $[AB]$.
- *dans l'espace : le plan médiateur de* $[AB]$.

3. ***Si*** $k \in \mathbb{R} - \{1\}$

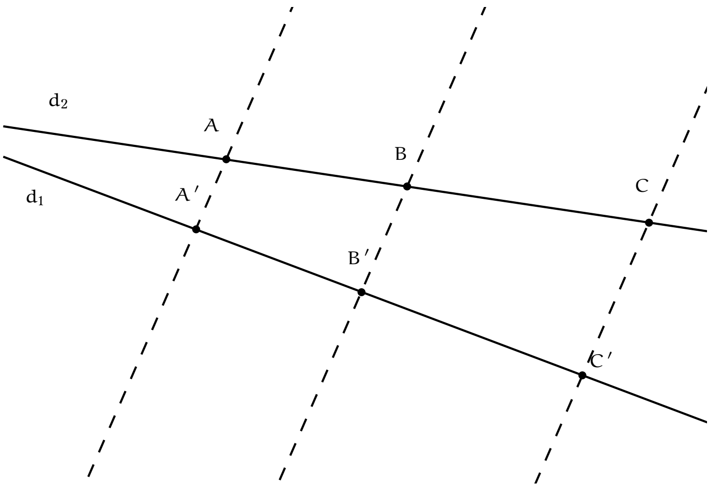
Soit G_1 *le barycentre de* $\{(A, 1), (B, k)\}$ *et* G_2 *le barycentre de* $\{(A, 1), (B, -k)\}$.

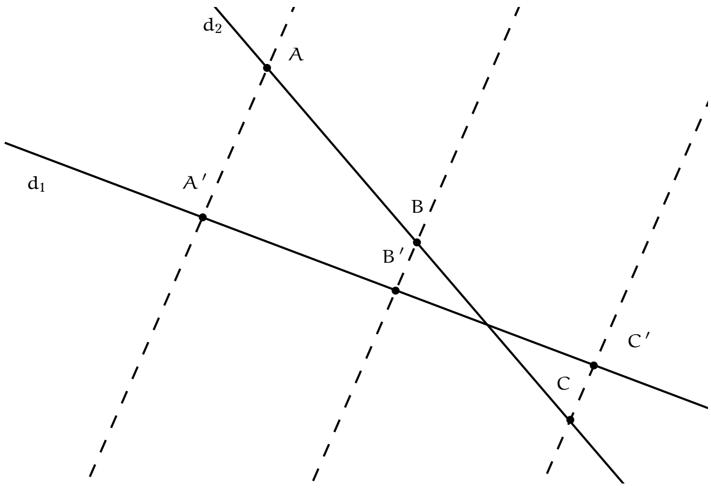
L'ensemble de niveau k *est alors :*

- *dans le plan : le cercle de diamétre* $[G_1G_2]$.
- *dans l'espace : la sphère de diamétre* $[G_1G_2]$.

4 Théorème de Thalès

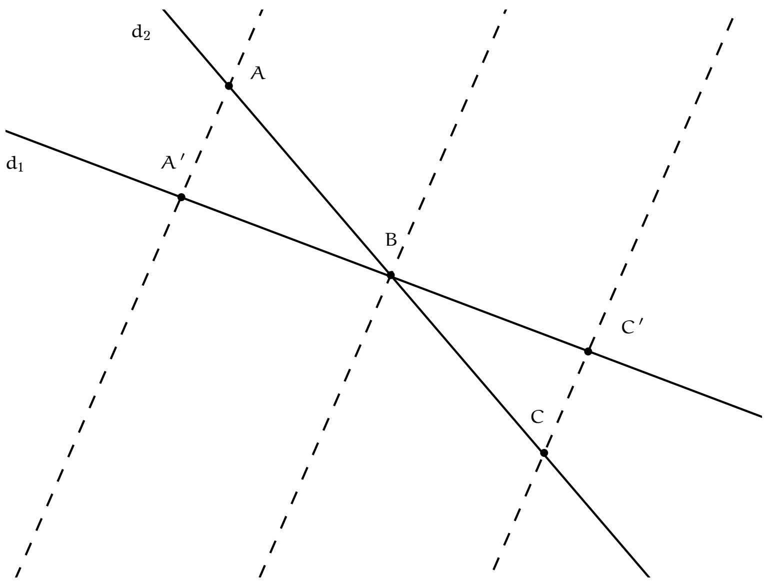
4.1 Enoncé





Si les droites d_1 et d_2 sont coupées respectivement en A, B, C et en A', B', C' par des droites parallèles, alors :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}.$$

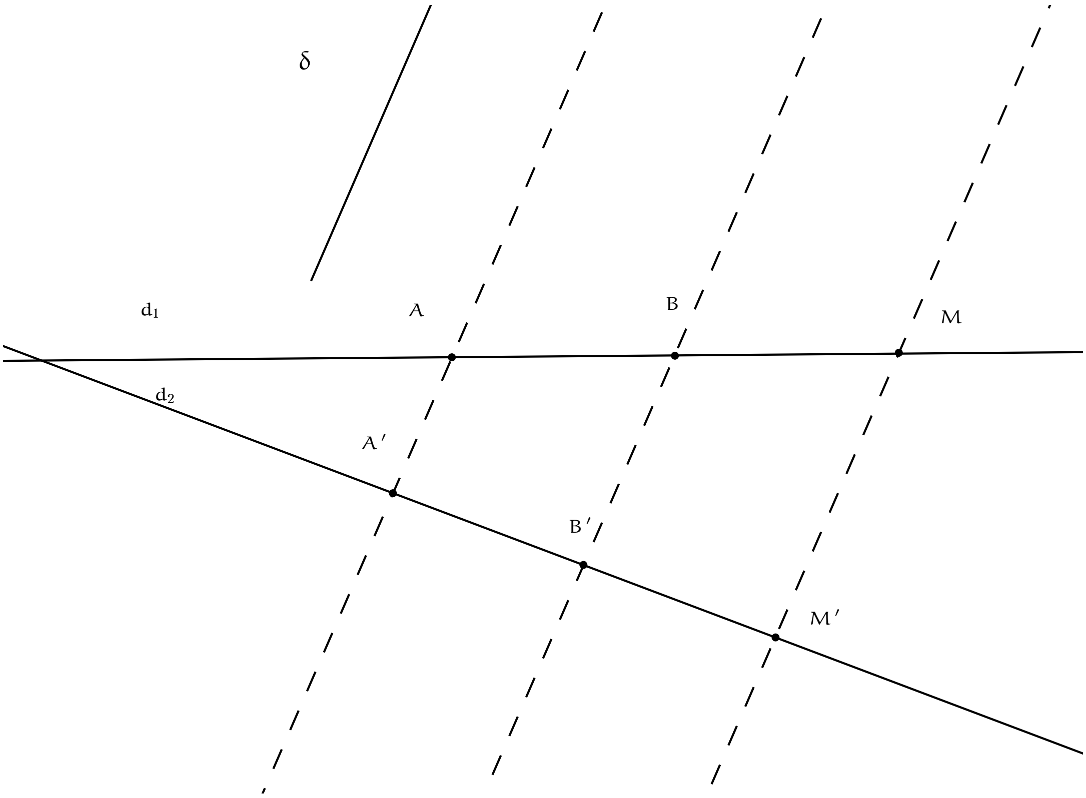


Dans le cas où les droites d_1 et d_2 sont sécantes en B, nous pouvons écrire, :

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BC'}}{\overline{BA'}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{AA'}}.$$

5 Théorème de Thalès et projection

5.1 Définition et propriétés d'une projection



Soient d_1 et d_2 deux droites du plan et soit une **direction de droite** δ, distincte de celle de d_2. A tout point M de d_1, on peut associer le point M', intersection de d_2 avec la droite de direction δ passant par M. L'application $p : M \mapsto M'$ est appelée **projection** de d_1 sur d_2 parallèlement à δ : M' est appelé le projeté de M.

Propriété 5.1. • *Lorsque* d_1 *est de direction* δ*, tous les points de* d_1 *ont la même image par* p *qui est l'intersection de* d_1 *et* d_2*. Dans ce cas la projection* p *est dite constante.*
• *Lorsque* d_1 *n'est pas de direction* δ*, deux points distincts de* d_1 *ont des projetés distincts. De plus, tout point de* d_2 *possède un unique antécédent par* p*. On dit alors que* ***p réalise une bijection de*** d_1 ***sur*** d_2.

5.2 Autre version de l'énoncé du théorème de Thalès - réciproque

Pour tout point M de d_1 et tout point M' de d_2 :

1. Si M' est le projeté de M, l'abscisse de M' dans le repère $(A'; \overrightarrow{A'B'})$ est égale à celle de M dans le repère $(A; \overrightarrow{AB})$.
2. Réciproquement, si M et M' ont la même abscisse dans les repères respectifs $(A'; \overrightarrow{A'B'})$ et $(A; \overrightarrow{AB})$, alors M' est le projeté de M. En particulier, cela signifie que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles.

6 Exercices d'application

Exercice 124. Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles d'un plan (P) tels que les droites (AA'), (BB') et (CC') soient concourantes en un point I.
On suppose que les droites (BC) et $(B'C')$ se coupent en A_1, (CA) et $(C'A')$ en B_1, (AB) et $(A'B')$ en C_1. On se propose de démontrer que les points A_1, B_1 et C_1 sont alignés.

1. Montrer qu'il existe des couples de coefficients (α, α'), (β, β') et (γ, γ') tels que I soit le barycentre de :
   - $\{(A, \alpha); (A', \alpha')\}$ et $\alpha + \alpha' = 1$
   - $\{(B, \alpha); (B', \alpha')\}$ et $\beta + \beta' = 1$
   - $\{(C, \gamma); (C', \gamma')\}$ et $\gamma + \gamma' = 1$
2. Montrer alors que : $\beta\overrightarrow{IB} - \gamma\overrightarrow{IC} = \gamma'\overrightarrow{IC'} - \beta'\overrightarrow{IB'} = (\beta - \gamma)\overrightarrow{IA_1}$.
   En déduire que : $(\beta - \gamma)\overrightarrow{IA_1} + (\gamma - \alpha)\overrightarrow{IB_1} + (\alpha - \beta)\overrightarrow{IC_1} = \overrightarrow{0}$.
3. Conclure.

Exercice 125. première partie
Soit ABC un triangle non isocéle. On appelle (D_a) la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ et (Δ_a) la bissectrice extérieure de $\widehat{A}$.
On note I_a le point d'intersection de (D_a) et de (BC), A' le pied de la hauteur issue de A, H_B et H_C les projections respectives de I_a sur $[AC]$ et $[AB]$. On note $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$.

1. Exprimer de deux façons différentes les aires des triangles ABI_a et ACI_a. Montrer que I_aB et I_aC sont respectivement proportionnelles à c et b dans le même rapport.
2. Montrer que I_a est barycentre des points B et C affectés respectivement des coefficients b et c.
3. Montrer que (Δ_a) coupe (BC) en un point J_a extérieur à $[BC]$. Montrer que J_a es barycentre du système $\{(B, b); (C; -c)\}$.

Deuxiéme partie

1. Soit (C_a) l'ensemble des points tels que : $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{c}{b}$.
   Montrer que (C_a) est le cercle de diamétre $[I_aJ_a]$, et qu'il passe par A. On notera Ω_a son centre et on l'appellera cercle d'Appolonius relatif au sommet A.
2. Montrer la relation suivante : $\overline{\Omega_a B} \times \overline{\Omega_a C} = \Omega_a {I_a}^2 = \Omega_a {J_a}^2$.
3. On définit de même (C_b) et (C_c). Dans la suite, on suppose que $a < b < c$.
   (a) Montrer que les cercles (C_a) et (C_b) sont sécants. On appelle K et L leurs d'intersection.
   (b) Montrer que les points K et L appartiennent à (C_c). En déduire que le trois cercles d'Appolonius sont sécants en K et L.
   (c) Montrer alors que Ω_1, Ω_2 et Ω_3 sont alignés.

Exercice 126. Dans le plan on considère un triangle ABC rectangle en A. Soit a un réel strictement positif. On suppose que $AB = a$ et $AC = 2a$. Soit I le milieu de $[AC]$.

1. Soit J le barycentre de $\{(A, 3); (C; -1)\}$. Montrer que A est le milieu de $[IJ]$.
2. Déterminer le point G barycentre des points A, B et C affectés des coefficients 3,2 et -1.
3. Déterminer l'ensemble des points tels que :

$$3AM^2 + 2BM^2 - CM^2 = 6a^2.$$

☞ On pourra remarquer que I appartient à cet ensemble.

