Cours sur les limites de fonctions et la continuité

M. HARCHY TS$_2$-Lycée Agora-2015/2016

1 Limite d'une fonction

1.1 Limite à l'infini

1.1.1 Limite finie d'une fonction à l'infini

Définition 1

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle de la forme $[a\ ;\ +\infty[$. Soit ℓ un réel.
On dit que f **admet pour limite ℓ au voisinage de** $+\infty$, ou encore que f **tend vers ℓ au voisinage de** $+\infty$, si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les réels $f(x)$ pour x assez grand.

Autrement dit, pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, il existe un réel B tel que $f(x) \in I$ si $x > B$.

Intuitivement :
On peut rendre $f(x)$ aussi proche de ℓ que l'on veut à condition de prendre x assez grand.

On dit aussi « f a pour limite (ou tend vers) ℓ en $+\infty$ » ou « $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ ».

On note : $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.

Remarque :

Tout intervalle ouvert contenant ℓ contient un intervalle de la forme $]\ell-\varepsilon\ ;\ \ell+\varepsilon[$.
On peut donc se limiter à utiliser la propriété de la définition avec les intervalles de cette forme : une fonction f admet une pour limite ℓ en $+\infty$ si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel B tel que pour tout $x > B$, $|f(x)-\ell| < \varepsilon$ (c'est-à-dire $f(x) \in]\ell-\varepsilon\ ;\ \ell+\varepsilon[$).

Définition 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle de la forme $]-\infty\ ;\ b]$. Soit ℓ un réel.
On dit que f admet pour limite ℓ au voisinage de $-\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les réels $f(x)$ pour x négatif assez grand en valeur absolue.

Autrement dit, pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, il existe un réel B tel que $f(x) \in I$ si $x < B$.

Exemples :

1. La fonction constante définie par $f(x) = c$ pour tout réel x tend vers c en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
3. Plus généralement, pour tout entier $p \geq 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^p} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^p} = 0$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Définition 3 : Asymptote horizontale

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$), la droite d'équation $y = \ell$ est appelée **asymptote horizontale à** $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).
Cela traduit le fait que les points de la courbe $\mathcal{C}_f$ se rapprochent indéfiniment de la droite d d'équation $y = \ell$ (c'est-à-dire leur ordonnée se rapproche indéfiniment de ℓ) lorsque leur abscisse tend vers l'infini.

Pour étudier la **position relative** de $\mathcal{C}_f$ et de d, c'est-à-dire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à d, il faut étudier le signe de la différence $f(x) - \ell$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$.
Étudier les asymptotes à la courbe représentant cette fonction.

1.1.2 Limite infinie d'une fonction à l'infini

Définition 4

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle de la forme $[a\,;\,+\infty[$.
On dit que f **tend vers** $+\infty$ **au voisinage de** $+\infty$, si tout intervalle ouvert de la forme $]A\,;\,+\infty[$ contient tous les réels $f(x)$ pour x assez grand.

Autrement dit : pour tout réel A, il existe un réel B tel que $f(x) > A$ si $x > B$.

Intuitivement :
on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut à condition de prendre x assez grand.

On dit que f **tend vers** $+\infty$ **en** $-\infty$, si…

On dit que f **tend vers** $-\infty$ **en** $+\infty$, si…

On dit que f **tend vers** $-\infty$ **en** $-\infty$, si…

Exemples

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.
3. Plus généralement, pour tout entier $p \geq 1$:

$$\lim_{x\to+\infty} x^p = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^p = \begin{cases} +\infty \text{ si } p \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } p \text{ est impair} \end{cases}$$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

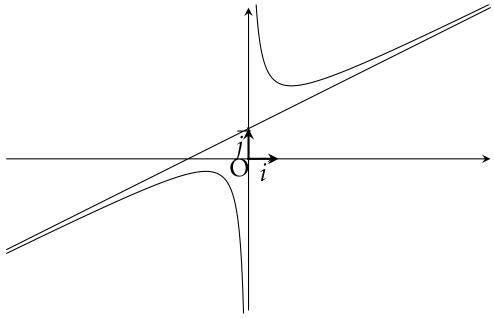
Définition 5 : Asymptote oblique

S'il existe un couple (a,b) de réels tels que $a \neq 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$, la droite d'équation $y = ax + b$ est appelée **asymptote oblique à** $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ (définition analogue en $-\infty$).

Cela traduit le fait que les points de la courbe $\mathcal{C}_f$ se rapprochent indéfiniment de la droite d d'équation $y = ax + b$ lorsque leur abscisse tend vers l'infini.

