Fiche N°14 : Fonctions Numériques à deux variables réelles.

Introduction

Position du problème

En général, en économie, les grandeurs étudiées dépendent de plusieurs facteurs, ce qui conduit à étudier des fonctions de plusieurs variables. C'est cette réalité qui fait que nous allons étudier les fonctions numériques réelles à deux variables, soit des fonctions définies sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs réelles. De même que pour les fonctions à une variable, on définira les notions de continuité, dérivabilité et de développement limité dans le but de s'intéresser à la recherche d'éventuels extremas.

Définition 14.1 :

- On appelle fonction à deux variables, toute application $f : \begin{cases} D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto f(x,y) \end{cases}$

Exemples :

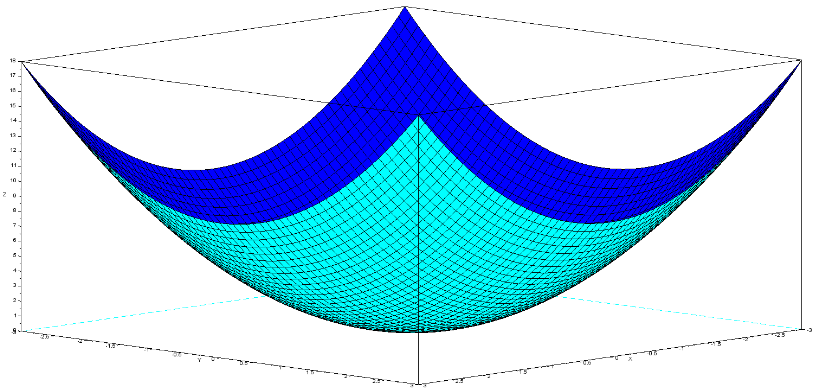
1. Fonctions coordonnées
   - $(x,y) \mapsto x$
   - $(x,y) \mapsto y$
2. Fonctions polynomiales
   - $(x,y) \mapsto -3x + 2y$
   - $(x,y) \mapsto x^2 + 3xy - y^3$
   - $(x,y) \mapsto \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{i,j} x^i y^j$
3. Autres exemples
   - $(x,y) \mapsto y\ln(y^2+1)$
   - $(x,y) \mapsto 3xe^{-x} + \ln(x)$

Représentation graphique :

Pour obtenir la représentation graphique d'une fonction à deux variables, on se place dans l'espace muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La représentation de f est alors l'ensemble des points $(x, y, f(x,y))$ lorsque $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. C'est une surface de $\mathbb{R}^2$ dont une équation est donnée par $z = f(x,y)$.

On appelle ligne de niveau k de f, où k désigne un réel, l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $k = f(x,y)$. Cet ensemble peut être éventuellement vide.

Exemple : $f(x,y) = x^2 + y^2$



Définition 14.2 : Applications partielles. Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application à deux variables

- Pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, **fixé**, l'application $f_{*,y_0}:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto f(x,y_0)\end{cases}$ est appelée première application partielle associée à f
- Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, **fixé**, l'application $f_{x_0,*}:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ y\mapsto f(x_0,y)\end{cases}$ est appelée seconde application partielle associée à f

Représentation des applications partielles pour $f(x,y)=x^2+y^2$

Si $y_0=2$ alors $f_{*,y_0}:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\end{cases}$ Si $x_0=-1$ alors $f_{x_0,*}:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ y\mapsto\end{cases}$

Notion de distance dans $\mathbb{R}^2$

Définition 14.3 : Distance dans $\mathbb{R}^2$.

- Soient $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points du plan. On appelle distance de A à B, le réel **positif** noté $d(A,B)$ défini par $d(A,B)=AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$
- On définit alors la distance entre les deux couples $a=(x_A,y_A)$ et $b=(x_B,y_B)$ par :
  $d(a,b)=d\big((x_A,y_A),(x_B,y_B)\big)=AB$

Proposition 14.1 : Soient $a=(x_A,y_A)$ et $b=(x_B,y_B)$

- $d(a,b)=d(b,a)$
- $d(a,b)=0 \Leftrightarrow \big(x_A=x_B \text{ et } y_A=y_B\big) \Leftrightarrow a=b$
- $d(a,b)\le d(a,c)+d(c,b)$ **Inégalité triangulaire**

Définition 14.3 : Notions de boules. Soit $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ et $r>0$.

- On appelle boule **ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble noté $B\big((x_0,y_0),r\big)$ tel que :
  $B\big((x_0,y_0),r\big)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, d((x,y),(x_0,y_0))<r\right\}$
- On appelle boule **fermée** de centre a et de rayon r l'ensemble noté $B\big((x_0,y_0),r\big)$ tel que :
  $\overline{B}\big((x_0,y_0),r\big)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, d((x,y),(x_0,y_0))\le r\right\}$

Continuité d'une fonction à deux variables.