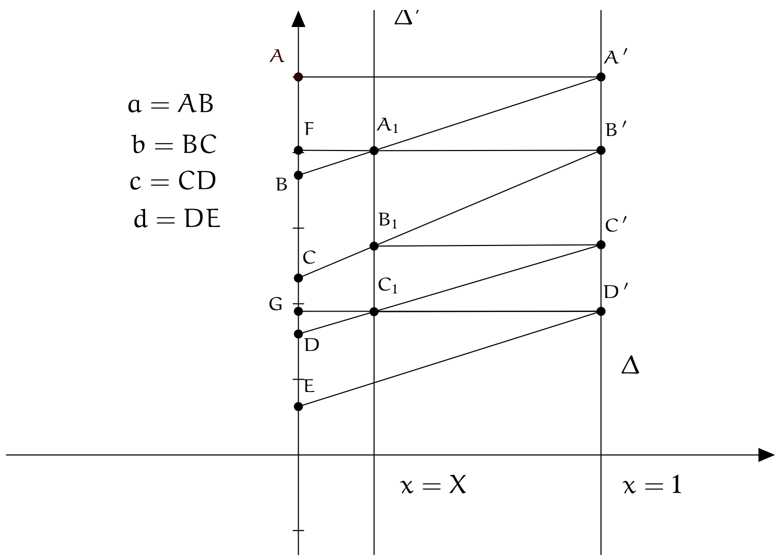
Exercice 127. Résolution mécanique d'une équation du troisième degré. Machine de D'Alembert.
Le mécanisme ci-dessus permet de déterminer une valeur approchée de l'équation du troisième degré

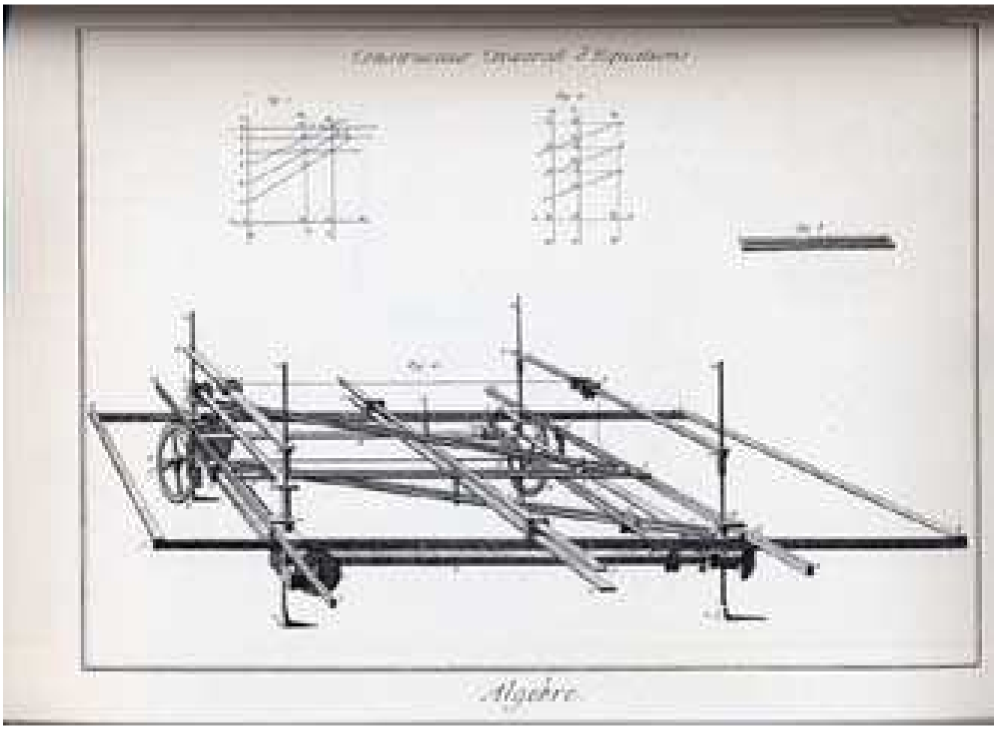
$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

les coefficients a, b, c et d étant positifs.
Les points A et B sont distants de a . La parallèle à l'axe des abscisses passant par A coupe la droite Δ en A' et la droite $(A'B)$ coupe Δ' en A_1.

1. Expliquer pourquoi cette solution possède nécessairement une solution réelle.

2. Montrer que $aX = FB$
3. Expliquer les constructions des points suivants et montrer en utilisant l'algorithme de Horner que $GD = P(X)$ avec $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
4. Réaliser cette figure sur géogebra en testant des valeurs simples des coefficients de cette équation. En faisant varier la droite Δ' vérifier que ce procéder permet de déterminer une solution de l'équation du troisième proposée.





Onzième partie
Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 0.1. *Soit* (a, b) *un couple de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
Une suite u *est récurrente linéaire d'ordre 2 si elle satisfait à la relation de récurrence suivante :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \qquad (E)$$

Exemple : suite de Fibonacci (cf. cours).

1 Quelques propriétés

Etant donné un couple (a, b) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, notons $\mathbb{U}$ l'ensemble des suites u vérifiant la relation (E).

1. $\mathbb{U}$ n'est pas vide.
   Preuve : la suite nulle appartient à $\mathbb{U}$ qui n'est donc pas vide.
2. La donnée des deux premiers termes u_0 et u_1 définit une unique suite de $\mathbb{U}$.
3. $\mathbb{U}$ est stable par combinaisons linéaires :
   $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (u, v) \in \mathbb{U} \Rightarrow \alpha u + \beta v \in \mathbb{U}$.
4. Une suite géométrique de raison q non nulle appartient à $\mathbb{U}$ si et seulement si q est solution de l'équation $x^2 = ax + b$.

   Preuve : D'après la propriété précédente, nous pouvons poser $u_0 = 1$.

   $$\forall n \in \mathbb{N}, q^{n+2} = aq^{n+1} + bq^n \Leftrightarrow q^n(q^2 - aq - b) = 0 \underset{q^n \neq 0}{\Leftrightarrow} q^2 - aq - b = 0$$

Définition 1.1. *: l'équation* $x^2 = ax + b$ *s'appelle **équation caractéristique**.*

2 Expression de u_n en fonction de n

Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique $x^2 = ax + b$. Trois cas sont à distinguer :

1. $\boldsymbol{\Delta > 0}$
   L'équation caractéristique possède dans ce cas deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 et dans ce cas u appartient à $\mathbb{U}$ si et seulement s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

2. $\boldsymbol{\Delta = 0}$
   L'équation caractéristique possède une solution double notée r. Dans ce cas u appartient à $\mathbb{U}$ si et seulement s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda n + \mu)r^n$$

3. $\boldsymbol{\Delta < 0}$
   L'équation caractéristique possède deux solutions complexes conjuguées ω et $\overline{\omega}$. Posons $r = |\omega|$ et $\theta = \arg \omega$. Dans ce cas u appartient à $\mathbb{U}$ si et seulement s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r^n \cos(n\theta) + \mu r^n \sin(n\theta)$$

   ☞ **Remarque** : Dans les trois cas ci-dessus, le couple (λ, μ) est déterminé à partir des valeurs des deux premiers termes de la suite u (cf. infra).

3 Exemples

Etudier les suites suivantes :

1. $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$, $u_0 = 0$, $u_1 = 3$.
   L'équation caractéristique est $x^2 + x - 2 = 0$. Elle admet pour solutions les réels 1 et -2.
   Par conséquent :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda + \mu(-2)^n.$$
   En remplaçant n par 0 puis par 1, nous obtenons le système suivant :
   $$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - 2\mu = 3 \end{cases}$$
   Donc $\lambda = 1$ et $\mu = -1$.
   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 - (-2)^n$.
2. $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$, $u_0 = 5$, $u_1 = 6$.
   L'équation caractéristique est $x^2 - 6x + 9 = 0$. Elle admet pour solution double le réel 3.
   Par conséquent :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n)3^n.$$
   En remplaçant n par 0 puis par 1, nous obtenons le système suivant :
   $$\begin{cases} \lambda = 5 \\ 3(\lambda + \mu) = 6 \end{cases}$$
   Donc $\lambda = 5$ et $\mu = -3$.
   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^n(-3n + 5)$.
3. $u_{n+2} = -9u_n$, $u_0 = 5$, $u_1 = 1$.
   L'équation caractéristique est $x^2 + 9 = 0$. Elle admet pour solutions $3i$ et $-3i$.
   Par conséquent :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda 3^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \mu 3^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$
   En remplaçant n par 0 puis par 1, nous obtenons le système suivant :
   $$\begin{cases} \lambda = 5 \\ 3\mu = 1 \end{cases}$$
   Donc $\lambda = 5$ et $\mu = \frac{1}{3}$.
   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 5 \cdot 3^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot 3^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

Douzième partie

Les symboles Σ et Π

1 Définition des notations

$a_1, \cdots, a_n$ étant n nombres réels ou complexes, on pose :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times \cdots \times a_n.$$

N.B : k est l'indice. Il peut être remplacé par toute autre lettre non utilisée par ailleurs (on parle d' indice muet). Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Exemple : $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\left(\prod_{i=1}^{3} a_i^k\right) = \sum_{k=1}^{3}(a_1^k a_2^k a_3^k) = a_1a_2a_3 + a_1^2a_2^2a_3^2 + a_1^3a_2^3a_3^3.$

2 Propriétés

1. **Nombres de termes** : Soient m et n deux entiers naturels tels que $m \leqslant n$.
   Les expressions $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k$ et $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k$ possèdent n-m+1 termes.
2. **Propriétés calculatoires :**
   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k) = \alpha\sum_{k=1}^{n} a_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$
   (b) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{i=1}^{m} c_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_k c_i\right)$
   (c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(\alpha a_k) = \alpha^n\prod_{k=1}^{n} a_k$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(a_k b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$
   (d) $\displaystyle n \times \min_{1\leqslant k\leqslant n}(a_k) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \leqslant n \times \max_{1\leqslant k\leqslant n}(a_k)$

3 Changement d'indice

Considérons la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ et effectuons le changement d'indice $q = k+1$.
k allant de 1 à n, l'indice q prendra toutes les valeurs de 2 à n+1. Puisque $k = q-1$, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{q=2}^{n+1} a_{q-1}.$$

De même, en posant d'une part $j = k-1$ et $i = n-k$ d'autre part, on obtient les égalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}.$$

4 Applications

1. **Suites télescopiques**

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1}-a_k=\sum_{k=1}^{n} a_{k+1}-\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=2}^{n+1} a_k-\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=2}^{n} a_k+a_{n+1}-\sum_{k=2}^{n} a_k-a_1=a_{n+1}-a_1.$$

2. **Somme des termes d'indices pairs, d'indices impairs**

$$\sum_{k=0}^{n} a_k=\underbrace{\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} a_{2k}}_{\text{somme des termes d'indices pairs}}+\underbrace{\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} a_{2k+1}}_{\text{somme des termes d'indices impairs}}.$$

3. **Calcul de** $S=\sum_{k=1}^{n} k$.

   Considérons la somme $S'=\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2-k^2$.

   • En développant l'expression ci-dessus, nous obtenons :

$$S'=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=2\sum_{k=1}^{n} k+\sum_{k=1}^{n} 1=2S_1+n\ (1).$$

   • En scindant S' en deux sommes et en effectuant un changement d'indice, nous obtenons d'autre part :
   $S'=\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{n} k^2=\sum_{i=2}^{n+1} i^2-\sum_{k=1}^{n} k^2=(n+1)^2-1=n(n+2)\ (2).$
   En combinant les égalités (*1*) et (*2*), nous obtenons :

$$2S+n=n(n+2)\quad \text{soit :}\quad S=\frac{n(n+1)}{2}.$$

5 Exercices

Exercice 128. Factoriser puis calculer la somme $S=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} ij\right)$

Exercice 129. Simplifier $\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+2}$.

Exercice 130. 1. Démontrer que $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Trouver une formule analogue pour $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

2. Déduire l'expression en fonction de n des sommes suivantes :

(a) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(i+j)^2\right)$. ii. $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij$. iii. $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\min(i,j)$.

Exercice 131. On pose $p_n=\frac{\sum_{k=0}^{n} k!}{n!}$. Montrer que pour tout $1\leqslant k\leqslant n-2$, on a :

$$\frac{k!}{n!}\leqslant\frac{1}{n(n-1)}.$$

En déduire un encadrement de p_n. Montrer que la suite p converge et déterminer sa limite.

Exercice 132. Pour tout n entier naturel non nul, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+1)(k+2)}.$$

1. Ecrire un algorithme permettant de déterminer la valeur de u_n , la valeur de n étant déterminée par l'utilisateur.
2. Trouver trois réels a, b et c tels que :

$$\forall n > 0, \quad \frac{4}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$

3. Simplifier l'expression de u_n puis calculer la limite de cette suite.

Exercice 133. Calcul de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Le but de cet exercice est de montrer que la suite u définie pour tout n supérieur ou égal à 1 par $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est convergente et de déterminer sa limite, notée $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Partie A

1. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

2. En déduire une expression simple des termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

   (v est un exemple de suite *télescopique*).
   Montrer que v est convergente et déterminer sa limite.
3. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
   (b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n+1)}.$$

   En déduire une majoration de u_n pour tout entier naturel strictement positif, puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel l inférieur ou égal à 2.

