Corrigé exercice 51p34

51 1. $u_1 = -\frac{1}{2} \times u_0 + 3 = -\frac{1}{2} \times 1 + 3 = \frac{5}{2}$;

$u_2 = -\frac{1}{2} \times u_1 + 3 = -\frac{1}{2} \times \frac{5}{2} + 3 = -\frac{5}{4} + \frac{12}{4} = \frac{7}{4}$.

On a $u_1 - u_0 = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$ et $u_2 - u_1 = \frac{7}{4} - \frac{5}{2} = -\frac{3}{4}$, donc

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$. La suite (u_n) n'est donc pas arithmétique.

On a $\frac{u_1}{u_0} = \frac{5}{2}$; $\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{7}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{7}{10}$, donc $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$. La suite (u_n) n'est pas géométrique.

2. Pour tout entier naturel n (qui se note $\forall n, n \in \mathbb{N}$),

$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = -\frac{1}{2} \times u_n + 3 - 2 = -\frac{1}{2} \times (v_n + 2) + 1$

$= -\frac{1}{2} v_n - 1 + 1 = -\frac{1}{2} v_n$. Pour tout entier naturel n, on a donc $V_{n+1} = -\frac{1}{2} V_n$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$.

3. $v_0 = u_0 - 2 = 1 - 2 = -1$, ainsi $\forall n, n \in \mathbb{N}$, $v_n = -1 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

$\forall n, n \in \mathbb{N}$,
$v_n = u_n - 2 \Leftrightarrow u_n = v_n + 2 \Leftrightarrow u_n = -1 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2$.

On a $-\frac{1}{2} < 0$, la suite $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ n'est ni croissante ni décroissante et la suite (u_n) n'est donc ni croissante ni décroissante.
Les termes de la suite semblent se rapprocher autant que l'on veut vers une valeur limite : 2. $\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Corrigé exercice 74 p38

74 1. $u_1 = \frac{u_0}{3u_0 + 1} = \frac{2}{3 \times 2 + 1} = \frac{2}{7}$;

$u_2 = \frac{u_1}{3u_1 + 1} = \frac{\frac{2}{7}}{3 \times \frac{2}{7} + 1} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{13}{7}} = \frac{2}{13}$;

$u_3 = \frac{u_2}{3u_2 + 1} = \frac{\frac{2}{13}}{3 \times \frac{2}{13} + 1} = \frac{\frac{2}{13}}{\frac{19}{13}} = \frac{2}{19}$.

$v_1 = \frac{1}{u_1} = \frac{1}{\frac{2}{7}} = \frac{7}{2}$; $v_2 = \frac{1}{u_2} = \frac{1}{\frac{2}{13}} = \frac{13}{2}$; $v_3 = \frac{1}{u_3} = \frac{1}{\frac{2}{19}} = \frac{19}{2}$.

2. $\forall n, n \in \mathbb{N}$
$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\frac{u_n}{3u_n + 1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{3u_n + 1}{u_n} - \frac{1}{u_n}$

$= \frac{3u_n}{u_n} = 3$. $\boxed{\forall n, n \in \mathbb{N} \quad V_{n+1} - V_n = 3}$

La suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 3$.

3. $v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{2}$. La suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{2}$, on a alors pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 + n \times r = \frac{1}{2} + 3n$.

- $\forall n, n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{v_n}$, ainsi, pour tout entier naturel n,

$u_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + 3n} = \frac{1}{\frac{1 + 6n}{2}} = \frac{2}{1 + 6n}$.