Pour étudier la **position relative** de $\mathcal{C}_f$ et de d, c'est-à-dire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à d, il faut étudier le signe de la différence $f(x) - (ax+b)$.

Exemple :
Soit f la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{x}$.



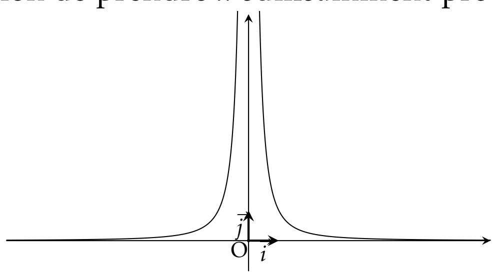
1.2 Limite infinie d'une fonction en un point

On considère dans cette partie un réel a qui n'appartient pas à $\mathcal{D}_f$, mais qui est une borne de $\mathcal{D}_f$.

Définition 6

Soit f une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]a;c[$ ($c > a$ ou $c = +\infty$) ou $]c;a[$ ($c < a$ ou $c = -\infty$). On dit que f **tend vers** $+\infty$ **au voisinage de** a, si l'on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut à condition de prendre x suffisamment proche de a.

Exemple :
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.



Définition 7 : Limite à droite

Soit f une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]a;c[$ ($c > a$ ou $c = +\infty$).
On dit que f **tend vers** $+\infty$ **quand** x **tend vers** a **par valeurs supérieures (ou à droite)**, si l'on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut à condition de prendre x supérieur à a suffisamment proche de a.

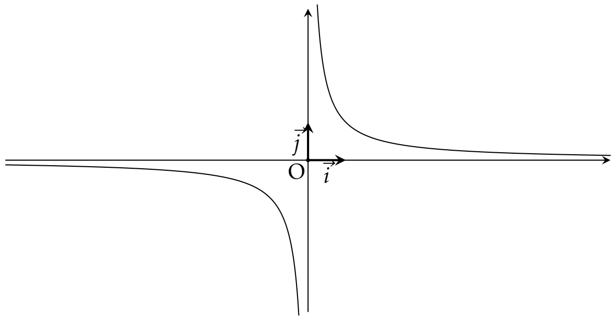
Définition 8 : Limite à gauche

Soit f une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]c;a[$ ($c < a$ ou $c = -\infty$).
On dit que f **tend vers** $+\infty$ **quand** x **tend vers** a **par valeurs inférieures (ou à gauche)**, si l'on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut à condition de prendre x inférieur à a suffisamment proche de a.

Exemple :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ et

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$.



Exemples

1. Pour tout entier $p \geq 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x^p} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{1}{x^p} = \begin{cases} +\infty \text{ si } p \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } p \text{ est impair} \end{cases}$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Définition 9 : Asymptote verticale

Si f a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ quand x tend vers a (éventuellement seulement à droite ou à gauche de a), la droite d'équation $x = a$ est appelée **asymptote verticale à** $\mathcal{C}_f$ en a.

1.3 Limite finie d'une fonction en un point

Définition 10

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$, et soit a un réel qui appartient à $\mathcal{D}_f$ ou est une borne de $\mathcal{D}_f$. Soit ℓ un réel.
On dit que f **tend vers** ℓ **lorsque** x **tend vers** a si l'on peut rendre $f(x)$ aussi proche de ℓ que l'on veut à condition de prendre x suffisamment proche de a.
On admettra le résultat suivant :

Théorème 1

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$ et a un réel appartenant à $\mathcal{D}_f$.
Si f admet une limite en a, alors cette limite est $f(a)$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

On dit alors que la fonction f est **continue en** a.

On admettra de plus que les fonctions usuelles sont continues en tout point de leur ensemble de définition.

Exercice 2

1. $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x} = \ldots$
2. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x}{1+x^2} = \ldots$

2 Règles de calcul sur les limites

On considère dans ce paragraphe deux fonctions f et g définies sur un même intervalle I. Les limites sont prises en $-\infty$, $+\infty$, ou en un réel a qui, ou bien appartient à I, ou bien est une borne de I.

2.1 Limite d'une somme

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Exercice 3

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+x^2+2\sqrt{x}-12\right)$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^4+x^2-3x-25\right)$.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^5+4x^3+2x+17\right)$.
4. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}+5x^2-2x+1\right)$.