Partie B : Détermination de l

1. Soit α un réel appartenant à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $n = 2p+1$ un entier naturel impair.
   Calculer $\sin(n\alpha)$ en fonction de $\sin(\alpha)$ et de $\cos\alpha$.
   En déduire que :
   $\forall n \in \mathbb{N}$, n impair $\Rightarrow \sin(n\alpha) = \sin^n \alpha \left[\binom{n}{1} \cot^{n-1}\alpha - \binom{n}{3} \cot^{n-3}\alpha + \binom{n}{5} \cot^{n-5}\alpha + \cdots \right]$.
2. Démontrer que les racines du polynôme P tel que $P(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{2p+1}{2k+1} X^{p-k}$ sont les réels

$$x_k = \cot^2 \frac{k\pi}{2p+1} = \cot^2 \frac{k\pi}{n}$$

   avec $k \in [\![1; p]\!]$.
3. En déduire une factorisation de $P(X)$ et montrer que la somme des racines de P est égale à $\frac{1}{6}(n-1)(n-2)$.

4. Sachant que : $\alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow (\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha)$ et $\left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha\right)$; montrer que :

$$\frac{1}{6}(n-1)(n-2) < \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{n}{k\pi}\right)^2 < \frac{1}{6}(n-1)(n+1).$$

5. Déduire de cette double inégalité que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Treizième partie
Exercices de dénombrement

1 Ensembles finis.

Exercice 134. Soit E et F deux ensembles finis non vides disjoints. On pose n= Card E et p= Card F. Montrer qu'il existe une bijection de $E \cup F$ sur $[\![1; n+p]\!]$.
En déduire que $\mathrm{Card}\,(E \cup F) = \mathrm{Card}\,E + \mathrm{Card}\,F$.

Exercice 135. Dans une classe de 28 éléves sportifs, 20 pratiquent le football et 13 le rugby. Combien d'éléves de cette classe pratiquent ces deux sports à la fois ?

Exercice 136. Un vendeur de chaines HI FI propose :
• 3 modéles de platines dont une de marque européenne,
• 4 modéles d'ampli-tuner dont 2 de marque européenne,
• 5 modéles d'enceintes dont 2 de marque européenne .

1. En supposant que tous ces matériels sont compatibles, combien de chaînes différentes peut-on lui acheter ?
2. Combien y a-t-il de choix possibles pour un client désirant qu'au moins 2 des 3 composants de sa chaîne soit de marque européenne ?

Exercice 137. Soit l'entier $n = 2^a 3^b 5^c 7^d$ avec $(a, b, c, d) \in (\mathbb{N}^*)^4$.

1. Quel est le nombre des diviseurs de n ?
2. Quel est le nombre de diviseurs de 169 047 648 ?

Exercice 138. Soit n un entier naturel donné.

1. Dénombrer le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^2$ de l'équation x+y=n.
2. Même question pour l'équation x+2y=n (on distinguera les cas n pair et n impair).

2 Applications d'un ensemble fini dans un autre. Combinaisons, Arrangements.

Exercice 139. Soit $E = \{x, y, z, t\}$ et $E' = \{a, e, i, o, u\}$.

1. Déterminer le nombre d'applications de E dans E', de E' dans E', de E dans E, de E' dans E.
2. Peut-on définir une surjection de E dans E', de E' dans E', de E dans E, de E' dans E ? Si oui, donner un exemple.
3. Mêmes questions pour une injection.
4. Mêmes questions pour une bijection.

Exercice 140. Combien existe-t-il de nombres entiers de quatre chiffres pris parmi 1,2,3,4 ? Quelle est leur somme ? Mêmes questions pour les nombres entiers formés de quatre chiffres distincts pris parmi 1,2,3,4.

Exercice 141. Une assemblée de vingt personnes doit élire un bureau composé de quatre membres : un président, une vice-président, un secrétaire et un trésorier. Quel est le nombre de bureaux possibles ?

Exercice 142. Quel est le nombre de mots de 6 lettres que l'ont peut former avec les lettres du mot CHAISE ayant 6 lettres distinctes, puis au plus 6 lettres distinctes ?

Exercice 143. De combien de manières peut-on ranger cinq objets différents dans 3 boîtes ? (une boîte peut contenir de 0 à 5 objets).

Exercice 144. Un numéro de téléphone comporte 7 chiffres. Déterminer le nombre de numéros de téléphone possibles.

Exercice 145. On considère trois personnes voulant manger chacune un gâteau. Il y 5 gâteaux, combien y a-t-il de choix possibles ?

Exercice 146. Quatre garçons et deux filles veulent s'asseoir sur un banc. Sachant que les deux filles veulent rester l'une à côté de l'autre, déterminer le nombre de manières de les disposer.

Exercice 147. Quatre filles et trois garçons veulent s'asseoir sur un banc. Déterminer le nombre de dispositions possibles :

1. si les garçons sont les uns à côtés des autres ainsi que les filles.
2. dans le cas contraire.

Exercice 148. Dix coureurs courent pour trois médailles (or, argent, bronze). De combien de façons peut-on attribuer ces médailles ?

Exercice 149. Quel est le nombre de poignées de mains échangées lorsque dix personnes se rencontrent et se saluent ?

Exercice 150. De combien de manières peut-on constituer un comité comprenant 2 femmes et 3 hommes dans une société contenant 15 femmes et 20 hommes ?

Exercice 151. Une "main" est un ensemble de 8 cartes d'un jeu de 32. Combien existe-t-il de mains :

1. contenant exactement 2 piques ?
2. contenant 3 piques, 2 carreaux, 2 trèfles ?
3. contenant 4 valets ?
4. contenant au moins 6 coeurs ?

Exercice 152. Combien de nombres distincts de 4 chiffres peut-on former en n'utilisant que 2,4,5,6,8 et 9 ? Répondre à cette question en supposant que ces chiffres sont utilisés qu'une seule fois.

Exercice 153. Un jeu de cubes pour enfant comporte 12 cubes permettant de former 6 images.
De combien de façons peut-on disposer ces cubes, en tenant compte de la position de chaque cube, de la face supérieure et de l'orientation de cette face ?

Exercice 154. Une association sportive compte dix coureurs de 100 m. Combien peut-on former d'équipes de relais 4x100m ? (l'ordre des coureur est à considèrer). Combien y a-t-il d'équipe comprenant un coureur donné ?

Exercice 155.

1. Dans un lot de 20 piéces fabriquées, on en préléve 4. De combien de façons différentes peut-on faire ce prélévement ?
2. On suppose que sur ces 20 piéces, 4 sont mauvaises. De combien de façons différentes peut-on faire le prélévement dans les cas suivants :
   (a) Les 4 piéces sont bonnes ;
   (b) l'une au moins est mauvaise ;
   (c) deux au moins sont mauvaises ?

Exercice 156. On considère un jeu de 52 cartes. dénombrer le nombre de mains de 13 cartes :

1. en tout,
2. comportant les 4 dames,
3. comportant le valet de carreau et le roi de coeur,
4. comportant 3 piques dont l'as,
5. comportant au moins 5 coeurs,
6. ne comportant aucun trèfle et comportant au moins 4 coeurs,
7. comportant 7 coeurs au plus.

Exercice 157. On range n dossiers numérotés 1,2,... ,n dans n tiroirs numérotés aussi de 1 à n (on dispose un dossier et un seul par tiroir).

1. Dénombrer les différents rangements possibles .
2. Dénombrer les rangements suivants :
   (a) le dossier numéroté i est dans le tiroir numéroté i
   (b) les dossiers i et j sont respectivement dans les tiroirs i et j ($i<j$)

(c) les dossiers $i_1, \cdots, i_n$ sont respectivement dans les tiroirs $i_1, \cdots, i_n$ avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$

Exercice 158. Soit un ensemble E de cardinal n (n>2) et a un élément donné de E.

1. On classe les arrangements d'ordre p de E (1<p<n) selon le critère suivant :
   • ceux contenant a
   • ceux ne contenant pas a.
   En déduire que $A_n^p = pA_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p$.
   Vérifier cette formule par le calcul.
2. En déduire une méthode de calculs des coefficients A_n^p en construisant le tableau suivant jusqu'à la ligne 7 :

n p	1	2	3	4	...
1	1				
2	2	2			
3	3	6	6		
4	4	12	24	24	

Exercice 159. Soit E un ensemble de cardinal n ($n > 1$), et a et b deux éléments de E. Soit p un entier naturel tel que $2 \leqslant p \leqslant n$.
On classe les parties de E à p éléments de la façon suivante : celles qui ne contiennent ni a ni b ; celles contenant un et un seul des éléments a et b ; celles contenant a et b.
En déduire la relation $\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2}$.

Exercice 160. Déterminer le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n côtés (n>3).

Exercice 161. Soit $P_n = A_n^1 + A_n^2 + \cdots + A_n^n$. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{P_n}{n!}$ est croissante et majorée.

Exercice 162. Reconnaître la fonction polynôme $x \mapsto \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \frac{x^{p+1}}{p+1}$.

En déduire la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p+1}\binom{n}{p}$.

Exercice 163. Reconnaître la fonction polynôme $x \mapsto \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} p x^{p+1}$.

En déduire la somme $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p}$.

3 Dénombrement et probabilités.

Exercice 164. Une urne contient 5 boules, 3 blanches numérotées 1,2, 3 et 2 noires numérotés 4 et 5. On tire deux boules.

1. Proposer un univers correspondant à ce problème et vérifiant l'hypothèse d'équiprobabilité.
2. Déterminer les probabilités des événements suivants : A : " les 2 boules sont blanches" , B : "les 2 boules sont noires", C :" les deux boules sont de couleurs différente" et D :"les boules sont de même couleur".

Exercice 165. Une boîte contient 10 piles électriques dont 5 sont défectueuses. On tire au hasard deux piles. Calculer la probabilité pour que :

1. Aucune pile tirées ne soit défectueuse.
2. Exactement une pile est défectueuse.
3. Au moins une pile est défectueuse.

Exercice 166. Un ascenseur dessert 8 étages. Six personnes prennent cet ascenseur au rez-de-chaussée. Trouver la probabilité de chacun des événements suivants :

1. Deux personnes au moins descendent au même étage.
2. Deux personnes au même étage, les autres descendent chacun à des étages différents et différents du précédent.

Exercice 167. On tire cinq cartes, au hasard, d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir :

1. l'as de coeur
2. un as et un seul.
3. deux as exactement.
4. au moins un as.

Exercice 168. En jouant avec 3 dés discernables, de combien peut-on obtenir une somme de points égale à 7 ? et à 24 ? Quelle est la probabilité en jetant 3 dés pour que la somme soit multiple de 7 ?

Exercice 169. On tire successivement deux boules dans une urne qui contient a boules noires et b boules blanches. Quelle est la probabilité pour que la seconde boule soit noire ? On envisagera les deux cas où les tirages s'opèrent avec et sans remise.

Exercice 170. D'un jeu de 32 cartes, on tire quatre cartes une à une et on les dispose dans l'ordre où elle apparaissent. Quelle est la probabilité pour que la dernière carte et celle-là seulement soit une dame ?
On reprend le tirage de quatre cartes en remettant la carte tirée dans le paquet après chaque tirage. Quelle est la probabilité pour que la dernière carte et celle-là seulement soit une dame ?

Quatorzième partie

Rédaction

1. **Le théorème des valeurs intermédiaires.**

   Soit ϕ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont les variations sont résumées dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-4}{3}$		1		$+\infty$
$\phi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
ϕ	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

   Démontrer que l'équation $\phi(x) = 6$ possède une unique solution.

   ☞ Penser à utiliser le théorème des valeurs intermédiaires dès que l'énoncé commence par " Démontrer que l'équation $f(x) = \cdots$ possède $\cdots$ solution(s) sur $\cdots$ ". Cette phrase sous-entend le plus souvent que l'équation ne peut être résolue explicitement.

   ☞ Dans la plupart des cas, il sera nécessaire d'utiliser le **théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones**, appelé plus simplement **théorème de la bijection**

   ☞ Mettre une hypothèse du théorème par ligne en la faisant précéder d' un • .

   Rédaction

   1. D'après le tableau de variations de ϕ cette dernière admet pour maximum la valeur 5 sur $]-\infty;1]$: l'équation $\phi(x) = 6$ ne possède pas de solution sur cet intervalle.

   2. • La fonction ϕ est dérivable donc continue sur $[1;+\infty[$.

   • ϕ est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

   • $\phi < [1;+\infty[>= [-1;+\infty[$ donc 6 appartient à $\phi < [1;+\infty[>$.

   Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $\phi(x) = 6$ possède une unique solution sur $[1;+\infty[$.

   Conclusion : L'équation $\phi(x) = 6$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$.

2. **Le raisonnement par récurrence**

   Plusieurs rédactions sont possibles. Vous pouvez bien entendu garder celle que vous avez apprise en 1ère S.

   Il vous est aussi possible d'adopter celle-ci :

   Exemple Soit la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \geqslant 0, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}. \end{cases}$$

   Montrer que la suite u est strictement croissante.