La continuité d'une fonction à une variable en un point x_0 signifie que pour une précision ε donnée arbitrairement petite, toutes les valeurs de $f(x)$ sont à une distance maximale de $f(x_0)$ dés que x est suffisamment proche de x_0.
Dans $\mathbb{R}$, il n'y a que deux façons de s'approcher de x_0 , soit par la droite, soit par la gauche.
C'est là, le principal changement dans $\mathbb{R}^2$, où on peut le faire d'une infinité de manières. Pour contourner cette difficulté, suffisamment proche de (x_0, y_0) signifiera être dans la boule $B\left((x_0, y_0), r\right)$ pour r assez petit ou encore être à une distance assez petite de (x_0, y_0).

Dans toute cette partie, on ne considérera que des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$

Définition 14.4 : Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **une fonction de 2 variables et** $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

On dit que **f est continue en** (x_0, y_0) si :

- $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, d\left((x,y),(x_0,y_0)\right) < \eta \Rightarrow \left|f(x,y) - f(x_0,y_0)\right| < \varepsilon$

Ou encore

- $\lim\limits_{d((x,y),(x_0,y_0))\to 0} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

Proposition 14.2 : Fonctions « usuelles »

Continuité des fonctions coordonnées.

- $f:\begin{cases}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x\end{cases}$ et $g:\begin{cases}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto y\end{cases}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$

Continuité des fonctions polynômes.

- $f:\begin{cases}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m} a_{i,j}x^i y^j\end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 14.3 : Continuité et opérations. Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$.

- $\alpha f + \beta g$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
- fg est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- $\dfrac{1}{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ si f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$.
- $\dfrac{f}{g}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ si g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 14.4 : Continuité et composition.

Si f une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ telle que $f(\mathbb{R}^2) \subset I$ où I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $g : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur I alors $g \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$

Exercice 14.1 : Prouver que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}^2$

$f_1 : (x,y) \mapsto 3xy - 4$ $\quad f_2 : (x,y) \mapsto e^{x^2+y^2}$ $\quad f_3 : (x,y) \mapsto \dfrac{3y}{x^2+1}$

$f_4 : (x,y) \mapsto \ln(x^2+y^2+2)$ $\quad f_5 : (x,y) \mapsto \dfrac{y}{e^y+1}$ $\quad f_6 : (x,y) \mapsto \dfrac{3xy-4}{\ln(x^2+y^2+2)}$

Développement limité des fonctions à deux variables.

Dérivées partielles d'ordre 1

Définition 14.5 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **une fonction de 2 variables et** $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

- On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable en (x_0, y_0) si l'application partielle

  $f_{*,y_0} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x, y_0) \end{cases}$ est dérivable en x_0, on note alors $\partial_1(f)(x_0,y_0) = (f_{*,y_0})'(x_0)$

  $\partial_1(f)$ est ainsi la fonction **à deux variables** définie par $\partial_1(f) : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \partial_1(f)(x,y) \end{cases}$

- On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable en (x_0, y_0) si l'application partielle

  $f_{x_0,*} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y \mapsto f(x_0, y) \end{cases}$ est dérivable en y_0, on note alors $\partial_2(f)(x_0,y_0) = (f_{x_0,*})'(y_0)$

  $\partial_2(f)$ est ainsi la fonction **à deux variables** définie par $\partial_2(f) : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \partial_2(f)(x,y) \end{cases}$

Remarque :

Pour calculer $\partial_1(f)(x,y)$, on dérive f en considérant que y est une constante et que x est la variable.

Pour calculer $\partial_2(f)(x,y)$, on dérive f en considérant que y est une constante et que x est la variable.

Exercice 14.2 : **Calculer** $\partial_1(f)(x,y)$ et $\partial_2(f)(x,y)$ dans les cas suivants

$f : (x,y) \mapsto 3xy - 4$ $\quad f : (x,y) \mapsto ye^{2x^2}$ $\quad f : (x,y) \mapsto 5x^3 + 4$ $\quad f : (x,y) \mapsto \ln(x^2+y^2+2)$

Définition 14.6 : Gradient

Si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est une fonction de 2 variables admettant des dérivées partielles par rapport aux deux variables en $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, alors on appelle gradient de f en (x_0,y_0) la matrice colonne notée $\nabla(f)(x_0,y_0)$ et définie par $\nabla(f)(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}\partial_1(f)(x_0,y_0)\\ \partial_2(f)(x_0,y_0)\end{pmatrix}$

Exercice 14.3 : Calculer $\nabla(f)(1,2)$ pour $f:(x,y)\mapsto \ln(x^2+y^2+2)$.

