Fiche N°1 : Espaces vectoriels

Espaces vectoriels

Le but de ce chapitre est de donner un cadre commun et rigoureux à des « habitudes » que vous utilisez déjà de façon naturelle. Par exemple, vous notez avec le même symbole '+' aussi bien une somme de deux fonctions, de deux matrices, de deux suites alors même que les éléments des différentes sommes ne font pas partie du même ensemble. La même « habitude » relie par exemple la multiplication d'une fonction, d'une suite, d'une matrice par un réel.

Définition 1.1 : Loi de composition interne : Soit E un ensemble non vide.

- On dit que la loi + est une **loi de composition interne** sur E lorsque $\vec{x}+\vec{y}\in E$ pour tout $(\vec{x},\vec{y})\in E^2$
  C'est donc une application de ………… dans ……….
- On dit que la loi **.** est une **loi de composition externe** sur E lorsque $\lambda.\vec{x}\in E$ pour tout $(\lambda,\vec{x})\in\mathbb{R}\times E$
  C'est donc une application de ………… dans ……….

Exemples de loi de composition interne :

- l'addition des matrices est une loi de composition interne sur ………….
- L'addition (la multiplication) de deux réels est une loi de composition interne sur …………
- L'addition de deux ……………….. est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}[X]$
  $\mathbb{R}[X]$:
- L'addition de deux ………………………………………..est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}_n[X]$
  $\mathbb{R}_n[X]$:
- L'addition de deux ……………….. est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:
- L'addition de deux ……………….. est une loi de composition interne sur $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ où $D\subset\mathbb{R}$
  $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$:
- …………………..est une loi de composition interne sur $\mathcal{P}(\Omega)$ pour $\Omega=[\![0;1]\!]$
- L'application $\begin{cases}\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\\(a_1,a_2,......,a_n)+(b_1,b_2,......,b_n)\mapsto(a_1+b_1,a_2+b_2,......,a_n+b_n)\end{cases}$ est une lci sur ….

Question : La multiplication de deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ est-elle une lci sur $M_{n,p}(\mathbb{R})$?

Exemples de loi de composition externe :

- La multiplication d'une matrice par un réel est une loi de composition externe sur $M_{n,p}(\mathbb{R})$
- L'application $\begin{cases}\mathbb{R}\times\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}[X]\\(a,P)\mapsto a.P\end{cases}$ est une lce.
- La multiplication d'une suite par un réel est une lce sur ……….
- La multiplication d'un n-uplet par un réel est ……………………..
- La multiplication d'un réel par un réel est une ………………………
- L'application $\begin{cases}\mathbb{R}\times\mathcal{A}(D,\mathbb{R})\to\mathcal{A}(D,\mathbb{R})\\(a,f)\mapsto a.f\end{cases}$ est une …………

Définition 1.2 : On appelle **espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$, tout ensemble E non vide, muni d'une loi de composition interne notée + et d'une loi de composition externe notée **.** vérifiant les propriétés suivantes :

- $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2,\ \vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$. On dit que + est **commutative.**
- $\forall(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \in E^3,\ (\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$ On dit que + est **associative.**
- Il existe un élément de E noté $\vec{0}_E$ tel que : $\forall \vec{x} \in E,\ \vec{0}_E+\vec{x}=\vec{x}+\vec{0}_E=\vec{x}$.

  $\vec{0}_E$ est appelé **élément neutre** de E pour la loi +, il est unique. Il est aussi appelé **le vecteur nul**.

Par commodité, on le notera rapidement 0 mais on se souviendra que ce n'est pas le réel 0 mais le vecteur nul.

- Pour tout $\vec{x}$ de E, il existe un élément $\vec{y}$ de E qui vérifie : $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}=\vec{0}_E$

  $\vec{y}$ est unique et est appelé **opposé** de $\vec{x}$, il est noté $-\vec{x}$.
- $\forall \vec{x} \in E,\ 1.\vec{x}=\vec{x}$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2,\ \lambda.(\vec{x}+\vec{y})=\lambda.\vec{x}+\lambda.\vec{y}$ **Distributivité de**
- $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall \vec{x} \in E,\ (\lambda+\mu).\vec{x}=\lambda.\vec{x}+\mu.\vec{x}$ **Distributivité de**
- $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall \vec{x} \in E,\ \lambda.(\mu.\vec{x})=(\lambda\times\mu).\vec{x}$

Très souvent, la loi . sera omise ainsi que la « flèche » et on notera alors λx

Les éléments d'un espace vectoriel E sont appelés des **vecteurs**, et ceux de $\mathbb{R}$ sont alors appelés des **scalaires.**

On dit que (E,+, .) est un espace vectoriel réel (ou $\mathbb{R}-$espace vectoriel). On omettra souvent + et .