Nous allons démontrer par récurrence que la proposition $P(n)$: "$u_{n+1} > u_n > 0$" est vérifiée pour tout entier naturel n, ce qui permettra de conclure.
☞ Un raisonnement par récurrence se fait en deux temps distincts :
- l'initialisation ;
- l'hérédité.

☞ Attention à ne pas mettre de quantificateur portant sur n dans la proposition. Toute récurrence dans laquelle sera posée : $P(n)$: "$\forall n \cdots$" ne sera pas notée.
En effet, que signifierait cette proposition en remplaçant n par 1 ? Rien du tout !
Une étude préliminaire simple montre que la fonctionf : $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Rédaction

- *Initialisation*

$u_1 = \sqrt{u_0+1} = \sqrt{2}$

Par conséquent $u_1 > u_0$ *et donc la propriété* $P(n)$ *est vérifiée au rang* $n=1$.

- *Hérédité*

Soit n *un entier pour lequel* $u_{n+1} > u_n > 0$.

La fonction f *est strictement croissante sur* $[0;+\infty[$. *Les réels* u_{n+1} *et* u_n *appartenant à cet intervalle, il vient :*

$$f(u_{n+1}) > f(u_n)$$

ce qui peut se réécrire

$$u_{n+2} > u_{n+1}.$$

La propriété est donc encore vérifiée au rang $n+1$.

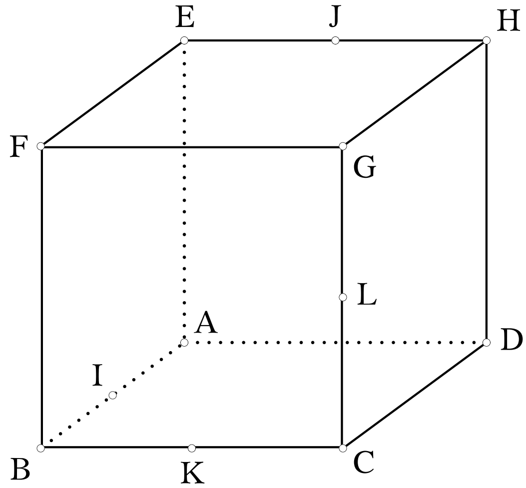
- *Conclusion : Nous avons montré par récurrence que*

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} > u_n > 0.$$

ceci signifie que la suite u *est strictement croissante.*

3. **Géométrie dans l'espace**

   Voici le sujet de Liban 2015. Choisi car elle regroupe les principales questions classiques en géométrie dans l'espace.
   ABCDEFGH est un cube.



I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [EH], K est le milieu du segment [BC] et L est le milieu du segment [CG].
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

(a) i. Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).
   ii. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

(b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).

(c) Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK). Déterminer les coordonnées du point M.

(d) Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.

(e) Calculer le volume du tétraèdre FIJK.

(f) Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?

Dans la rédaction qui suit, les commentaires sont écrits en gras et ne doivent pas apparaître sur une copie.

Rédaction

L'espace est muni d'un repère, il faut donc commencer par donner les coordonnées des points de la figure. A noter que les coordonnées des milieux des segments peuvent être données directement sans justifier.

(a) Dans le repère orthonormé donné, les points de la figure ont les coordonnées suivantes :

$$A(0,0,0) \quad B(1,0,0) \quad C(1,1,0) \quad D(0,1,0) \quad E(0,0,1) \quad F(1,0,1) \quad G(1,1,1) \quad H(0,1,1)$$

$$I(\frac{1}{2},0,0) \quad J(0,\frac{1}{2},1) \quad K(1,\frac{1}{2},0) \quad L(1,1,\frac{1}{2})$$

i. Le repère étant orthonormé, nous disposons de l'expression analytique du produit scalaire.

$$\overrightarrow{FD}(-1,1,-1), \qquad \overrightarrow{IJ}(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1), \qquad \overrightarrow{IK}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$$

La droite (FD) est orthogonale au plan (IJK) si et seulement si son vecteur directeur $\overrightarrow{FD}$ est orthogonal à deux vecteur non colinéaires de (IJK). Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas proportionnelles : ces deux vecteurs ne sont donc pas colinéaires.
D'autre part :

$$\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1$$

soit :

$$\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{IJ} = 0.$$

De même :

$$\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{IK} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0$$

Soit : $\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{IK} = 0$.
La droite (FD) est donc orthogonales à deux droites distinctes du plan (IJK) sécantes en I.
Conclusion : La droite (FD) est donc orthogonale au plan (IJK).
ii. Le repère étant orthonormé, une équation du plan (IJK) est de la forme :

$$-x + y - z = k.$$

Or le point I appartient à ce plan, donc ses coordonnées vérifient l'équation de ce celui-ci :

$$-x_I + y_I + z_I = k$$

. Conclusion : Une équation cartésienne de (IJK) est :

$$-x + y - z + \frac{1}{2} = 0.$$

(b).

$$M(x;y;z) \in (FD) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{FM} = t\overrightarrow{FD}.$$

$$M(x;y;z) \in (FD) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_F - t \\ y & = & y_F + t \\ z & = & z_F - t \end{array} \right.$$

Conclusion : Une représentation paramétrique de la droite (FD) est :

$$\begin{cases} x &= 1-t \\ y &= t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z &= 1-t \end{cases}$$

(c).

$$M(x;y;z) \in (FD) \cap (IJK) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x &= 1-t \\ y &= t \\ z &= 1-t \\ -x+y-z+\frac{1}{2} &= 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 1-t \\ y &= t \\ z &= 1-t \\ -1+t+t-1+t+\frac{1}{2} &= 0. \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{1}{2} \\ y &= \frac{1}{2} \\ z &= \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Conclusion : Les coordonnées de M sont $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(d). Utilisons de nouveau l'expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé. Un calcul aisé donne :

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK} = 0$$

Conclusion : Le triangle (IJK) est rectangle en I.
Ceci nous permet de déterminer l'aire de ce triangle :

$$A(IJK) = \frac{IJ \times IK}{2}.$$

Le repère étant orthonormé :

$$IJ = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ et } IK = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ce qui donne :

$$A(IJK) = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$

Soit :

$$A(IJK) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(e).

$$V(FIJK) = \frac{1}{3} \times A(IJK) \times FM.$$

Calculons la hauteur FM relative à la base (IJK) :

$$FM = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

D'où :

$$V(IJK) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{3}$$

Soit :

$$V(FIJK) = \frac{1}{8}.$$

(f). Un calcul simple montre que les coordonnées de L vérifient l'équation cartésienne de (IJK) trouvée précédemment. Le point L appartient donc au plan (IJK). Les droites (IJ) et (KL) sont donc coplanaires.
D'autre part, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.
Conclusion : Les droites (IJ) et (KL) sont sécantes.

4. **Un autre exercice de géométrie dans l'espace : Sujet de La Réunion Septembre 2010** L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O,\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$.
   On considère les plans P et Q d'équations respectives :

   $$x + y + z = 0 \quad \text{et} \quad 2x + 3y + z - 4 = 0.$$

   (a) Montrer que l'intersection des plans P et Q est la droite D dont une représentation paramétrique est :

   $$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -4-2t \\ y & = & 4+t \\ z & = & t \end{array}\right. \text{ où } t \text{ est un nombre réel.}$$

   (b) Soit λ un nombre réel.
   On considère le plan P_λ d'équation : $(1-\lambda)(x+y+z) + \lambda(2x+3y+z-4) = 0$.
      i. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}(1+\lambda\ ;\ 1+2\lambda\ ;\ 1)$ est un vecteur normal du plan P_λ.
      ii. Donner une valeur du nombre réel λ pour laquelle les plans P et P_λ sont confondus.
      iii. Existe-t-il un nombre réel λ pour lequel les plans P et P_λ sont perpendiculaires ?

   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite D', intersection des plans P et P_{-1}.
   Montrer que les droites D et D'sont confondues.

(d) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
On considère le point A(1; 1; 1).
Déterminer la distance du point A à la droite D, c'est-à-dire la distance entre le point A et son projeté orthogonal sur la droite D.

Rédaction

(a) $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in P \cap Q \iff \begin{cases} x+y+z & = 0 \\ 2x+3y+z-4 & = 0 \end{cases}.$

En posant $z = t,\ t \in \mathbb{R}$, le système devient :

$$\begin{cases} x+y & = -t \\ 2x+3y & = 4-t \\ z & = t \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+2y & = -2t \\ 2x+3y & = 4-t \\ z & = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & = 4+t \\ 2x+3y & = 4-t \\ z & = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y & = 4+t \\ 2x & = 4-t-12-3t \\ z & = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & = 4+t \\ 2x & = -8-4t \\ z & = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & = 4+t \\ x & = -4-2t \\ z & = t \end{cases}$$ où t est un nombre réel.

Ceci est bien l'équation paramétrique d'une droite D contenant le point $(4\ ;\ -4\ ;\ 0)$ et de vecteur directeur $(1\ ;\ -2\ ;\ 1)$.

(b) i. $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in P_\lambda \iff (1-\lambda)(x+y+z) + \lambda(2x+3y+z-4) = 0 \iff$ $(1+\lambda)x + (1+2\lambda)y + z - 4\lambda = 0$.
Un vecteur normal à ce plan est $\vec{n}(1+\lambda\ ;\ 1+2\lambda\ ;\ 1)$.

ii. Les plans P et P_λ sont confondus si et seulement si les coefficients de leurs équations sont proportionnels, soit :
$\frac{1+\lambda}{1} = \frac{1+2\lambda}{1} = \frac{1}{1}$ qui conduit à $\lambda = 0$.

iii. Un vecteur normal au plan P est $\vec{p}(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.
P et P_λ sont perpendiculaires si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux soit

$$\vec{p} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 1(1+\lambda) + 1(12\lambda) + 1 = 0 \Leftrightarrow 3 + 3\lambda = 0$$

Soit :

$$\lambda = -1.$$

Le plan P_{-1} d'équation $-y+z+4=0$ est perpendiculaire au plan P.

(c) Comme à la question 1. il faut résoudre le système :

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ -y+z &= -4 \end{cases}$$

Posons $z = u$, $u \in \mathbb{R}$ quelconque. Le système devient :

$$\begin{cases} x+y+u &= 0 \\ -y+u &= -4 \\ z &= u \end{cases} \iff \begin{cases} x+y &= -u \\ y &= u+4 \\ z &= u \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -2u-4 \\ y &= u+4 \\ z &= u \end{cases}$$

- Soit $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un point de D. On sait alors que $x+y+z=0$ et $2x+3y+z-4=0$, mais alors $(1-\lambda)(x+y+z)+\lambda(2x+3y+z-4)=0+0=0$: autrement dit tout point de D droite commune à P et Q est un point de P_λ, donc en particulier de P_{-1}.

Conclusion D est la droite commune aux plans P et P_{-1}.

(d) Soit H et K les projeté orthogonaux de A respectivement sur P et P_{-1} ; soit I le projeté orthogonal de A sur D.

Les points A, H, K et I sont coplanaires : ils appartiennent au plan perpendiculaire à P et P_{-1} contenant A. (AH) et (AK) perpendiculaires à deux plans perpendiculaires sont perpendiculaires.

Le quadrilatère $AHIK$ est donc un rectangle.

On a $d(A,\ P) = AH = \dfrac{|1+1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$;

$d\,(A,\ P_{-1}) = AK = \dfrac{|-1+1+4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

D'après le théorème de Pythagore :

$AI^2 = AH^2 + AK^2 = 3+8 = 11$, donc :

$d(A,\ D) = AI = \sqrt{11}$.

Quinzième partie
Exercices avec prise d'initiative

Exercice 171. Dans un repère orthogonal, on note C la courbe représentative sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $x \mapsto x^3$.
Pour tout nombre réel p, on note (D_p) la droite d'équation $y = 2p^2x - 1$.
Déterminer, suivant les valeurs de p, le nombre de points d'intersection de ces deux courbes.

Exercice 172. L'équation $x^y = y^x$ possède-t-elle des couples solutions formés de nombres irrationnels distincts ?

Exercice 173. On considère une famille $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de n entiers strictement supérieurs à 2.
Déterminer la plus petite valeur de n afin qu'une table donnant les valeurs à une précision arbitraire des réels $\ln(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ permette de déterminer grâce à une calculatrice "4 opérations" les valeurs approchées de tous les réels $\ln k$ avec $2 \leqslant k \leqslant 100$.

Exercice 174. Déterminer le nombre de tangente à la courbe C d'équation $y = xe^{x+1}+1$ passant par l'origine du repère.

Exercice 175. Une émission de télévision a relayé une étude montrant que certaines marques vendent du thé contenant une dose de pesticides dépassant les doses maximales autorisées.
Un commerçant sait que cette information va avoir un impact sur les ventes des marques incriminées. Ce commerçant achète 80% de ses boîtes chez un fournisseur A et 20% chez un fournisseur B.
10% des boîtes du fournisseur A et 20% de celles provenant du fournisseur B contiennent une does de pesticides dépassant les doses maximales autorisées.
Lors du prélèvement au hasard d'une boîte du stock du grossiste, on considère les évènements suivants :
• A : " La boîte provient du fournisseur A";
• B : " La boîte provient du fournisseur B";
• S : " La boîte présente des traces de pesticides".