Définition 14.7 : Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de 2 variables.

- On dit que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ si les dérivées partielles $\partial_1(f)$ et $\partial_2(f)$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$

Remarque : Les fonctions coordonnées et les fonctions polynomiales sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 14.5 : Fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et opérations.

- La somme, le produit, le quotient (quand il est défini) de deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
- Si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ avec $f(\mathbb{R}^2)\subset I$, et si $d:I\to\mathbb{R}$ est de classe C^1 sur I, alors $g\circ f$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
- Toute fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 14.6 : Développement limité d'ordre 1.

Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, alors il existe une fonction $\varepsilon:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ vérifiant $\varepsilon(0,0)=0$ et ε continue en (0,0) telle que :

- $f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\partial_1(f)(x_0,y_0)h+\partial_2(f)(x_0,y_0)k+\sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k)$
- $f(x,y)=f(x_0,y_0)+\partial_1(f)(x_0,y_0)(x-x_0)+\partial_2(f)(x_0,y_0)(y-y_0)+d\big((x,y),(x_0,y_0)\big)\varepsilon(x-x_0,y-y_0)$

Soit encore

- $f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+{}^t\big(\nabla f(x_0,y_0)\big)\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix}+\sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k)$
- $f(x,y)=f(x_0,y_0)+{}^t\big(\nabla f(x_0,y_0)\big)\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}+d\big((x,y),(x_0,y_0)\big)\varepsilon(x-x_0,y-y_0)$

Exercice 14.4 :
1. Donner le DL1 en (1,2) de $f:(x,y)\mapsto \ln(x^2+y^2+2)$
2. Donner le DL1 en (0,-2) de $f:(x,y)\mapsto -x^2-y^2$

Remarque : Graphiquement, approcher f par son développement limité d'ordre 1 en (x_0, y_0) revient à approcher la surface représentative de f par le plan tangent à celle-ci en (x_0, y_0), d'équation

$$z = f(x_0, y_0) + \partial_1(f)(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_2(f)(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Dérivées partielles d'ordre 2

Définition 14.5 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **une fonction de 2 variables et** $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

On appelle dérivées partielles d'ordre 2, lorsqu'elles existent, les fonctions :

- $\partial^2_{1,1}(f) = \partial_1(\partial_1(f))$
- $\partial^2_{1,2}(f) = \partial_1(\partial_2(f))$
- $\partial^2_{2,1}(f) = \partial_2(\partial_1(f))$
- $\partial^2_{2,2}(f) = \partial_2(\partial_2(f))$

Exercice 14.5 : Calculer $\partial^2_{1,1}(f)(x,y)$, $\partial^2_{1,2}(f)(x,y)$, $\partial^2_{2,1}(f)(x,y)$, $\partial^2_{2,2}(f)(x,y)$ dans les cas suivants

$f : (x,y) \mapsto x$ $f : (x,y) \mapsto y^3 + 2x^3y - 3xy^2 - 7$ $f : (x,y) \mapsto \ln(x^2 + y^2 + 2)$

Définition 14.7 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de 2 variables.

- On dit que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ si les fonctions $\partial^2_{1,1}(f), \partial^2_{1,2}(f), \partial^2_{2,1}(f)$ et $\partial^2_{2,2}(f)$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$

Remarque : Les fonctions coordonnées et les fonctions polynomiales sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 14.7 : Fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et opérations.

- La somme, le produit, le quotient (quand il est défini) de deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
- Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ avec $f(\mathbb{R}^2) \subset I$, et si $g : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 sur I, alors $g \circ f$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
- Toute fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 14.8 : Théorème de Schwarz.

- Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f)(x,y)$

Définition 14.6 : Matrice Hessienne.

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ et $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ tels que les dérivées partielles d'ordre 2 de f en (x_0,y_0) existent, alors on appelle matrice hessienne de f au point (x_0,y_0), la matrice de $M_2(\mathbb{R})$ notée $\nabla^2(f)(x_0,y_0)$ et définie par $\nabla^2(f)(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}\partial^2_{1,1}(f)(x_0,y_0) & \partial^2_{1,2}(f)(x_0,y_0)\\ \partial^2_{2,1}(f)(x_0,y_0) & \partial^2_{2,2}(f)(x_0,y_0)\end{pmatrix}$

Exercice 14.6 : Calculer $\nabla^2(f)(1,2)$ pour $f:(x,y)\mapsto \ln(x^2+y^2+2)$.