On remarquera qu'un espace vectoriel est stable par somme de n vecteurs et plus généralement par …………………

Exercice 1.1 : Règles de calculs dans un $\mathbb{R}-$espace vectoriel

1. Montrer que : $0.\vec{x}=\vec{0}_E$ pour tout $\vec{x} \in E$.
2. Montrer que : $\lambda.\vec{u}=\vec{0}_E \Rightarrow \left(\lambda=0 \text{ ou } \vec{u}=\vec{0}_E\right)$

Définition 1.3 : Notion de combinaison linéaire.

- Soit $\vec{x}$ un vecteur de E

  On appelle **vecteur colinéaire** à $\vec{x}$ tout vecteur $\vec{y}$ qui peut s'écrire $\vec{y}=\lambda.\vec{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

  Remarque : $\vec{0}_E$ ….
- Soit $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de E

  On appelle **combinaison linéaire** de $\vec{x}$ et $\vec{y}$ tout vecteur $\vec{z}$ qui peut s'écrire $\vec{z}=\lambda.\vec{x}+\mu.\vec{y}$ avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

- Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, \vec{u}_p)$ une famille de p vecteurs de E avec $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $Card(\mathcal{F}) = p$

  On appelle combinaison linéaire de la famille $\mathcal{F}$ tout vecteur $\vec{v}$ qui peut s'écrire sous la forme : $\vec{v} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i . \vec{x}_i$

  où $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$

  Les réels λ_i sont appelés les……………………………de la ………………………

Propriété fondamentale 1.1 : Tout espace vectoriel est **stable** par combinaison linéaire.

Si un vecteur …. est …………………………………………………… de vecteurs appartenant à E alors ….. est dans E.

Preuve : Par récurrence sur le nombre de vecteurs de la famille.

Exercice 1.2 : 1. Justifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. On précisera l'espace vectoriel associé.

a) $\vec{u} = (-3:6)$ $\vec{v} = (1;-2)$

b) $\vec{u} = 12X^2 + 6X - 3$ $\vec{v} = 4X^2 + 3X - 1$

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\vec{u} = J$ $\vec{v} = J^2$ *où* $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\vec{u} = f : x \mapsto \ln(x)$ $\vec{v} = g : x \mapsto \ln(\sqrt{x})$

f) $\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *avec* $u_n = 4n^2$ $\vec{v} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *avec* $v_n = n^2$

2. Déterminer dans les cas suivants si $\vec{x}_i$ est combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \qquad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} ; \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} ; \vec{x}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix} ; \vec{x}_6 = \begin{pmatrix} \pi + \sqrt{2} \\ 3\pi - \sqrt{2} \\ -\pi + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Propriété 1.2 : Espace vectoriel fondamentaux : ***A connaître sur le bout des doigts !!!!***

- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ensemble des n-uplets de réels.
- $(M_{n,1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$
- $(M_{n,p}(\mathbb{R}), +, \cdot)$
- $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$
- $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$
- $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$

Exercice 1.3 : Justifier que les ensembles suivants ne sont pas des $\mathbb{R}$.e.v (addition « habituelle » et . par un réel)

1. L'ensemble $GL_2(\mathbb{R})$ des matrices inversibles de $M_2(\mathbb{R})$
2. L'ensemble des polynômes de degré n.
3. $\mathbb{R}^-$

Sous espace vectoriel

Définition : On appelle **sous espace vectoriel** d'un espace vectoriel (E,+, .), tout sous ensemble F de E tel que :

1. F est non vide.
2. (F,+, .) est un $\mathbb{R}$.e.v

Ceci signifie que F muni des mêmes lois que E est aussi un espace vectoriel réel

$\forall(\vec{x},\vec{y})\in F^2,\ \vec{x}+\vec{y}\in F$ F est dit **stable** pour ***l'addition*** (loi de composition interne)

$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall\vec{x}\in F,\ \lambda.\vec{x}\in F$ F est dit **stable** pour *la multiplication par un scalaire* (loi de composition externe)

: **Si F est un s.e.v de E alors on a toujours** $\vec{0}_E\in F$ **(A prouver) Enoncer la contraposée. Utilité ?**

Espaces vectoriels triviaux E et $\{\vec{0}_E\}$ sont toujours des sous espaces vectoriels de E.