1. Traduire l'énoncé sous forme d'une arbre pondéré.
2. Que représente l'événement $B \cap \overline{S}$?
3. Un ami du commerçant considéré lui explique que pour 88% des boîtes de thé qu'il vend, la dose de pesticides ne dépasse pas les doses maximales autorisées. Justifier ce résultat.
4. Le magasin étant réputé et le stock important, les clients achètent souvent les boîtes de thé par lots. Lorsqu'on prend 10 boîtes de thé au hasard chez ce commerçant, on peut assimiler le prélèvement à un tirage aléatoire sans remise compte tenu du stock important.

   Quelle est la probabilité que, sur un lot de 10 boîtes prélevées au hasard, au moins huit ne contiennent pas une dose de pesticides dépassant les doses maximales autorisées ?
5. A des fins publicitaires, le commerçant affiche sur ses plaquettes "97% de notre thé est garanti sans pesticides". Un inspecteur de la brigade de la répression des fraudes souhaite étudier la validité de l'affirmation. A cette fin, il prélève 200 boîtes au hasard dans le stock du commerçant et en trouve 23 dont la dose de pesticides dépasse les doses maximales autorisées.

   Au vu de ces résultats, quelle peut être la réaction de cet inspecteur ?

Exercice 176. m désigne un paramètre réel. Donner le nombre de solution de l'équation $e^x = mx$.

Seizième partie
Pot-pourri

Merci à Mathman

Exercice 177. $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}, f(z) = \dfrac{iz - 2 + 4i}{z - i}$.

1. Déterminer le domaine définition D de f.
2. Montrer que si z est dans D , $f(f(z)) = z$. déterminer f^{-1} la fonction réciproque de f.
3. On pose : $w = z - i$ et $r = f(z) - i$.
   Montrer qu'il existe a, b dans $\mathbb{Z}$ tels que $w.r = a + ib$.
4. En déduire que l'image d'un cercle de centre i de rayon R est un cercle de même centre de rayon R' à déterminer.

Exercice 178.

1. Déterminer les matrices A de $M(2, \mathbb{R})$ telles que pour tout X dans $\mathbb{R}^2$, ${}^tX.A.X = 0$ où ${}^tX$ est la transposée de X.
2. Même question avec A dans $M(3, \mathbb{R})$ telles que pour tout X dans $\mathbb{R}^3$, ${}^tX.A.X = 0$.

Exercice 179. Soit la suite X la suite définie par :
$X(0) = 5$ et pour tout entier n : $X(n+1) = X(n) + \dfrac{1}{X(n)}$.

1. Etudier la convergence de la suite $(X(n))$.
2. Montrer que $45 < X(1000) < 45,1$.

Exercice 180. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers relatifs (x, y, y, t) tels que : $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0$.

Exercice 181. Pour A et B dans $\mathcal{M}_2\mathbb{R}$, montrer que : $\det(A + B) + \det(A - B) = 2\det(A) + 2\det(B)$.

Exercice 182. "a" désigne un réel non nul. Calculer la limite de $f(x) = \dfrac{1 - \cos(ax)}{x^2}$ quand x tend vers 0.

Exercice 183. n est un entier naturel non nul fixé.
$f(x) = g(x, 1).g(x, 2) \dots g(x, n)$ avec $g(x, k) = \dfrac{1 - \sin^k(x)}{\cos^2(x)}$.
Calculer limite de f en $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 184 (fonctions convexes). **Partie A**
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
On dit que f est convexe sur I si :

$$\forall (x; y) \in I^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

1. (a) Montrer que les fonctions $f_1 : x \mapsto x^2$ et $f_2 : x \mapsto e^x$ sont des fonctions convexes sur $\mathbb{R}$.
   (b) La fonction $f_3 : x \mapsto \ln x$ est-elle convexe sur $]0; +\infty[$?
2. On considère la fonction h définie sur $[0; \pi]$ par $h(x) = -\sin x$.
   (a) Montrer que h est convexe sur $[0; \pi]$.
   (b) Montrer que :
   $$\forall (x; y) \in [0; \pi]^2,\ x \neq y \Rightarrow h\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{h(x) + h(y)}{2}.$$
3. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) > 0.$$
   (a) Soit x_0 un réel fixé et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$g(x) = f\left(\frac{x + x_0}{2}\right) - \left[\frac{f(x) + f(x_0)}{2}\right].$$
   Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$.

(b) Montrer que si $x < x_0$, $g'(x) > 0$ et si $x > x_0$, $g'(x) < 0$.
En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \leqslant 0$, et que f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.

Partie B
On considère la fonction φ définie sur $[0;2\pi]$ par :

$$\varphi(x) = \sin\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{4}.$$

1. Etudier les variations de φ sur $[0;2\pi]$.
2. En déduire l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Partie C
Soit O un point donné du plan et R un réel strictement positif donné. Soit Γ le cercle de centre O et de rayon R.
Soit A un point fixé de Γ et α, β, γ trois réels positifs vérifiant $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$.
On désigne par B et C les points de Γ tels que α, β, γ soient des mesures respectives des angles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})$.

1. Calculer en fonction de R, α et β le périmètre P du triangle ABC.
2. Montrer, en utilisant les parties A et B que :

$$P \leqslant 2R\varphi(\alpha + \beta) \leqslant 3R\sqrt{3}.$$

et que si $\alpha \neq \beta$, $P < 3R\sqrt{3}$.
3. Pour quelles positions des points B et C le triangle ABC a-t-il un périmètre maximal ?

Exercice 185. Partie A

1. Comment choisir le triplet (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ pour que $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ xP'(x) - 2P(x) = 0\,?$$

2. Soit f une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$.
   - Vérifier que g est dérivable sur $]0;+\infty[$;
   - Démontrer que f vérifie la relation :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ xf'(x) - 2f(x) = \ln x \qquad (1)$$

   si et seulement si g est une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^3}$ sur $]0;+\infty[$.
3. Déterminer toutes les primitives de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^3}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. En déduire l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur $]0;+\infty[$ vérifiant la relation (1).
5. On désigne par φ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $x \mapsto -\dfrac{1 + \ln(x^2)}{4} + \dfrac{1}{4}x^2$.
   Etudier la fonction φ et construire sa courbe dans un repère orthonormé.

Partie B

1. Soit λ un réel strictement positif fixé. Calculer en fonction de λ l'intégrale $I(\lambda) = \displaystyle\int_\lambda^1 \varphi(x)dx$.
2. Montrer que lorsque λ tend vers 0, $I(\lambda)$ tend vers un réel à préciser.
3. Dans tout ce qui suit, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
   Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n+1$, et pour tout x tel que $\dfrac{k}{n} \leqslant x \leqslant \dfrac{k+1}{n}$, on a :

$$\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

et :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) < I\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n}\right).$$

En déduire l'encadrement :

$$I\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) < \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + I\left(\frac{1}{n}\right).$$

4. Déduire des questions précédentes que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{n\geqslant 2}$ admet une limite finie à déterminer.

5. (a) Montrer que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n}{k}\right) - \frac{1}{4}.$$

   (b) Etablir les égalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n}{k}\right) = \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right).$$

   (c) Utiliser les résultats précédents pour démontrer que les deux suites $(u_n)_{(n\geqslant 2)}$ et $(v_n)_{(n\geqslant 2)}$ telles que $u_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ et $v_n = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$ convergent. Calculer leurs limites respectives.

Exercice 186. 1. Calculer, pour tout entier $n > 0$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^n}dx.$$

2. Soit $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, soit α un nombre réel, et p l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall n \in \Omega,\ p(n) = n^2\alpha I_n.$$

Déterminer α pour qu'il existe une probabilité P sur $(\Omega, P(\omega))$ telle que, pour tout n de Ω, on ait $P(\{n\}) = p(n)$.

Exercice 187. [Théorème de Sylvester]
Dans tout ce qui suit, on pose $A = 1+\sqrt{3}$.
Le but de cet exercice est de montrer que, pour tout entier naturel m, la partie entière de A^{2m+1} est divisible par 2^{m+1}.

1. En utilisant la calculatrice, vérifier cette propriété pour A, A^3 puis pour A^5.
2. Ecrire un algorithme permettant de vérifier cette propriété pour tout entier naturel m.
3. (a) Démontrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies de manière unique, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = a_n + b_n\sqrt{3}.$$

   (b) Exprimer, pour tout entier naturel n, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   (c) Conjecturer une relation simple entre la partie entière de A^{2m+1} et a_{2m+1}.
4. Soient m et k deux entiers naturels.
   Montrer que si a_{2m+1} et b_{2m+1} sont divisibles par 2^k, alors a_{2m+3} et b_{2m+3} sont divisibles par 2^{k+1}.
5. En déduire que, pour tout entier naturel m, a_{2m+1} et b_{2m+1} sont divisibles par 2^m.
6. Montrer que pour tout entier naturel m, A^{2m+1} est solution de l'équation :

$$x^2 - 2a_{2m+1}x - 2^{2m+1} = 0.$$

En déduire l'expression de A^{2m+1} en fonction de a_{2m+1}.

7. Démontrer que :
$$\forall m \in \mathbb{N},\ 2^{2m+1} \leqslant 2a_{2m+1}$$
.

8. En déduire que pour tout entier naturel m, la partie entière de A^{2m+1} est égale à $2a_{2m+1}$.
9. Conclure.

Exercice 188. Soit $y > 0$ un réel fixé. En utilisant une intégration par parties, déterminer les primitives en x de la fonction f définie par $f(x) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

Exercice 189. Déterminer le paramètre m de façon à ce que les quatre racines de l'équation bicarrée
$$x^4 - (3m+4)x^2 + m^2 = 0$$
soit en progression géométrique (ie qu'ils sont les trois termes consécutifs d'une suite géométrique).

Exercice 190. On considère $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; ses éléments sont les couples (a, b) où a et b sont des entiers relatifs. On munit E de la loi, notée $\star$, définie par :
$$(a, b) \star (a', b') = (aa', ab' + a'b).$$

1. Cette loi est-elle commutative ? Associative ? Montrer qu'elle possède un élément neutre à déterminer.
2. A un élément fixe (a, b) de E, on associe l'application $f : E \longrightarrow E$ définie par :
$$(x, y) \mapsto (a, b) \star (x, y).$$
Montrer que, si $a \neq 0$, l'application f est injective.
Montrer que, pour que f soit surjective, il faut et il suffit que $a^2 = 1$.
3. (a) On considère l'équation diophantienne :
$$3x + 5y = 1.$$
Déterminer tous les couples d'entiers relatifs solutions de cette équation.
   (b) On considère l'application $f : E \longrightarrow E$ associée à l'élément $(a, b) = (5, 3)$ de E. Pour quelles valeurs de l'entier α l'élément $(\alpha, 1)$ de E est-il l'image par f, d'un élément de E ?

Exercice 191. (Dijon 1976-Intégrales et Espaces vectoriels)
Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions numériques de la variable réelle x, définies sur $\mathbb{R}^{*+}$ des nombres réels strictement positifs. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions numériques de la variable réelle t, définies et continues sur $[0; \pi]$, ainsi que leur fonction dérivée première f'. On rappelle que chacun de ces deux ensembles, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication d'une fonction par un réel, a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Partie A

1. Calculer l'intégrale :
$$I(x) = \int_0^\pi e^{-tx}\,dt.$$
x étant un paramètre réel strictement positif.
2. (a) Soit g la fonction numérique de la variable réelle x donnée par :
$$g(x) = e^{\pi x} - 1 - \pi x.$$
Etudier le sens de variation de g. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $g(x)$ est strictement positif.
   (b) Etudier les variations de la fonction numérique I de la variable réelle x, définie pour tout x strictement positif par :
$$I(x) = \int_0^\pi e^{-tx}\,dt.$$
On ne demande pas de tracer la courbe représentative.

