Bac blanc Mathématiques
Terminale S   Spécialité Mathématiques

Karim ESSAIFI

17 avril 2004 – Durée : 4h

L'appréciation de la copie prendra en compte la clarté des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction.

1 Etude d'une fonction d'une variable réelle

Soit la fonction[1] f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+1}$.
(C) désigne la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{j})$.

1)Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) a)Montrer que la droite (Δ_1) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

b) Préciser la position de (C) par rapport à (Δ_1).

3) a) Justifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f(x) = x - 2 + \frac{4}{e^x+1}$.

b) En déduire que la droite (Δ_2) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

c) Préciser la position de (C) par rapport à (Δ_2).

[1] Cet exercice d'analyse est un classique et devra être soigneusement rédigé pour mériter la totalité des points qui lui sont prévus.

4) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

5) Tracer les droites (Δ_1) et (Δ_2), puis la courbe (C) en précisant sa tangente au point d'abscisse nulle.

6) Déterminer l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

2 Un système d'équations à deux variables

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \ln(y+6) - \ln x & = & 3\ln 2 \\ e^{5x} \cdot e^{-y} & = & e^{-6} \end{array} \right.$$

3 Calcul intégral

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 - 2x\ \ln x$ dont la courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{j})$ est noté (Γ). (unité graphique : 2 cm)
Soit (D) la droite d'équation $y = x - 1$.

1) (D) est-elle la tangente à (Γ) au point d'abscisse 1 ?

2)Soit $\alpha \in [1; +\infty[$

On se propose d'évaluer au mm^2 près l'aire de la partie A du plan délimitée par la courbe (Γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.
Utiliser une intégration par parties pour calculer $\mathbf{I}(\alpha) = \int_1^\alpha x\ \ln x\ dx$.

En déduire l'expression en fonction de α de $\mathbf{J}(\alpha) = \int_1^\alpha (x - 1 - g(x))\ dx$.

3)Donner une valeur approchée au mm^2 près de l'aire de A pour $\alpha = 5$.

4 Nombres complexes et géométrie dans le plan complexe

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 1 - i$ et $c = 1 + i$.

1) a)Placer les points A, B et C sur une figure.

b)Calculer $\frac{c-a}{b-a}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.

2) a)On appelle r la rotation de centre A telle que $r(B) = C$. Déterminer l'angle de r et calculer l'affixe d du point $D = r(C)$.

b)Soit Γ le cercle de diamètre [BC]. Déterminer et construire l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r.

3)Soit M un point de Γ d'affixe z, distinct de C, et M' d'affixe z' son image par r.

a)Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; 2\pi\right[$ tel que $z = 1 + e^{i\theta}$.

b)Exprimer z' en fonction de θ.

c)Montrer que $\frac{z'-c}{z-c}$ est un réel. En déduire que les points C, M et M' sont alignés.

d)Placer sur la figure le point M d'affixe $1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et construire son image M' par r.

(d'après BAC 2003)

5 Un système d'inéquations à une variable

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \ln(x^2+6) - \ln x & \leq & 3\ln 2 \\ e^{5x} \cdot e^{-x^2} & \geq & e^{-\sqrt[3]{216}} \end{array} \right.$$

Barème indicatif : **1)**14 pts **2)**4 pts **3)**6 pts **4)**11 pts **5)**5 pts