Proposition 1.3 : **: Méthode pour montrer qu'un ensemble est un s.e.v d'un R.e.v .**

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- F est un sous espace vectoriel de E
- $\begin{cases} F\subseteq E \\ F\neq\varnothing \\ \forall(\vec{x},\vec{y})\in F^2, \vec{x}+\vec{y}\in F & \text{stabilité pour la somme} \\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall\vec{x}\in F,\ \lambda.\vec{x}\in F & \text{stabilité pour la multiplication par un scalaire} \end{cases}$
- $\begin{cases} F\subseteq E \\ F\neq\varnothing \\ \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \forall(\vec{x},\vec{y})\in F^2,\ \lambda.\vec{x}+\mu.\vec{y}\in F & \textbf{stabilité par combinaison linéaire} \end{cases}$
- $\begin{cases} F\subseteq E \\ F\neq\varnothing \\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall(\vec{x},\vec{y})\in F^2,\ \lambda.\vec{x}+\vec{y}\in F \end{cases}$

Sous espaces vectoriels engendrés

Définition et proposition 1.4 : Soit $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,..............,\vec{u}_p)$, une **famille** de p vecteurs de E.

L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,..............,\vec{u}_p)$ est ***un sous espace vectoriel*** de E appelé **sous espace vectoriel engendré** par la famille $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,..............,\vec{u}_p)$.

Il est noté **Vect** $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,..............,\vec{u}_p)$

Ainsi $\text{Vect}(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,..............,\vec{u}_p)=\left\{\lambda_1\vec{u}_1+\lambda_2\vec{u}_2+............\lambda_p\vec{u}_p\,/\,(\lambda_1,\lambda_2,.......,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p\right\}$

Et on a : $\vec{x}\in\text{Vect}(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,..............,\vec{u}_p)\Leftrightarrow\left(\exists(\lambda_1,\lambda_2,.......,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p\,/\,\vec{x}=\lambda_1\vec{u}_1+\lambda_2\vec{u}_2+............+\lambda_p\vec{u}_p\right)$

Cette décomposition n'est pas forcément unique.

Exercice 1.4 : Déterminer les ensembles : $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ puis $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$

: **Pour montrer qu'un ensemble A est un R.e.v, on peut montrer que A peut s'écrire sous la forme** $\text{Vect}(\vec{u}_1,\vec{u}_2,....,\vec{u}_p)$

Exercice 1.5 : Appliquer le point méthode précédent pour répondre aux questions 1 à 4.

1. On considère l'ensemble D tel que $D=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in M_{2,1}(\mathbb{R})\,/\,a=b\right\}$. Montrer que D est un **s.e.v** de $M_{2,1}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $G=\left\{\begin{pmatrix}x+y\\y\\x\end{pmatrix}\in M_{3,1}(\mathbb{R})\right\}$ est un **s.e.v** de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $H=\left\{\begin{pmatrix}u-v\\u+v+3w\\v-w\\-u-3w\end{pmatrix}\in M_{4,1}(\mathbb{R})\right\}$ est un **s.e.v** de $M_{4,1}(\mathbb{R})$.
4. On considère l'ensemble P tel que $P=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in M_{3,1}(\mathbb{R})\,/\,x+y+z=0\right\}$. Montrer que P est un **s.e.v** de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.
5. On considère l'ensemble Q tel que $Q=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in M_{4,1}(\mathbb{R})\,/\,x+2y-3z+t=5\right\}$. Q est-il un est un **s.e.v** de $M_{4,1}(\mathbb{R})$?

Famille de vecteurs **Le but de cette partie est de définir correctement la notion de base** $B=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,..............,\vec{e}_n)$ **d'un espace vectoriel E, il s'agit de préciser les conditions pour qu'un vecteur** $\vec{u}$ **de E puisse se décomposer de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de la famille B.**

Famille génératrice

Définition 1.5 : Soit **E** un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et **F** un sous espace vectoriel de **E.**

On dit que la famille $\mathcal{F}=(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,..............,\vec{u}_p)$ est une ***famille génératrice*** de **F** si **F=Vect** $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,..............,\vec{u}_p)$

Autrement dit, tout vecteur de **F** peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,..............$ et $\vec{u}_p$

$\forall\vec{x}\in F,\ \exists(\lambda_1,\lambda_2,.......,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p\ /\ \vec{x}=\lambda_1\vec{u}_1+\lambda_2\vec{u}_2+............+\lambda_p\vec{u}_p$

Remarque Avec une ***famille génératrice***, rien n'assure l'unicité de la décomposition de $\vec{x}$ (l'unicité des réels $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ n'est pas assurée). Il peut donc exister plusieurs écritures pour un même vecteur comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, ..., \vec{u}_p)$

Exemple : $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et la famille de vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

Exercice 1.6 : 1. Vérifier que la famille $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ est aussi une famille génératrice de P (ex 1.5). Conclusion ?