2.2 Limite d'un produit

Si f a pour limite	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $f\times g$ a pour limite	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exercice 4

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}2x(x+3)$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+4)(-2x+5)$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^2+5)\left(\dfrac{1}{x}-3\right)$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}2\sqrt{x}(-5x+2)$.

2.3 Limite d'un quotient

Si f a pour limite	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	ℓ	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
et si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	0^+	0^-	0^+	0^-	$\pm\infty$	0	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\pm\infty$
alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	FI	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exercice 5

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2}{5x+1}$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{x^2-2x+5}$.
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-4}{3\sqrt{x}}$.
4. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1}{x-4}$.
5. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{(x+3)^2}$.
6. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-2}{1-x}$.
7. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-3x}{2x-4}$.
8. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x+1}{3x-5}$.

3 Limite d'une fonction composée

3.1 Composée de deux fonctions

Définition 11

Soient g et u deux fonctions d'ensembles de définition $\mathcal{D}_g$ et $\mathcal{D}_u$.
On appelle fonction composée de u par g la fonction notée $g \circ u$ définie par :

$$(g \circ u)(x) = g(u(x))$$

sur l'ensemble $\mathcal{D}$ des réels x appartenant à $\mathcal{D}_u$ tels que $u(x)$ appartient à $\mathcal{D}_g$.

Exemple :

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{-2x+4}$. f peut s'écrire comme la composée $g \circ u$:
   - de la fonction u définie sur ...... par $u(x) =$
   - par la fonction g définie sur ...... par $g(X) =$

2. Soient :

   - h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3x^2 + 2x + 1$
   - g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(X) = \frac{1}{X}$.

   Alors :

   - $g \circ h$ est la fonction définie sur ...... par $(g \circ h)(x) =$
   - $h \circ g$ est la fonction définie sur ...... par $(h \circ g)(x) =$

3.2 Limite d'une fonction composée

Théorème 2

Soient f, g et u trois fonctions telles que $f = g \circ u$.
Si $\lim_{x \to a} h(x) = b$ et $\lim_{X \to b} g(X) = c$, avec (a, b, c désignant des réels ou $\pm\infty$.) alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = c$$

Exercice 6

Calculer les limites suivantes :

1. Limite en $-\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

2. Limite en $\frac{1}{3}$ de la fonction f définie sur $\left]\frac{1}{3}\ ;+\infty\right[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$.

3. Limite en $+\infty$ de la suite $(f(n))$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $f(n) = \sqrt{4 - \frac{1}{n}}$.

4 Limites et inégalités

4.1 Théorème de comparaison pour des limites infinies

Théorème 3

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a\ ;\ +\infty[$ telles que :
- pour tout réel x dans $[a\ ;\ +\infty[$, $f(x) \geq g(x)$;
- $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$; alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Théorème 4

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a\,;\,+\infty[$ telles que :
- pour tout réel x dans $[a\,;\,+\infty[$, $f(x) \leq g(x)$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$; alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

Exercice 7

Calculer la limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\cos^2 x - x^2$.

4.2 Théorème des gendarmes

Théorème 5 : Théorème des gendarmes

Soit ℓ un réel et soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a\,;\,+\infty[$ telles que :
- pour tout réel x dans $[a\,;\,+\infty[$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$; alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

Exercice 8

Calculer la limites en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Corollaire 1 :

Soit ℓ un réel et soient f, u et v trois fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a\,;\,+\infty[$. **Si** pour tout réel x dans $[a\,;\,+\infty[$, $u(x) \leq f(x) - \ell \leq v(x)$ et **si** $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = 0$, **alors** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

Exercice 9

Calculer la limites en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout réel $x > 0$, $\frac{x}{x^2+2} \leq f(x) - 3 \leq \frac{x}{x^2+1}$.

Corollaire 2 :

Soit ℓ un réel et soient f et u deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a\,;\,+\infty[$. **Si** pour tout réel x dans $[a\,;\,+\infty[$, $|f(x) - \ell| \leq u(x)$ et **si** $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$, **alors** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

Exercice 10

Calculer la limites en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2 + \frac{\cos x}{x}$.

4.3 Prolongement des inégalités

Théorème 6

Soient ℓ et ℓ' deux réels, et soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a\ ;\ +\infty[$ telles que :
- pour tout réel x dans $[a\ ;\ +\infty[$, $f(x) \leq g(x)$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell'$; alors :

$$\ell \leq \ell'$$

Remarque :

On dispose d'énoncés strictement analogues pour les limites en $-\infty$ (intervalles du type $]-\infty; a]$) ou en un réel a (intervalles du type $]a-\alpha; a+\alpha[$).

