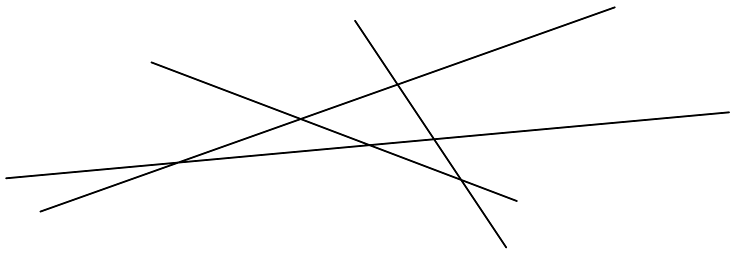
Le novice Fourier et les 17 droites

Nous avons déjà osé ici ou là quelques spéculations concernant le mode de pensée de Joseph Fourier. Nous nous proposons de la voir à l'œuvre sur un exemple compréhensible sans exploiter de grandes connaissances mathématiques.

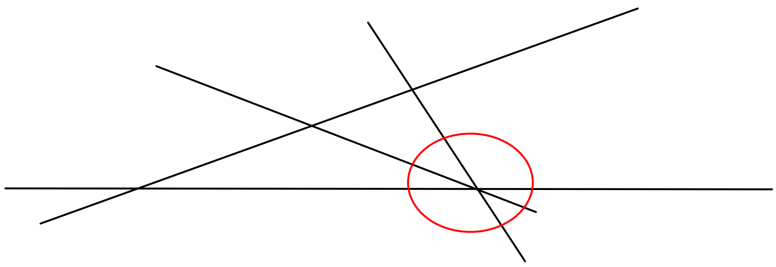
A Saint-Benoît-sur-Loire, le novice Fourier meublait ses loisirs en recherchant s'il était possible de tracer 17 droites qui aient 101 points d'intersections.

Le nombre de points d'intersection des droites du plan est une question qui peut être abordée dès l'école élémentaire (voir Math CE2-CM, Godinat, Timon, Worrobel, exercice 624 p. 174, Hachette 2000).



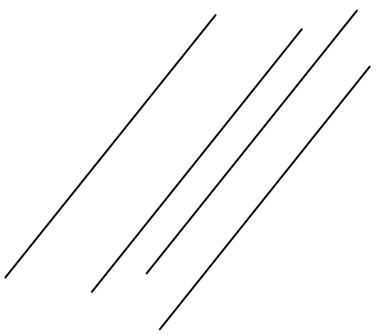
4 droites → 6 points

Les 6 points du cas général peuvent se réduire à moins dans certains cas particuliers :

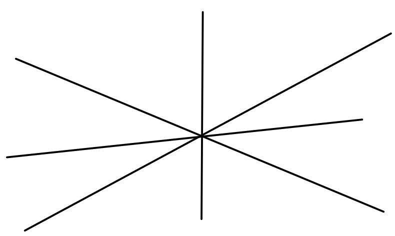


Au point triple : 3→1

4 droites 6-2=4 points.



0 point



1 point

L'élève de l'école élémentaire conclura assez facilement que le nombre maximum de points d'intersection de 17 droites est (17 x 16) / 2, soit 136 puisque chacune des 17 droites rencontre les 16 autres soit (17 x 16) rencontres, chaque point étant compté deux fois (une fois sur chacune des deux droites sécantes).

Les publications de Joseph Fourier attestent qu'il avait le goût de la généralisation des problèmes. Il s'intéressa aux solutions d'un polynôme de degré quelconque ; la théorie de la transformée d'une fonction est très générale.

Le problème des 101 points qu'évoque Joseph Fourier peut donc être posé ainsi :

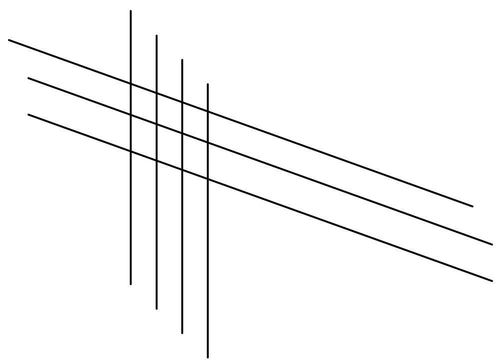
« N droites d'un plan ont au maximum n(n-1)/2 points d'intersection. Il est possible d'exhiber un tracé faisant apparaître ces n(n-1)/2 points. Il est possible aussi pour tout N de décrire un tracé avec 0 point d'intersection ; un tracé avec 1 point d'intersection ; un tracé avec n points d'intersection (si N>2).
Qu'en est-il pour chacune des valeurs inférieure à n(n-1)/2 ? Proposer une construction pour le cas particulier : N=17 et 101 points d'intersection. »

[Si Joseph Fourier s'est intéressé à ce cas particulier, c'est qu'il savait (par induction ?) qu'il ne conduisait pas à une impossibilité.]