Partie B

1. Soit f une fonction élément de $\mathcal{E}$. justifier l'existence, pour tout nombre réel x strictement positif, de l'intégrale :
$$I(x) = \int_0^{\pi} e^{-tx} f(t) dt.$$
2. Soit L l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ qui, à tout élément f de $\mathcal{E}$, associe la fonction F définie pour tout x réel strictement positif par :
$$F(x) = \int_0^{\pi} e^{-tx} f(t) dt.$$
Démontrer que L est une application linéaire.
3. Pour toute fonction f de $\mathcal{E}$, on pose :
$$L(f) = F \text{ et } L(f') = F^*.$$
Démontrer que la fonction F^* est définie, pour tout réel x strictement positif, par :
$$F^*(x) = e^{-\pi x} f(\pi) - f(0) + xF(x).$$

Partie C
Soit f_1, f_2 et f_3 les trois fonctions définies sur $[0;\pi]$ par $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = \cos 2t$ et $f_3(t) = \sin 2t$. Soit $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des fonctions numériques $af_1 + bf_2 + cf_3$ pour tout triplet (a, b, c) de nombres réels.
1. Démontrer que $\mathcal{E}_1$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, dot une base $\mathcal{B}$ est (f_1, f_2, f_3).
2. On note L_1 la restriction de L à $\mathcal{E}_1$, c'est-à-dire l'application de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{F}$ définie par :
$$\forall f \in \mathcal{E}_1 \qquad L_1(f) = L(f) = F.$$
   (a) Déterminer les fonctions $F_1 = L_1(f_1)$, $F_2 = L_1(f_2)$ et $F_3 = L_1(f_3)$.
   (b) Soit f un élément de $\mathcal{E}_1$ exprimé dans la base $\mathcal{B}$. Calculer F(x) pour tout nombre réel x strictement positif.
   (c) Démontrer que L_1 est une application injective.
3. (a) Soit f un élément de $\mathcal{E}_1$. Justifier le fait que $f([0;\pi])$ est un intervalle fermé $[m; M]$ avec $m \leqslant M$.
   (b) Démontrer que pour tout réel réel x strictement positif, on a :
$$m\frac{1-e^{-\pi x}}{x} \leqslant \int_0^{\pi} e^{-tx} f(t) dt \leqslant M\frac{1-e^{-\pi x}}{x}.$$
   (c) x étant donné égal à x_0, démontrer qu'il existe au moins un réel t_0 de l'intervalle $[0;\pi]$ tel que :
$$F(x_0) = f(t_0)\frac{1-e^{-\pi x_0}}{x_0}.$$
   Calculer t_0 dans le cas particulier $f = f_1 + f_2 + f_3$ et $x_0 = 2$.

Exercice 192. Irrationnalité de π Le but de ce problème est de montrer par l'absurde que π est irrationnel. On suppose donc qu'il existe deux entiers strictement positifs a et b tels que $\pi = \dfrac{a}{b}$ avec $a > b$. Etant donné un entier naturel n non nul, on pose pour tout x réel :
$$P_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \text{ et } P_0(x) = 1.$$
Pour tout entier naturel n on définit l'intégrale :
$$I_n = \int_0^{\pi} P_n(x) \sin x dx.$$
1. (a) Pour tout entier naturel non nul n, exprimer P'_n en fonction de P_{n-1}.
   (b) Calculer $\sup_{x\in[0;\pi]} |P_n(x)|$ en fonction de a, b et n.
   (c) Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P_n\left(\frac{a}{b} - x\right) = P_n(x).$$

(d) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n > 0.$$

2. En admettant que la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ converge vers e^x (voir l'exercice 117 p. 79).

   pour tout réel x, montrer que la suite de terme général $\dfrac{\pi}{n!}\left(\dfrac{a^2}{4b}\right)^n$ tend vers 0.

   En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

3. Pour tout entier naturel k, on note $P_n^{(k)}$ la dérivée d'ordre k de P_n. Par convention $P_n^{(0)} = P_n$.

   Montrer que $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\dfrac{a}{b}\right)$ sont des entiers relatifs. On étudiera les cas $0 \leqslant k \leqslant n-1$; $n \leqslant k \leqslant 2n$ et $2n+1 \leqslant k$. Pour ce dernier cas, on utilisera la relation entre $P_n^{(k)}(0)$ et le coefficient de x^k dans $P_n(x)$.

4. Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$. On utilisera des intégrations par parties successives.

5. Montrer que π est irrationnel.

Exercice 193. Ecricome Eco 2011 On dit qu'une matrice A carrée d'ordre n est une matrice nilpotente s'il existe un entier naturel k non nul tel que :

$$A^{k_1} \neq 0_n \text{ et } A^k = 0_n$$

où 0_n représente la carrée nulle d'ordre n.

Soit A une matrice carrée d'ordre n, on dit que le couple de matrices (Δ, N) est une **décomposition de Dunford** de A lorsque :

$$\begin{cases} \Delta \text{ est une matrice diagonalisable} \\ N \text{ est une matrice nilpotente} \\ \Delta N = N\Delta \text{ et } A = N + D \end{cases}$$

1. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Vérifier que (Δ, N) est décomposition de Dunford de A.

   Dans toute la suite de l'exercice, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. (a) Déterminer les valeurs propres de A.
   (b) La matrice est-elle diagonalisable ?

3. On considère les matrices colonnes : $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer les produits ΔX_1, ΔX_2 et ΔX_3.
   (b) Justifier que la matrice Δ est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible telle que : $P^{-1}\Delta P = D$.
   (c) Calculer P^{-1}.

4. (a) Etablir que N est une matrice nilpotente.
   (b) Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de la matrice A.
   (c) En utilisant la formule du binôme de Newtow que l'on justifiera, donner l'expression de A^n en fonction des puissances de Δ, de N et de n.
   (d) Etablir que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \Delta^k N = N.$$

   (e) Proposer une décomposition de Dunford de A^n.

Exercice 194. On pose $D = \mathbb{C} - \{-i; i\}$.
Soit f l'application définie sur D par :

$$\forall z \in D,\ f(z) = \frac{z}{z^2+1}.$$

1. Résoudre $f(z) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
2. Montrer que :
$$\forall (z, z') \in D^2, f(z) = f(z') \Leftrightarrow z = z' \text{ ou } zz' = 1.$$
3. Déterminer $E = \{z \in \mathbb{C}, f(z) \in \mathbb{R}\}$.
4. Soit θ un élément de $]-\pi; \pi[- \left\{\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right\}$.
   Montrer que $f(e^{i\theta})$ est réel et le calculer en fonction de $\cos\theta$.
5. Soit $u_n = \sum_{k=0}^{n} f(e^{ki\theta})$. Pour quelles valeur de θ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Exercice 195. Concours Général 1990
Soit u la suite définie par :
$u_0 = 0$ et pour tout n : $u_{2n} = u_n$ et $u_{2n+1} = 1 - u_n$.

1. Calculer u_{1990}.
2. Combien de fois, entre u_0 et u_{1990} la suite u prend-t-elle la valeur 0 ?
3. Soit p un entier naturel quelconque. Calculer $u_{(2^p-1)^2}$.

Exercice 196. Soit $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie et continue sur $[0; 1]$.
On suppose que $f(0) = f(1) = 0$ et que pour tout x de l'intervalle $\left[0; \frac{7}{10}\right]$, $f\left(x + \frac{3}{1}\right) \neq f(x)$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a au moins sept solutions sur $[0; 1]$.
2. Donner un exemple de fonction f vérifiant les hypothèses.

Indication Une fonction continue sur un intervalle ne s'y annulant pas garde un signe constant.

CORRIGE 1 Si B est le symétrique de A par rapport à I, alors I est le milieu de [AB] , ce qui donne $xA + xB = 2xI$ et $yA + yB = 2yI$. Ceci permet alors de déterminer les deux algorithmes demandés.

1.

Variables	xA, xB, yA ,yB, sont des réels
Traitement	**Saisir** xA, yA xB **Prend la valeur** $(6 - xA)$ yB **Prend la valeur** $(10 - yA)$
Sortie	**Afficher** $(xB; yB)$

2.

Variables	xA, xB, yA ,yB, xI, yI sont des réels
Traitement	**Saisir** xA, yA,xI, yI xB **Prend la valeur** $(2xI - xA)$ yB **Prend la valeur** $(2yI - yA)$
Sortie	**Afficher** $(xB; yB)$

CORRIGE 5 **1)** $\{-2;-1;4\}$ **2)** $\{-1;1\}$ **3)** $\emptyset$ **4)** $-7/2;-2/3$ **5)** $\{1\}$ **6)** $\left\{0;\frac{1}{2}(1-\sqrt{13});\frac{1}{2}(1+\sqrt{13})\right\}$ **7)**$\left\{0;1;\frac{1}{6}\right\}$ **8)** $\left\{-1;\frac{3}{2}\right\}$ **9)** $\{0;4;8\}$ **10)** $\{1\}$ **11)** $\left\{-1;-\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right\}$ **12)** $\{1\}$ **13)** $\{1;-1;-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$
14) $\left\{-\sqrt{\frac{1}{6}(\sqrt{37}-5)};\sqrt{\frac{1}{6}(\sqrt{37}-5)}\right\}$ **15)** $\emptyset$ **16)** $\{1\}$
17) Si $m \in]2-4\sqrt{2};2+4\sqrt{2}[, S = \{3\}$,
sinon $S = \{3;1/2(-\sqrt{(}m^2-4m-28)+m-2);1/2(\sqrt{(}m^2-4m-28)+m-2)\}$ avec une solution double si $m \in \{2-4\sqrt{2};2+4\sqrt{2}\}$. (plus précisément : si $m = 2-4\sqrt{2}, S = \{3;-2\sqrt{2}\}$, si $m = 2+4\sqrt{2}, S = \{3;2\sqrt{2}\}$)
18) Si $m \neq 0$, $S = \left\{0;\frac{5-\sqrt{4m^2+25}}{2m};\frac{5+\sqrt{4m^2+25}}{2m}\right\}$.
Si $m = 0$, $S = \{0\}$.

CORRIGE 6 **1)** $]-2;1[\cup]4;+\infty[$ **2)** $]-2;1/3[$ **3)** $]3;+\infty[$ **4)** $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[\cup]3;+\infty[$ **5)** $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup\left]\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right[$ **6)** $]-\infty;-4[\cup]-1;1[$

7) $]-3;-1[\cup x > 1]1;+\infty[$ **8)** $]0;1[\cup]2;+\infty[$ **9)** $]-2;-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2};+\infty[$

CORRIGE 7 -1 et 1 sont racines du polynôme. $P(x) = 2x^4 - x^3 + x - 2 = (x-1)(x+1)(2x^2 - x + 2)$. Donc $S = \{-1;1\}$.

CORRIGE 8 $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 4x - 2 = 2(x-1)(x^2 - x + 1)$ Donc $S = \{1\}$.

CORRIGE 9 $S = \{-1\}$.

CORRIGE 10 **1)**

x	$-\infty$ $\quad 3/2 \quad 2 \quad$ $+\infty$
$(3-2x)(x-2)^2$	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad -$

2)

x	$-\infty$ $\quad -5 \quad 7/4 \quad 3 \quad$ $+\infty$
$(5+x)(4x-7)(3-x)$	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad + \quad 0 \quad -$

3)

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$(5-x)^3(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

4)

x	$-\infty$		-1		2		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$(2x-7)(x+1)^3(2-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

5)

x	$-\infty$		$-\frac{9}{7}$		0		$\frac{6}{5}$		$+\infty$
$5x(7x+9)(6-5x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

6)

x	$-\infty$		-6		-3		3		4		$+\infty$
$\frac{x^2-9}{(x+1)^2-25}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

7)

x	$-\infty$		$-2\sqrt{2}$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
$\frac{x^3-2x}{x^2-8}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

8)

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		$+\infty$
$\frac{3x^2+x^3}{x^2-4}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

9)

x	$-\infty$		-3		0				$\frac{1}{3}$		5		$+\infty$
$\frac{2}{x-1}-\frac{5}{x+2}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$			

10)

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$\frac{2}{x-1}-\frac{5}{x+2}$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

11)

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$\frac{3x}{4}+\frac{3}{x-4}$		$-$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

CORRIGE 11 **a)** $\{-1\}$; $]-\infty;-1[\cup]1;3[$. **b)** Si $m=0$:$\emptyset$ et sinon $\{\frac{1}{m}$; Si $m=0$:$\mathbb{R}^*$- si $m>0$: $\{]-\infty;0[\cup]0;\frac{1}{m}[$- Si si $m<0$: $\{]\frac{1}{m};0[\cup]0;+\infty[[$
c) $\{3-\sqrt{7};3+\sqrt{7}\};]-\infty;3-\sqrt{7}[\cup]3;3+\sqrt{7}[$.
d) $\{-2\}$; $]-\infty;-2[\cup]3;+\infty[$

CORRIGE 12 1)Si $m\in\{4;9\}$: $\emptyset$- Sinon $\{\frac{2m-3}{m-4}\}$; 2) Si $m\in\{0;4;5\}$: $\emptyset$- Sinon$\{\frac{-2m}{m-5}\}$; 3) Si $m=4$: $x<3$, si $m>9$: $]-\infty;\frac{2m-3}{m-4}[\cup]3;+\infty[$- Si $4<m\leq 9$: $]-\infty;3[\cup]\frac{2m-3}{m-4};+\infty[$

CORRIGE 13 **1)** $\emptyset$ **2)** $\emptyset$ **3)** $-4,54$**4)** $S=\{\frac{11}{3};\frac{1}{4}(3-\sqrt{65});\frac{1}{4}(3+\sqrt{65})$**5)** $\emptyset$**6)** $S=\{\frac{4}{3}\}$;**7**)$S=\{4\}$

CORRIGE 14 **1)**$-1/2$ **2)** $\mathbb{R}-\{2\}$; **3)** $\{5\}$ **4)** $\{-1;1\}$; **5)** $\{-3;3\}$

CORRIGE 15 **1)** Si $m \in \{2;3;5\}$: $\emptyset$- Sinon $\{\frac{-m-1}{m-5}\}$; **2)** Si $m \in \{0;1;\frac{1}{2}\}$: $\emptyset$- Sinon $\{\frac{3m-2}{m}\}$ **3)** Si $m = \pm 1$:$\emptyset$-Sinon : $\frac{m-5}{2}$; **4)**Si $m \in \{1;-1/2\}$: $\emptyset$- Sinon : $\{\frac{4m-7}{10m-4}; m\}$ sauf si $m = 2/5$, auquel cas $\{\frac{2}{5}\}$ **5)** $\frac{m}{x-1} = \frac{1}{x-m}$; **6)** $\frac{mx+1}{x-m} = 3$; **7)** $\frac{x-m}{x-3m} = \frac{x-2}{x-3}$; **8)** $\frac{mx-1}{x-1} + \frac{2x+1}{mx+1} = 0$; **9)** $\frac{(x-m)^2}{x^2} = \frac{x}{x+2m}$; **10)**$\frac{1}{x^2+2} - \frac{2}{x^2-m} = 0$; **11)** $\frac{(1+x)^2}{mx+1} = 1-x$.