5 Continuité

5.1 Définition et exemples

Définition 12

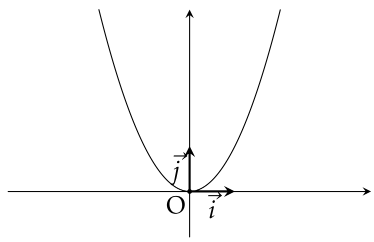
Soient a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I contenant a.
On dit que f est **continue en** a si f admet une limite en a, c'est-à-dire si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

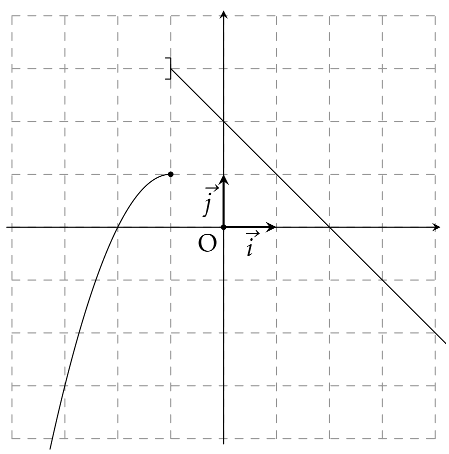
On dit que f est continue sur l'intervalle I si f est continue en tout réel a de I.
Intuitivement :
La courbe représentative d'une fonction f continue sur un intervalle I peut être tracée sur cet intervalle sans lever le crayon. Elle est « d'un seul morceau » : elle ne présente pas de discontinuités, de « sauts ».

Exemple

- La fonction carré est continue sur $\mathbb{R}$.



- La fonction f représentée ci-contre n'est pas continue en -1 :



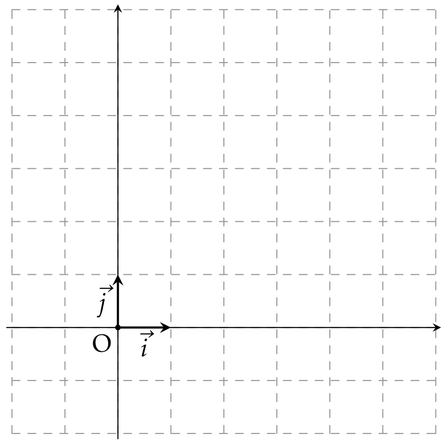
• **Fonction partie entière**

Pour tout réel x, il existe un unique entier relatif n tel que $x \in [n; n+1[$, c'et-à-dire $n \leq x < n+1$.

On appelle cet entier la **partie entière** de x, que l'on note $\mathrm{E}(x)$.

$\mathrm{E}(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

La fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$: elle est discontinue en tout entier relatif.
Elle est en revanche continue sur tout intervalle de la forme $[n\ ;\ n+1[$.



Exercice 11

$\mathrm{E}(1{,}7) = \ldots$; $\mathrm{E}(-2{,}1) = \ldots$.

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{si} \quad x < 0 \\ k & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$
Pour quelle valeur de k la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

5.2 Continuité des fonctions usuelles

Théorème 7

Les fonctions polynômes, rationnelles, racine carrée, valeur absolue, sinus et cosinus sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
Toutes les fonctions construites algébriquement par somme, produit, quotient, composition des fonctions précédentes sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.

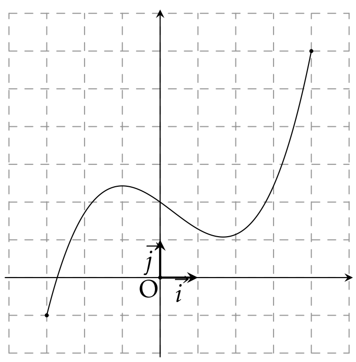
Exemples

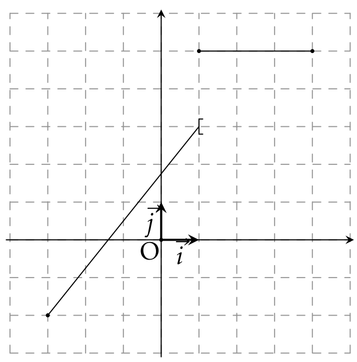
1. Les fonctions polynômes, valeur absolue, sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction racine carrée est continue sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. La fonction inverse est continue sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et sur $]0\ ;\ +\infty[$.