On peut rechercher des éléments de réponses en partant de quelques cas particuliers :

Points d'intersection avec des parallèles selon deux directions

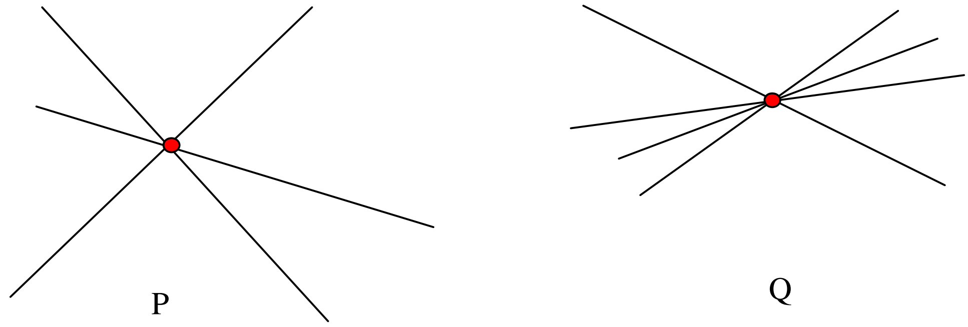
n=p+q (p selon une direction, q selon l'autre): pq points



Nombres de droites : n = p + q , nombre de points pq

pour n=2→ 0, 1
pour n=3→ 0 ou 2
pour n=4→ 0, 2 ou 3
pour n=5→ 0, 4, ou 6
pour n=6→ 0, 5, 8 ou 9
pour n=7→ 0, 6, 10 ou 12
pour n=8→ 0, 7, 12, 15 ou 16
pour n=9→ 0, 8, 14, 18 ou 20
pour n=10→ 0, 9, 16, 21, 24 ou 25
pour n=11→ 0, 10, 18, 24, 28 ou 36
pour n=12→ 0, 11, 20, 27, 32, 35 ou 36
pour n=13→ 0, 12, 22, 30, 36, 40 ou 42
pour n=14→ 0, 13, 24, 33, 40, 45, 48 ou 49
pour n=15→ 0, 14, 26, 36, 44, 50, 54 ou 56
pour n=16→ 0, 15, 28, 39, 48, 55, 60, 63 ou 64
pour n=17→ 0, 16, 30, 42, 52, 60, 66, 70 ou 72

17 droites avec deux points multiples

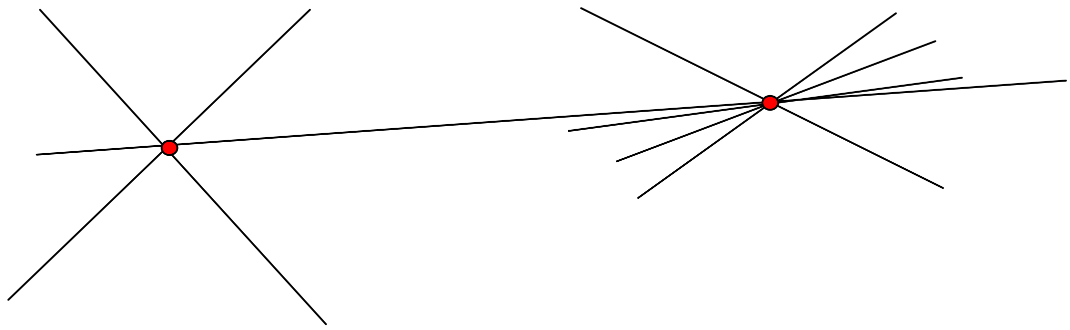


a) pas de parallèles, p droites dans le faisceau P (chacune coupant une fois les q droites du faisceau Q), q droites dans le faisceau Q (chacune coupant une fois les p droites du faisceau P).

$pq + 2$ points

pour p =2, q = 15 → 32 points
pour p =3, q = 14 → 44 points
pour p =4, q = 13 → 54 points
pour p =5, q = 12 → 62 points
pour p =6, q = 11 → 68 points
pour p =7, q = 10 → 72 points
pour p =8, q = 9 → 74 points

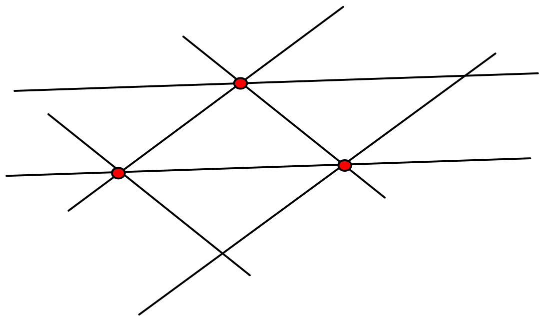
b) cas particulier : (p-1) q

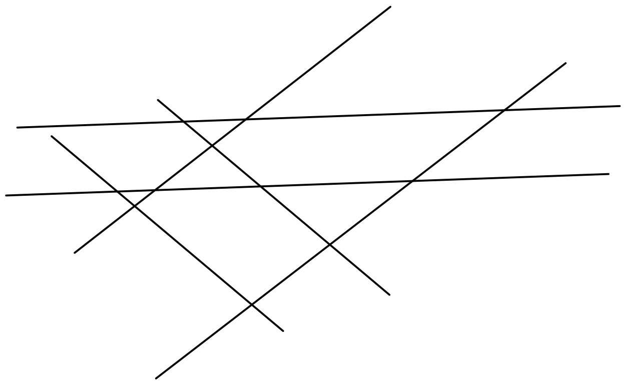


pour p =2, q = 15 → 15 points
pour p =3, q = 14 → 28 points
pour p =4, q = 13 → 39 points
pour p =5, q = 12 → 48 points
pour p =6, q = 11 → 55 points
pour p =7, q = 10 → 60 points
pour p =8, q = 9 → 63 points
pour p =9, q = 8 → 64 points

Réseau à trois directions

avec ou sans points triples :





Pour 17 droites, selon le nombre de droites et leur disposition, on peut obtenir avec ce genre de recherche systématique, par exemple : 31 ; 44 ; 55 ; 56 ; 64 ; 66 ; 70 ; 71 ; 72 ; 74 ; 75 ; 76 ; 80 ; 81 ; 82 ; 84 ; 86 ; 87 ; 88 ; 90 ; 91 ; 92 ; 94 ; 95 ; 96 ; 99 points.

Geogebra et un peu d'astuce permettent d'exhiber une construction effective exploitant les points triples et les parallèles :
http://tube.geogebra.org/student/mZuE68Dbs
cette solution montre du même coup que le problème peut se résoudre aussi avec seulement 16 droites.