2. Montrer que la famille $((1;0),(0;1),(1;1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

: **Pour montrer que** $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_p)$ **est génératrice d'un espace vectoriel E, on montre que :** $E = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_p)$.

Proposition 1.5 : Opérations sur les familles génératrices :

Les opérations suivantes transforment une famille génératrice en une nouvelle famille génératrice.

- **Echanger l'ordre** des vecteurs de la famille.
- **Supprimer le vecteur nul** si la famille le contient.
- **Eliminer toutes les répétitions** d'un même vecteur. (On ne laisse que des vecteurs d'occurrence 1)
- **Multiplier** un vecteur par un scalaire non nul.
- **Supprimer ou Ajouter** un vecteur qui est combinaison linéaire d'autres vecteurs de la famille.

Exercice 1.7 : Justifier qu'il existe deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que :

$$\mathrm{Vect}(\vec{u};\vec{v}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\6\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$$

Famille libre

Définition 1.6 : Soit **E** un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

On dit que la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, ..., \vec{u}_p)$ est une ***famille libre*** de **E** (***ou linéairement indépendante***) si :

$$\forall(\lambda_2, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \left(\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + ... + \lambda_p\vec{u}_p = \vec{0}_E\right) \Rightarrow \left(\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_p = 0\right)$$

Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**. (On dit aussi ***linéairement dépendante***)

Proposition 1.6 : Familles liées de cardinal supérieur ou égal à deux.

Une famille est dite liée si et seulement si l'un de ses vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire des autres.

Conséquence : Une famille est dite libre si aucun vecteur de la famille n'est combinaison d'autres vecteurs de la famille.

Proposition 1.7 : Familles liées (libres) <u>à un ou deux vecteurs</u>.

- $(\vec{u})$ est liée $\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}_E$.
- $(\vec{u})$ est libre $\Leftrightarrow$ ....
- $(\vec{u},\vec{v})$ est liée $\Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- $(\vec{u},\vec{v})$ est libre $\Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ ……………………..

Attention, il ne faut jamais dire qu'une famille de <u>trois vecteurs</u> est libre car ses vecteurs sont non colinéaires.

Pour vérifier qu'une famille contenant au moins trois vecteurs est libre, on résout l'équation $\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + ... + \lambda_p\vec{u}_p = \vec{0}_E$ dans $\mathbb{R}^p$. Il s'agit donc de résoudre un système linéaire.

Exercice 1.8 : Montrer que la famille $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ est libre.

Proposition 1.8 : Opérations sur les familles libres.

- Si le vecteur nul de E appartient à la famille alors la famille est liée.
- Une famille composée d'un seul vecteur non nul est toujours libre.
- Si une famille contient un vecteur d'occurrence strictement supérieur à 1 alors cette famille est liée.
- Si un vecteur de la famille peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres alors cette famille est liée.

Les opérations suivantes transforment une famille libre en une nouvelle famille libre.

- **Echanger l'ordre** des vecteurs de la famille.
- **Eliminer un vecteur** de la famille. (**Toute sous famille d'une famille libre est encore libre)**
- **Multiplier** un vecteur de la famille <u>par un scalaire non nul</u>.
- **Ajouter** à la famille un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.

Comment reconnaître rapidement une famille liée….donc affirmer qu'elle n'est pas libre.

- **Si le vecteur nul de E appartient à la famille alors la famille est liée.**
- **Si une famille contient un vecteur d'occurrence strictement supérieur à 1 alors cette famille est liée.**
- **Si un vecteur de la famille peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres alors cette famille est liée.**

Exercice 1.9 : Montrer que les familles $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-4\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$ sont des familles liées.