Proposition 14.9 :

- Si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ alors la matrice hessienne de f en (x_0,y_0) est symétrique.

Proposition 14.10 : Développement limité d'ordre 2.

Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, alors il existe une fonction $\varepsilon:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ vérifiant $\varepsilon(0,0)=0$ et ε continue en (0,0) telle que :

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\partial_1(f)(x_0,y_0)h+\partial_2(f)(x_0,y_0)k+\partial^2_{1,1}(f)(x_0,y_0)\frac{h^2}{2}+$$
$$\partial^2_{2,2}(f)(x_0,y_0)\frac{k^2}{2}+\partial^2_{1,2}(f)(x_0,y_0)\,hk+(h^2+k^2)\varepsilon(h,k)$$

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(x_0,y_0)+\partial_1(f)(x_0,y_0)(x-x_0)+\partial_2(f)(x_0,y_0)(y-y_0)\\&+\partial^2_{1,1}(f)(x_0,y_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}+\partial^2_{2,2}(f)(x_0,y_0)\frac{(y-y_0)^2}{2}+\partial^2_{1,2}(f)(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)\\&+\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)\varepsilon(x-x_0,y-y_0)\end{aligned}$$

Soit encore

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+{}^t\left(\nabla f(x_0,y_0)\right).\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+\frac{1}{2}(h\ \ k).\nabla^2 f(x_0,y_0).\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+(h^2+k^2)\varepsilon(h,k)$$

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(x_0,y_0)+{}^t\left(\nabla f(x_0,y_0)\right)\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\\&+\frac{1}{2}(x-x_0\quad y-y_0).\nabla^2 f(x_0,y_0).\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\\&+d\left((x,y),(x_0,y_0)\right)^2\varepsilon(x-x_0,y-y_0)\end{aligned}$$

Exercice 14.7 :
1. Donner le DL2 en (1,2) de $f:(x,y)\mapsto \ln(x^2+y^2+2)$
2. Donner le DL2 en (0,-2) de $f:(x,y)\mapsto -x^2-y^2$

Remarque : Graphiquement, approcher f par son développement limité d'ordre 2 en (x_0, y_0) revient à approcher la surface représentative de f par un bol, un bol retourné ou une selle de cheval, appuyés dans tous les cas sur le plan tangent.

Extrema d'une fonction à deux variables

Dans les parties précédentes, toutes les résultats étaient énoncés pour des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$.
Dans la suite, on va aussi considérer des fonctions définies seulement sur un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 14.8 : Déterminer et représenter l'ensemble des couples de $\mathbb{R}^2$ sur lequel la fonction f est définie.

$f(x,y)=\ln(xy)$ $\quad$ $f(x,y)=\ln(x)+\ln(y)$ $\quad$ $f(x,y)=\ln(1-x^2-y^2)$

Toutefois, il est nécessaire d'imposer aux ensembles de définitions des fonctions à deux variables quelques propriétés analogues à celles imposées aux intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition 14.7 : Ensemble ouvert, fermé, borné.

- On appelle ouvert de $\mathbb{R}^2$, tout ensemble $\mathcal{O}$ tel que pour tout point $(x,y)\in\mathcal{O}$, il existe une boule ouverte de centre (x,y) incluse dans $\mathcal{O}$. Ceci revient à dire qu'aucun point de la frontière de $\mathcal{O}$ n'appartient à $\mathcal{O}$.

  $$\forall(x,y)\in\mathcal{O},\exists r>0, B((x,y),r)\subset\mathcal{O}$$

- On appelle fermé de $\mathbb{R}^2$, tout ensemble $\mathcal{F}$ tel que son complémentaire soit ouvert. Ceci revient à dire que tous les points de la frontière de $\mathcal{F}$ appartiennent à $\mathcal{F}$.

- On dit qu'un ensemble $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2$ est borné lorsqu'il est inclus dans une boule (ouverte ou fermée)

  $$\exists r>0,\exists(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2,\mathcal{U}\subset B((x_0,y_0),r)$$

Exemples :

- $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\varnothing$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$
- $\mathbb{R}^2$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et $\varnothing$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$
- Une boule ouverte est un ouvert de $\mathbb{R}^2$
- Une boule fermée est un fermé de $\mathbb{R}^2$
- $]a,b[\times]c,d[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$
- $[a,b]\times[c,d]$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$
- $]0;+\infty[\times[-1;1]$ **n'est ni ouvert, ni fermé, ni borné.**
- $\{(x_0,y_0)\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$
- $B((x_0,y_0),r)$ et $\overline{B}((x_0,y_0),r)$ sont des parties bornées de $\mathbb{R}^2$
- $\mathcal{G}=\{(x,1),x\in\mathbb{R}\}$ n'est pas borné
- $[0,1]\times[0,2]$ est borné

Proposition 14.11 : Extension des propositions aux fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^2$

Toutes les propositions (continuité, C^1, C^2) vues pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ s'étendent aux fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^2$.