CORRIGE 16 1) $\frac{x-2}{x-a} = b$; 2)$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{2}{x}$; 3) $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{x}{b} + \frac{b}{x}$; 4)$\frac{x-1}{x+a} = \frac{b-1}{a+b}$; 5)$\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$

CORRIGE 17 1. Si $m = 0$:$\mathbb{R}$-Si $m = -2$:$\emptyset$-Si $m \neq -2$: $\left\{\frac{2m+1}{m+2}\right\}$

2. (a) $m \in \{0;-1/2\}$
   (b) $m \in \{0;1\}$
3. Si $x \neq 2$: $\{0;\frac{1-2x}{x-2}\}$- Si $x = 2$: $\{0\}$

CORRIGE 18 **1)** $]-\infty;-1[\cup]1;3[$ **2)** $]-\infty;-2[\cup]-1;3[$ **3)** $]-3/2;0[\cup]2;5[$ **4)** $]-\infty;3/4[\cup]3/2;+\infty[$ **5)** $]-\infty;-4[\cup]2;3[\cup]4+\infty[$ **6)** $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$ **7)** $]-2;-1[\cup]0;2[$ **8)** $]-\infty;\frac{9}{4}[\cup]6;+\infty[$

CORRIGE 19 **1)**

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$\frac{2x-3}{x+1}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

2)

x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		3		$+\infty$
$\frac{5x-2}{3-x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

3)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$\frac{2x}{x-2}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

4)

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$\frac{x-2}{x+2}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

5)

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\frac{2x(x-1)}{x+1}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

6)

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\frac{(5x-1)(x+2)}{2x-1}$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

7)

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$\dfrac{x+1}{2x(3-x)}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	

8)

x	$-\infty$		-2		-1		0		3		$+\infty$
$\dfrac{(x+2)^3(3-x)}{x(x+1)}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

9)

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$\dfrac{2x-3}{x+1}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

10)

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$(x+3)(x^2-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

11)

x	$-\infty$		-3		$\frac{5-\sqrt{17}}{4}$		$\frac{5+\sqrt{17}}{4}$		$+\infty$
$(2x^2-5x+1)(x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

12)

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$\dfrac{(2x^2-5x)(3-2x)}{x+1}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

13)

x	$-\infty$		-3		$-1/2$		0		$1/3$		$+\infty$
$\dfrac{(3x-1)(2x+1)}{x^2+3x}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

14)

x	$-\infty$		$-5/2$		-1		$4/7$		$3/4$		$+\infty$
$\dfrac{7x^2+3x-4}{8x^2+14x-15}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	

15)

x	$-\infty$		-5		0		$3/2$		3		$+\infty$
$\dfrac{(2x^2-6x)(3-2x)}{x^2-9+2(x-3)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	

CORRIGE 20 **1)**

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$x(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2)

x	$-\infty$		$-3/2$		4		$+\infty$
$(x-4)(3x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3)

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$(x-4)(x+1)(x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

4)

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$(x-7)(x^2+3)$	$-$		0	$+$	

5) $((2-\sqrt{2})x+1)((2+\sqrt{2})x+1)$;

6)

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$(x^2+1)(x^2-2x-1)$	$+$	0		$-$		0	$+$

7)

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		-1		1		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$(x+1)(x-1)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

8)

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

CORRIGE 21 **1)** $x > -1$ **2)** $-3 < x < -1$ **3)** $x < -1/3$ **4)** $-4 < x < 3$ **5)** $]-\infty;-3[\cup]1;0[\cup]1;+\infty[$ **6)** $]-2;-\dfrac{\sqrt{2}}{2}[\cup]\dfrac{\sqrt{2}}{2};+\infty[$ **7)** $\mathbb{R}-\{3\}$ **8)** $]1;2[$ **9)** $]-\infty;-\dfrac{1}{2}[\cup]0;\dfrac{1}{2}[$ **10)** $]4/3;2[$ **11)** $]-\infty;-4[\cup]-3;0[$ **12)** $]-\infty;-1[\cup]1/4;1[$ **13)** $]-3/2;0[\cup]7/6;2[$ **14)** $]-\infty;-3/2[\cup]0;5[$ **15)** $]1;3/2[$ **16)** $]-2;0[$ **17)** $]-\infty;-6[\cup]4/3;+\infty[$ **18)** $\emptyset$ **19)** $[1;2[\cup]2;3[$ **20)** $\left[\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}-\sqrt{6});\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})\right]$ **21)** $]-\infty;-1/2[\cup]-1/2;\sqrt{2}]\cup[\sqrt{5};+\infty[$.

CORRIGE 22 **1)** $]-2;-1[\cup]-3;4[$
2) $]-1;-1/2[$

CORRIGE 23 Montrer que l'équation :$\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}=c$ a toujours deux racines distinctes, si $c\neq 0$, dont une est comprise entre a et b en supposant que $a<b$.

CORRIGE 24 1. $\mathfrak{D}=\mathbb{R}-\{m\}$

2. $]1;5[$

CORRIGE 26 **1)** $[\dfrac{7+\sqrt{65}}{4};2+\sqrt{6}]$ **2)** $\left]-5;\dfrac{1}{3}(-6-2\sqrt{15})\right[\cup\left]-\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{3}(-6+2\sqrt{15})\right[$ **3)** $]-4;4[$

4) $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}(-1-\sqrt{5})\right[\cup\left]\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1);\dfrac{1}{2}(5-\sqrt{5})\right[\cup\left]\dfrac{1}{2}(5+\sqrt{5});+\infty\right[$

CORRIGE 28 **1)** $\{3\}$ **2)** $\{1/2(1-\sqrt{5});1/2(\sqrt{5}-1)\}$ **3)** $\emptyset$ **4)** $\{5\}$ **5)** $\{-6;-4;5\}$ **6)** $\emptyset$

CORRIGE 29 **1)** $\{5\}$ **2)** $\emptyset$ **3)** $-\dfrac{5}{4}$ **4)** $\emptyset$ **5)** $\emptyset$ **6)** $\{10\}$ **7)** $\{4\}$ **8)** $\{2\}$ **9)** $\{-1;2\}$ **10)** $\{0\}$ **11)** $\{\dfrac{3}{2}\}$ **12)** $-1/2;-3$ **13)** $[0;4[$ **14)** $]-4;4[$ **15)** $[-2;2]$ **16)** $\{0\}$ **17)** $\mathbb{R}$ **18)** $\{0\}$ **19)** $[\dfrac{3}{2};+\infty[$ **20)** $]-\dfrac{1}{2};+\infty[$ **21)** $\emptyset$ **22)** $\{-1;0;1\}$ **23)** $x<1$ **24)** $x<1$ **25)** $]1;5[$ **26)** $]-\infty;0[\cup]\dfrac{10}{3};+\infty[$ **27)** $]-\infty;-\dfrac{1}{4}[\cup]\dfrac{5}{2};+\infty[$ **28)** $]-\infty;-\dfrac{4}{3}[\cup]4;+\infty[$ **29)** $\mathbb{R}$ **30)** $]-1;1[$ **31)** $\emptyset$

CORRIGE 30 Ecrire l'expression sans valeur absolue puis construire son tableau de variations. Le minimum est égal à 2. Tout m strictement inférieur à 2 convient.

CORRIGE 31 **1)** $\emptyset$ **2)** $\{3\}$ **3)** $\emptyset$ **4)** $]-\infty;\sqrt{1}0[\cup]\sqrt{1}0;+\infty[$ **5)** $\emptyset$

CORRIGE 47 La première intégrale est facile à calculer. Ensuite, il faut linéariser $\sin^6 x$. Tout compte fait :

$$I=\frac{15\pi-44}{1152}.$$

CORRIGE 48 $\dfrac{2\pi}{\omega}$

CORRIGE 60 • La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0.
$\forall x\in\mathbb{R},\ f(-x)=|-x-3|+|-x+3|-(-x)^2$.
Or la fonction valeur absolue est paire donc :
$\forall x\in\mathbb{R},\ f(-x)=|x+3|+|x-3|-x^2=f(x)$.
La fonction f est donc paire.
• $\forall x\in\mathbb{R},|x|\leqslant x$, donc :
$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\leqslant x+3+x-3-x^2$.
Soit :
$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\leqslant 2x-x^2$.
Or, la fonction trinôme $x\mapsto 2x-x^2$ est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$ (l'extremum de la fonction trinôme $x\mapsto ax^2+bx+c$ étant atteint pour $x=-\dfrac{b}{2a}$).
En conclusion, nous obtenons :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\leqslant 1.$$

La fonction f est donc majorée par 1 sur $\mathbb{R}$.
•

$$\forall x\geqslant 3,\ f(x)=2x-x^2.$$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to+\infty}=-\infty$.
f n'est donc pas minorée.

CORRIGE 73 • $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x+2+\sqrt{x^2+4}}$
Ensemble de définition :
$\forall x\in\mathbb{R},\sqrt{x^2+4}\geqslant\sqrt{x^2}\geqslant|x|$. Donc :
$\forall x\in\mathbb{R},x+2+\sqrt{x^2+4}\geqslant x+2+|x|\geqslant 2>0$.
f est donc définie sur $\mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{(x^2+4x-4)\sqrt{x^2+4}+x^3+4x}{(x+2+\sqrt{x^2+4})^2\sqrt{x^2+4}}$.
f'(x) est du signe du numérateur de cette fraction.
$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow (x^2+4x-4)\sqrt{x^2+4} \geqslant -x(x^2+4) \Leftrightarrow (x^2+4x-4) \geqslant -x\sqrt{x^2+4}$.(1)

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{8}$		0		$-2+\sqrt{8}$		$+\infty$
x^2+4x-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$-x\sqrt{x^2+4}$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $f'(x)$		?		$-$		?		$+$	

Sur $]-\infty;-2-\sqrt{8}]$:
$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow (x^2+4x-4)^2 \geqslant x^2(x^2+4) \Leftrightarrow x^3+\dfrac{1}{2}x^2-4x+2 \geqslant 0$.
Définissons la fonction ϕ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = x^3+\frac{1}{2}x^2-4x+2.$$

Ses variations sont résumées dans le tableau suivant :

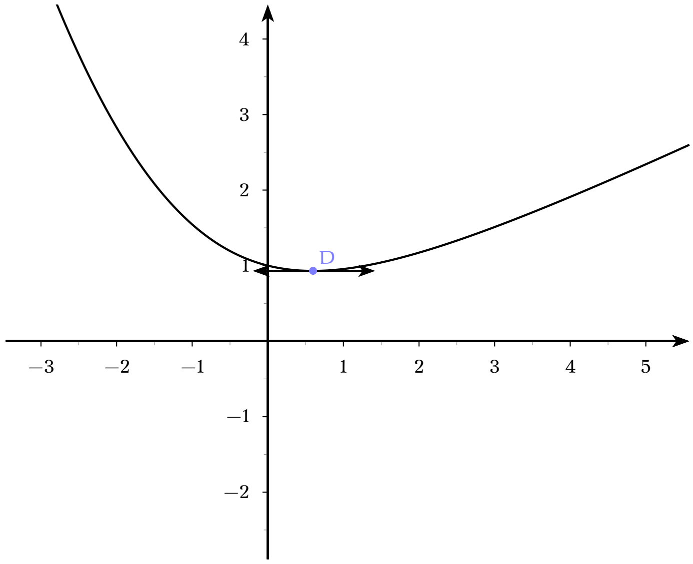
x	$-\infty$		$\frac{-4}{3}$		1		$+\infty$
$\phi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\phi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$M>0$	$\searrow$	$m<0$	$\nearrow$	$+\infty$

ϕ est strictement croissante sur $]-\infty;-2-\sqrt{8}] \subset \left]-\infty;\dfrac{-4}{3}\right[$.
De plus : $\phi(-2-\sqrt{8}) = -88-14\sqrt{8} < 0$
f'(x) est donc strictement négative sur cet intervalle.
Il reste à étudier l'inéquation (1) sur $[0,-2+\sqrt{8}]$.

$$(1) \Leftrightarrow 0 \leqslant -(x^2+4x-4) \leqslant x\sqrt{x^2+4} \Leftrightarrow (x^2+4x-4)^2 \leqslant x^2(x^2+4) \Leftrightarrow \phi(x) \leqslant 0.$$

Or :
- $[0,-2+\sqrt{8}] \subset [0;1]$
- $\phi(0) = 2 > 0$
- $\phi(-2+\sqrt{8}) < 0$. Le théorème de la bijection permet d'affirme que ϕ s'annule une unique fois sur $[0,-2+\sqrt{8}]$ en un réel $\alpha \simeq 0,5983$.