Proposition 1.9 : Polynômes à degrés échelonnés. (Hors programme)

Soit $(P_0, P_1, ...P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\underbrace{0 \leq \deg(P_0) < \deg(P_1) < .... < \deg(P_n)}_{*}$

Alors cette famille est **LIBRE.** Toute famille de polynômes vérifiant * est dite à degrés échelonnés.

Cette propriété n'est pas au programme mais elle permet parfois de connaître à l'avance une éventuelle liberté.

On devra toutefois prouvé cette liberté par la méthode « classique ».

Proposition 1.10 : Caractérisation des familles libres

La famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, ..., \vec{u}_p)$ est une ***famille libre*** de **E** si et seulement si tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, ..., \vec{u}_p)$ se décompose de manière unique sous la forme $\vec{x} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + ... + \lambda_p\vec{u}_p$

Base et coordonnées

Définition 1.6 :

On dit que la famille $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, ..., \vec{e}_n)$ est une ***BASE*** de **E** si c'est une famille **libre** et **génératrice** de **E.**

Exercice 1.10 : Montrer que si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, ..., \vec{e}_n)$ est une famille libre et génératrice de E alors tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire unique des vecteurs de cette famille.

Proposition 1.11 : Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, ..., \vec{e}_n)$ une ***base*** de **E.**

Tout vecteur $\vec{u}$ de **E** se décompose comme **combinaison linéaire** de $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, ..., \vec{e}_n)$ et cette décomposition est **UNIQUE.**

: **Comment trouver une base d'un e.v E ?**

- **On montre que** $E = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, ..., \vec{e}_n)$
- **On regarde si une des vecteurs est combinaison linéaire des autres et si c'est le cas on l'élimine de la famille et on recommence ce processus jusqu'à obtenir une famille génératrice « minimale ».**
- **On prouve que la famille obtenue est libre.**

Définition 1.7 : Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, ..., \vec{e}_n)$ une ***BASE*** de **E.**

$$\forall \vec{x} \in E,\ \exists!(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \ /\ \vec{x} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + ... + \lambda_p\vec{u}_p$$

Le p-uplet $\underbrace{(\lambda_2, \lambda_2, ..., \lambda_p)}_{\in \mathbb{R}^p}$ est appelé coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, ..., \vec{e}_n)$.

Définition 1.8 : ECE 1 Base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$

On considère dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, ..., \vec{e}_n)$ définie par : $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $\vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si $\vec{V}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, il est évident que $\vec{V}$ se décompose de **manière unique** sous la forme $\vec{V}=v_1\vec{e}_1+v_2\vec{e}_2+.......+v_n\vec{e}_n$.

La famille $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,..............,\vec{e}_n)$ ainsi définie s'appelle **la BASE CANONIQUE** de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 1.11 : Pour $n\in[\![1;4]\!]$ donner la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Propriété 1.12 : Base canonique et dimension des espaces vectoriels fondamentaux

- $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ a pour base canonique la famille $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,..............,\vec{e}_n)$ avec $\vec{e}_i=$ ....
  dim($\mathbb{R}^n$)=……..

- $(M_{n,p}(\mathbb{R}),+,\cdot)$ a pour base canonique la famille $(\vec{e}_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ avec $\vec{e}_{i,j}=\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

  dim($M_{n,p}(\mathbb{R})$)=…….. dim($M_n(\mathbb{R})$)=……..

- $(\mathbb{R}_n[X],+,\cdot)$ a pour base la famille $(1,X,X^2,................,X^n)$ 💣☠💣 dim($\mathbb{R}_n[X]$)=……..

Dimension d'un espace vectoriel

Définition 1.9 : Un espace vectoriel E est dit de **dimension finie** s'il admet une base constituée d'un nombre fini de vecteurs non nuls.

Définition et Proposition 1.11 : Théorème fondamental (ADMIS)

Si l'espace vectoriel **E** admet une base finie $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,..............,\vec{e}_n)$ alors toutes les bases ont le même nombre **n** de vecteurs.

Ce nombre commun à toutes les bases est appelée **la dimension de E** et est noté **dim(E)**.

Un espace vectoriel de dimension **1** **(resp 2)** est appelé **droite vectorielle** **(resp plan vectoriel).**

Remarques **Par convention** $\dim\left(\left\{\vec{0}_E\right\}\right)=0$

Proposition 1.13 : Famille de vecteurs et cardinalité. (ADMIS)

Soit **E** un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de **dimension n** et $\mathcal{F}=(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\ldots\ldots\ldots\ldots,\vec{u}_p)$ une famille de **p** **vecteurs** de E.