Définition 14.8 : Maximum global, minimum global.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

- On dit que f admet un **maximum global** en (x_0, y_0) lorsque $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ pour tout $(x, y) \in \mathcal{O}$.
- On dit que f admet un **minimum global** en (x_0, y_0) lorsque $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ pour tout $(x, y) \in \mathcal{O}$.

Exercice 14.8 : Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$. f admet-elle un minimum global ? un maximum global ?

Définition 14.9 : Maximum local, minimum local.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

- On dit que f admet un **maximum local** en (x_0, y_0) lorsqu'il existe une boule ouverte $B((x_0, y_0), r)$ telle que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ pour tout $(x, y) \in \mathcal{O} \cap B((x_0, y_0), r)$.
- On dit que f admet un **minimum local** en (x_0, y_0) lorsqu'il existe une boule ouverte $B((x_0, y_0), r)$ telle que $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ pour tout $(x, y) \in \mathcal{O} \cap B((x_0, y_0), r)$.

Remarques :

- Un minimum (resp maximum) global est toujours un minimum (resp maximum) local. **Réciproque fausse !!**
- Une fonction n'a pas forcément de maximum ou de minimum local ou global.
- Il n'y a pas unicité de la notion de maximum(minimum) local ou global.

Proposition 14.12 : Théorème d'existence d'un extrema

Soit $\mathcal{G}$ une partie **fermée et bornée** de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables continue sur $\mathcal{G}$ alors f est bornée sur $\mathcal{G}$ et atteint ses bornes sur $\mathcal{G}$.

Définition 14.10 : Point(s) critique(s)

Soit $\mathcal{O}$ un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de **classe** C^1 sur $\mathcal{O}$.

On appelle **point(s) critique(s)** de f les solutions du système $\nabla f(x, y) = 0$ soit celles de $\begin{cases} \partial_1(f)(x, y) = 0 \\ \partial_2(f)(x, y) = 0 \end{cases}$

Proposition 14.13 : Point critique et extremum local. Condition nécessaire.

Soit $\mathcal{O}$ un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$ et $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ une fonction de deux variables de **<u>classe</u>** C^1 sur $\mathcal{O}$.

- Si f admet un extremum local au point $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ alors $\nabla f(x_0,y_0)=0$

Remarques :

- Ne jamais oublier la nature ouverte de l'ensemble utilisé par ce théorème.
- En général, le système à résoudre n'est pas linéaire….
- La condition énoncée n'est pas suffisante. Attention à la réciproque….
- Tout extremum local est un point critique mais la réciproque est fausse
- Graphiquement, en un extremum local, le plan tangent est horizontal

Exercice 14.9 : On considère la fonction f définie sur l'ouvert $\mathcal{O}=\left]0,+\infty\right[\times\mathbb{R}$ par $f(x,y)=x\left(\ln^2(x)+y^2\right)$

1. Représenter $\mathcal{O}=\left]0,+\infty\right[\times\mathbb{R}$
2. Déterminer les éventuels extrema de f.

Proposition 14.14 : Condition suffisante d'extremum local et caractérisation des points critiques

Soit $\mathcal{O}$ un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$ et $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ une fonction de deux variables de **<u>classe</u>** C^2 sur $\mathcal{O}$. On suppose que $(x_0,y_0)\in\mathcal{O}$ est un point critique de f et on note $\nabla^2(f)(x_0,y_0)$ la matrice hessienne de f en (x_0,y_0), alors :

- Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0,y_0)$ sont strictement positives alors f admet en (x_0,y_0) un minimum local.
- Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0,y_0)$ sont strictement négatives alors f admet en (x_0,y_0) est un maximum local.
- Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0,y_0)$ sont de signes opposés alors f admet ni un minimum local, ni maximum local en en (x_0,y_0). On dit que f présente un **point selle** en (x_0,y_0).
- Si l'une des valeurs propres est nul, on ne peut pas conclure….

Exercice 14.10 : Déterminer les extrema locaux de la fonction de l'exercice 14.9

Exercice 14.11 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=xy(x+y-1)$

1. Déterminer les éventuels points critiques de f.
2. Caractériser les points critiques et vérifier que f admet un minimum local
3. Le minimum local obtenu est-il global ?