5.3 Théorème des valeurs intermédiaires

5.3.1 Cas général

Exemple :



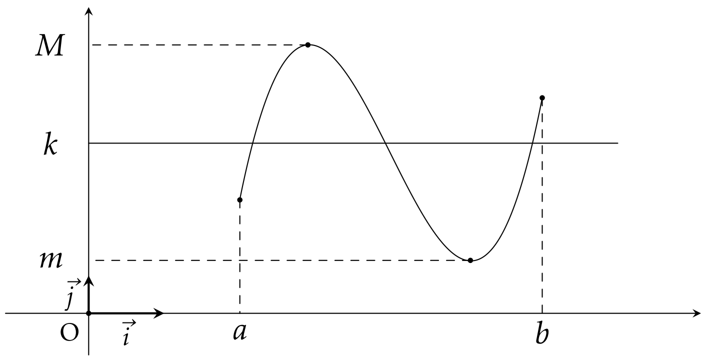


Théorème 8 : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ (a et b étant deux réels tels que $a < b$).
Soient m et M le minimum et le maximum de f sur $[a\,;\,b]$. Alors tout réel de l'intervalle $[m\,;\,M]$ est atteint **au moins une fois** par f.

Remarque :

1. *Autrement dit :* pour tout réel k compris entre m et M, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.
2. *Autrement dit :* pour tout réel k compris entre m et M, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a\,;\,b]$.
3. L'intervalle $[m\,;\,M]$ correspond en fait à l'**image par f de l'intervalle** $[a\,;\,b]$, notée $f([a\,;\,b])$.
   Si f est définie sur l'intervalle I, l'image de I par f est définie par $f(I) = \{f(x) \,/\, x \in I\}$.



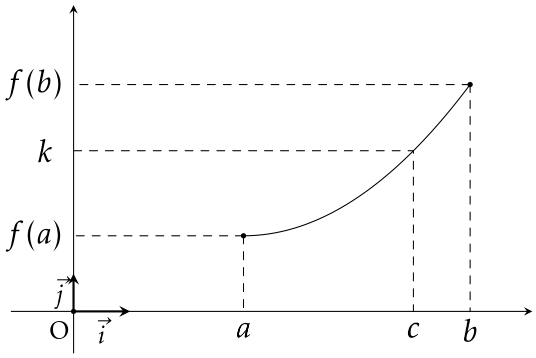
5.3.2 Cas particulier d'une fonction strictement monotone

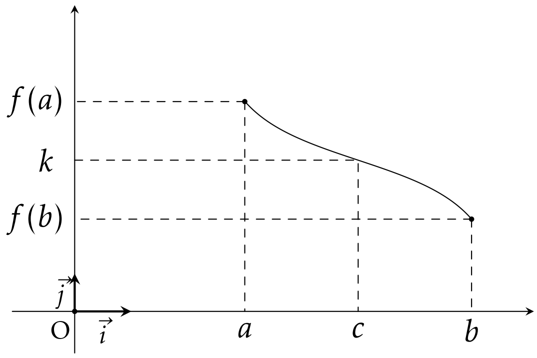
Théorème 9

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Alors tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteint **une fois et une seule** par f.

Remarque :

1. *Autrement dit :* pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **un unique** réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.
2. *Autrement dit :* pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **une unique solution** dans l'intervalle $[a\,;\,b]$.
3. Si f est strictement croissante, $f([a\,;\,b]) = [f(a)\,;\,f(b)]$.
   Si f est strictement décroissante, $f([a\,;\,b]) = [f(b)\,;\,f(a)]$.





Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 5$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-2\,;\,1]$ et déterminer une valeur approchée de α à 0,01 près.

Théorème 10

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $]a\,;\,b[$, où a désigne un réel ou $-\infty$ et b désigne un réel ou $+\infty$, telle que f admet des limites en a et b, finies ou infinies. Alors pour tout réel k de l'intervalle $]\lim_{x\to a} f(x)\,;\,\lim_{x\to b} f(x)[$ ou $]\lim_{x\to b} f(x)\,;\,\lim_{x\to a} f(x)[$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $]a\,;\,b[$.

Exercice 14

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x + 1$. Etudier f. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et en déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x^3 + 3x^2 + 5$. Etudier g. Montrer que l'équation $g(x) = 3$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et en déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près.

CONVENTION :

*dans le tableau de variation d'une fonction f, les flèches obliques traduisent la **continuité** et la **stricte monotonie** de la fonction sur l'intervalle considéré.*