- Si $p>n$ alors $\mathcal{F}=(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\ldots\ldots\ldots\ldots,\vec{u}_p)$ n'est pas libre.
- Si $p<n$ alors $\mathcal{F}=(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\ldots\ldots\ldots\ldots,\vec{u}_p)$ n'est pas génératrice.
- Si $p=n$ alors [$\mathcal{F}$ libre $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ génératrice $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ base]

On peut reformuler les différentes propositions sous la forme :

- Toute famille libre d'un espace vectoriel E de dimension n a **au maximum** n éléments.
- Toute famille génératrice d'un espace vectoriel E de dimension n a **au minimum** n éléments.
- Une famille libre à **n éléments** d'un espace vectoriel E de **dimension n** est une base de E.
- Une famille génératrice à **n éléments** d'un espace vectoriel E de **dimension n** est une base de E.

: **Dans les espaces fondamentaux dont on connait la dimension, on montre souvent qu'une famille est une base en prouvant qu'elle est libre et qu'elle possède le « bon » nombre de vecteurs.**

Exercice 1. 12 : Montrer que la famille $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\-5\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

Remarques Les espaces fondamentaux $\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ n'ont pas de base finie, on dit qu'ils sont de dimension infinie.

$\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ désigne ………………………………………………………… C'est un s.e.v de ………………..

Exercice 1. 13 : On considère la matrice A telle que $A=\begin{pmatrix}3&-2&1&-2\\6&-1&-1&-1\\-3&-4&5&-4\\6&-7&5&-7\end{pmatrix}$ et le système (S) : $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

1. Montrer que l'ensemble **F** des solutions du système (S) est un sous-espace vectoriel de $M_{4,1}(\mathbb{R})$.
2. En donner une base et préciser sa dimension.
3. Vérifier que $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\2\end{pmatrix}\in F$ puis déterminer dans la base obtenue en Q2. les coordonnées du vecteur $\vec{u}$.

Proposition 1.14 : Dimension d'un sous espace vectoriel

Soit **E** un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de **dimension n** et **F** un sous espace vectoriel de **E.**

- $\dim(F)\leq n$ (Ceci signifie donc que F est de dimension finie)
- $\dim(F)=n \Leftrightarrow F=E$

🔒 🔑 🔓 : **Pour montrer que deux espaces vectoriels sont égaux, on montre soit :**

- **Que l'un est inclus dans l'autre et qu'il possède la même dimension.**
- **La double inclusion (on utilise rarement cette méthode car en général, l'une des inclusions est compliquée à établir)**

Rang d'une famille de vecteurs – d'une matrice

Définition 1.11 : Soit F un sous espace vectoriel de E et $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, \vec{u}_p)$ une famille de p vecteurs de **F**

On appelle **rang** de la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, \vec{u}_p)$ la dimension de $\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, \vec{u}_p)$.

$$\text{rg}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, \vec{u}_p) = \dim\left(\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, \vec{u}_p)\right)$$

🔒 🔑 🔓 : **Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, on élimine de la famille tout vecteur combinaison linéaire d'autres jusqu'à obtenir une famille libre. Le rang est alors donné par le nombre d'éléments de la famille libre obtenue.**

Exercice 1.14 : Déterminer le rang de la famille $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ puis vérifier avec scilab.

Proposition 1.16 : propriétés du rang.

Soit **E** un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de **dimension finie** et $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de E.

- $rg(\mathcal{F}) \leq \dim(E)$
- $rg(\mathcal{F}) \leq \text{Card}(\mathcal{F})$
- $rg(\mathcal{F}) = \dim(E) \Leftrightarrow \mathcal{F}$ est une famille **génératrice** de E.
- $rg(\mathcal{F}) = \text{Card}(\mathcal{F}) \Leftrightarrow \mathcal{F}$ est une famille **libre** de E.

Définition 1.11 : Rang d'une matrice

Le **rang** d'une matrice A, noté $rg(A)$ est le rang de ses vecteurs colonnes.

Sous scilab, on peut déterminer le rang d'une famille de vecteurs à l'aide de la fonction **rank**

Proposition 1.17 : Rang et transposition.

- $rg(A) = rg({}^tA)$

Ceci signifie que le rang d'une matrice est aussi le rang de ses vecteurs lignes

Proposition 1.18 : Rang et inversibilité.

- $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible si et seulement si $rg(A) = n$.

Exercice 1.15 : Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible en déterminant son rang.