(Pour les puristes, $\alpha = 2\sqrt[3]{\dfrac{343}{216}}\cos(\dfrac{1}{3}\arccos\left(\dfrac{-289}{343}\right)+\dfrac{4\pi}{3})+\dfrac{1}{6}$).
f' est donc strictement négative sur $[0;\alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha;-2+\sqrt{8}]$.
Conclusion : f est strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$.

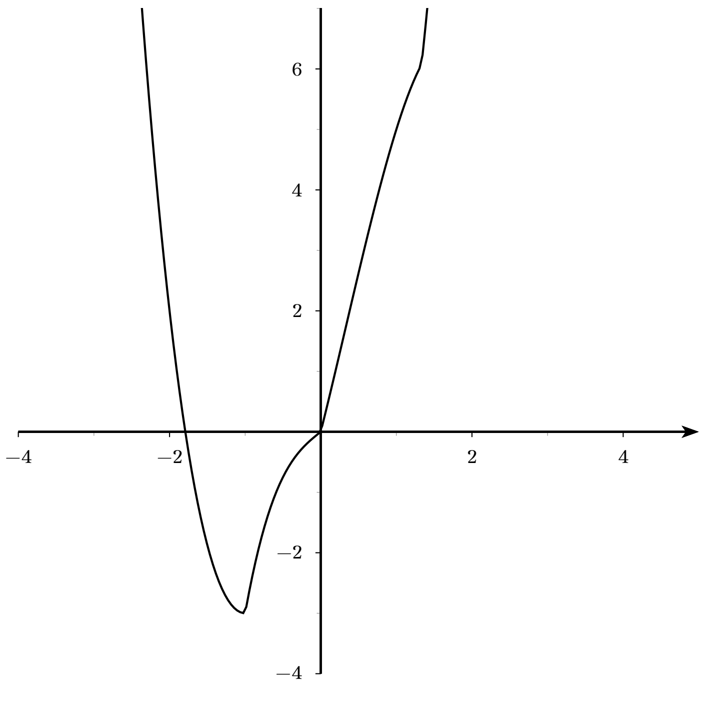


Limite en $+\infty$.
$\forall x > 2, x + 2 > 2x \text{et} \sqrt{x^2+4} > \sqrt{x}^2 > x$ .Donc : $\forall x > 0, \sqrt{x^2+4} < \sqrt{x^2+4x+4} \leqslant x+2$ soit : $\forall x > 0, 0 < x + 2 + \sqrt{x^2+4} < 2(x+2)$ et donc par passage à l'inverse :
$\forall x > 0, f(x) > \dfrac{x^2+4}{2(x+2)}$.
Par comparaison : f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
Limite en $-\infty$:

- $g(x) = \sup(-x^3 + x^2 + 5x, 2x^3 + x)$

$-x^3 + x^2 + 5x \geqslant 2x^3 + x \Leftrightarrow x(x+1)(x - \dfrac{4}{3}) \leqslant 0$
Conclusion :

$$g(x) = \begin{cases} -x^3 + x^2 + 5x & \text{si} \quad x \in]-\infty; -1] \cup \left[0; \dfrac{4}{3}\right] \\ 2x^3 + x & \text{sinon} \end{cases}$$



Ensuite l'étude est simple. La fonction n'est pas dérivable aux points de raccordement.

$\bullet h(x) = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{1+\cos x}}$

h est définie pour tout x tel que $\dfrac{1+\cos 2x}{1+\cos x} \geqslant 0$: elle est donc définie sur $\mathbb{R} - \pi(2\mathbb{Z}+1)$.
De plus elle est 2π-périodique et paire : il est donc suffisant de l'étudier sur un intervalle de longueur π.
Etudions donc h sur $[0, \pi[$.
Posons : $\forall x \in [0, \pi[, u(x) = \dfrac{1+\cos 2x}{1+\cos x}$.
u est dérivable sur $[0, \pi[$ et :
$\forall x \in [0, \pi[, u'(x) = \dfrac{-2\sin 2x(1+\cos x) - (1+\cos 2x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \dfrac{-2\sin x \cos x(2+\cos x)}{(1+\cos x)^2}$
Nous obtenons le tableau suivant :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$u'(x)$	0	$-$	0	$+$	||
$u(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ||

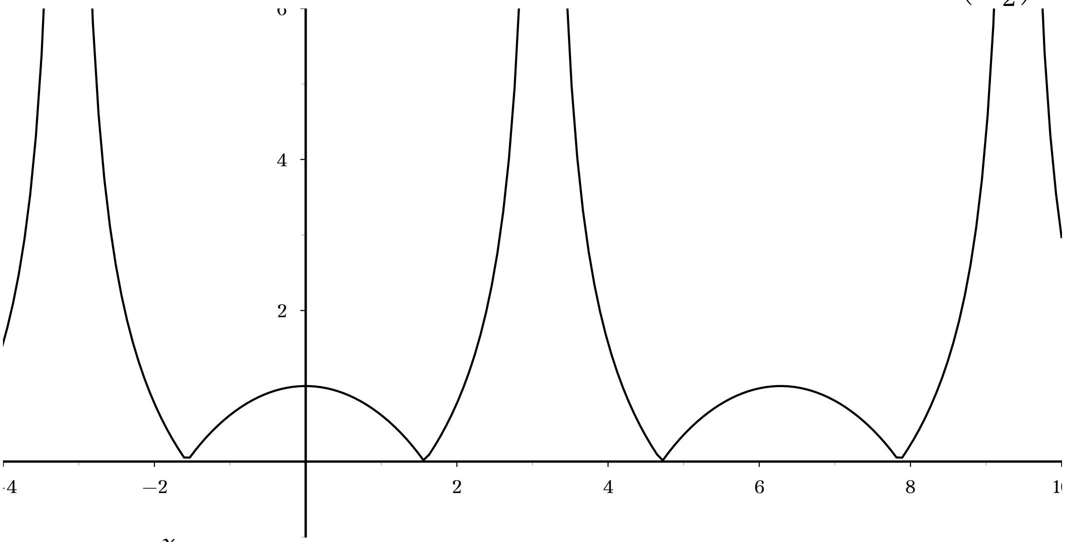
On termine en remarquant que u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations.
Les limites sont faciles à déterminer. Dérivabilité de h en $\dfrac{\pi}{2}$:

$\forall x \in [0, \pi[- \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}, \dfrac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = \sqrt{\dfrac{2}{1+\cos x}} \dfrac{|\cos x|}{x - \frac{\pi}{2}}$.

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{|\cos x|}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = (\cos')(\dfrac{\pi}{2}) = -1.$

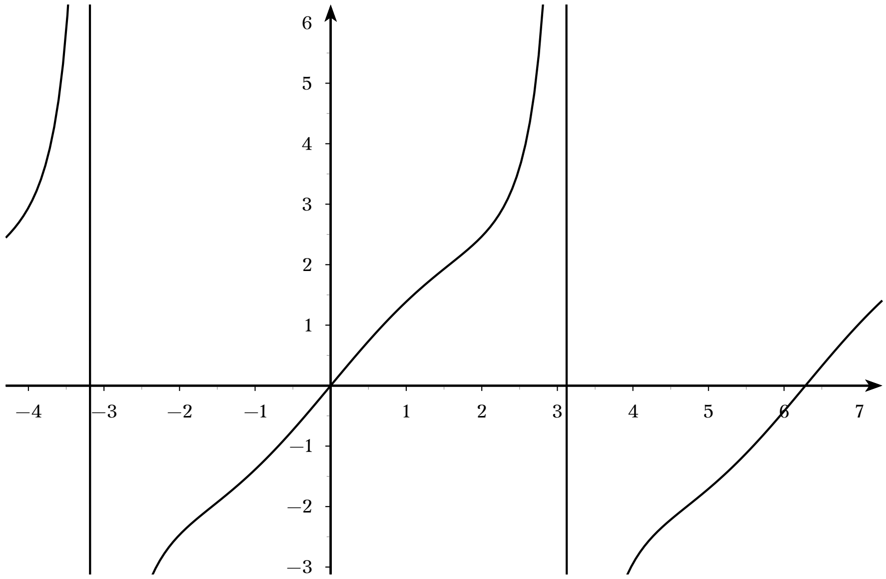
$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{|\cos x|}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{-\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = (-\cos')(\dfrac{\pi}{2}) = 1.$

La fonction h n'est donc pas dérivable en $\dfrac{\pi}{2}\cdot$ car les deux limites trouvées ci-dessus ne sont pas égales. Par contre, nous venons de démontrer que h est dérivable à droite et à gauche de $\dfrac{\pi}{2}$, et plus précisément : $h'_d\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ et $h'_g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$.
La courbe représentative de h possède donc un point anguleux de coordonnées $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$



• $\phi(x) = \tan\dfrac{x}{2} + \sin x$.
ϕ est définie sur $\mathbb{R} - \pi(2\mathbb{Z}+1)$, 2π -périodique (il suffit donc de l'étudier sur un intervalle

de longueur 2π) et impaire : il est donc suffisant de l'étudier sur un intervalle de longueur π.
Etudions donc ϕ sur $[0,\pi[$.
$\forall x \in [0,\pi], \frac{x}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$: la fonction tangente est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
De même la fonction sinus est strictement croissante sur $[0,\pi]$. La fonction ϕ est donc strictement croissante sur $[0,\pi]$.
$\lim\limits_{x\to\pi} \phi(x) = +\infty$: La droite d'équation $y = \pi$ est asymptote verticale à C.



CORRIGE 178 Soit $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ En prenant $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ on obtient $x = 0$ En prenant $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ on obtient $t = 0$.
En prenant $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ on obtient $(a+b)(y+z) = 0$. a et b étant quelconques, on obtient $A = \begin{pmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{pmatrix}$

CORRIGE 185 **Partie A**

1. En remplaçant $P(x)$ par son expression en fonction de x nous obtenons successivement :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ xP'(x) - 2P(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ x(2ax+b) - 2(ax^2+bx+c) = 0$,
   puis :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ xP'(x) - 2P(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ -bx - 2c = 0$.
   Or une fonction affine $h : x \mapsto ax + b$ est nulle (i.e : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = 0$) si et seulement si les réels a et b sont nuls.
   Ceci permet donc d'obtenir finalement l'équivalence suivante :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ xP'(x) - 2P(x) = 0 \Leftrightarrow b = c = 0.$$
   Conclusion : le triplet (a,b,c) doit être choisi dans $\mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}$.
2. • g est le quotient de la fonction f dérivable sur $]0;+\infty[$ et de la fonction $x \mapsto x^2$ qui est dérivable sur $]0;+\infty[$ sans s'y annuler.
   Par conséquent, g est dérivable sur $]0;+\infty[$, et :
   $$\forall x \in]0;+\infty[,\ g'(x) = \frac{xf'(x) - 2xf(x)}{x^4}$$
   soit :
   $$\forall x \in]0;+\infty[,\ g'(x) = \frac{f'(x) - 2f(x)}{x^3}.$$
   • f vérifie la relation (1) $\Leftrightarrow \forall x \in]0;+\infty[,\ xf'(x) - 2f(x) = \ln x$
   Or : $\forall x \in]0;+\infty[, x \neq 0$, donc :
   f vérifie la relation (1) $\Leftrightarrow \forall x \in]0;+\infty[,\ \dfrac{xf'(x) - 2f(x)}{x^3} = \dfrac{\ln x}{x^3}$.

CORRIGE 191 **Partie A**

1.
$$I(x) = \left[-\frac{1}{x}e^{-tx}\right]_0^{\pi} = \frac{1-e^{-\pi x}}{x}.$$

2. (a) $g'(x) = \pi(e^{\pi x} - 1)$
   g est donc décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$.
   Or $g(0) = 0$ donc : $\forall x > 0, g(x) > 0$.

   (b) D'après la question 1. la fonction I est dérivable sur $]0;+\infty[$ et :
$$\forall x > 0,\ I'(x) = \frac{x\pi e^{-\pi x} - 1 + e^{-\pi x}}{x^2} = e^{-\pi x}\frac{x\pi - e^{\pi x} + 1}{x^2} = -g(x)\frac{e^{-\pi x}}{x^2}.$$
   Par conséquent :
$$\forall x > 0,\ I'(x) < 0.$$
   La fonction I est donc strictement sur $]0;+\infty[$.

Index

1 notes personnelles