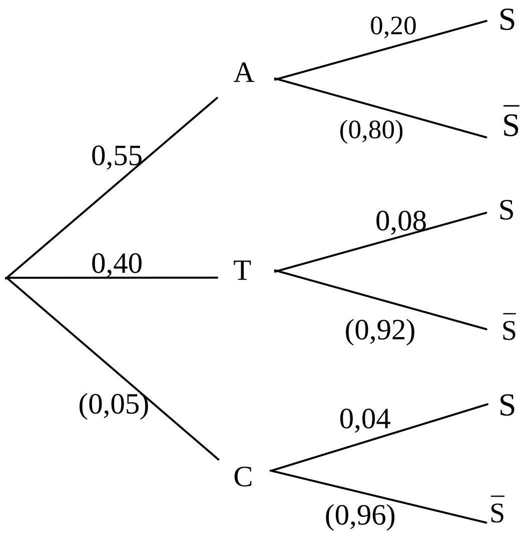
TES/Spé TL **Eléments de correction du D.S n°2 du Vendredi 26 0ctobre 2012** **1h15min**
sans document, avec calculatrice

<u>Exercice 1 :</u>(15 points)

À l'occasion d'un festival culturel, une agence de voyages propose trois types de transport pour permettre à chaque client de se rendre dans la ville organisatrice afin d'assister à la cérémonie d'ouverture.
Les trois moyens de transport proposés sont l'avion, le train ou le car.
À chacun des clients qui achètent un billet de transport, l'agence propose de souscrire une assurance multirisque qui permet, sous certaines conditions, une indemnisation en cas de retard ou de vol de bagages.
Une enquête montre que 55 % des clients choisissent l'avion, que 40 % choisissent le train et que les autres choisissent le car.
De plus, parmi les clients ayant choisi l'avion, 20 % ont souscrit l'assurance multirisque ; ils sont 8 % à choisir cette assurance parmi ceux qui ont choisi le voyage en train et seulement 4 % parmi ceux qui ont choisi le car.
On prend au hasard le dossier d'un client qui se rendra à la cérémonie d'ouverture du festival, chaque dossier ayant la même probabilité d'être choisi.
On note :

- A l'évènement : « Le client a acheté un billet d'avion » ;
- T l'évènement : « Le client a acheté un billet de train » ;
- C l'évènement : « Le client a acheté un billet de car » ;
- S l'évènement : « Le client a souscrit une assurance multirisque » et $\overline{S}$ son évènement contraire.

1. <u>Construire un arbre pondéré décrivant la situation</u>.



2. <u>Calculer la probabilité que le dossier choisi soit celui d'un client qui voyagera en train et qui a souscrit une assurance multirisque. On donnera la valeur exacte de cette probabilité.</u>

$p(T\cap S) = p(T) \times p_T(S) = 0,40\times 0,08$ **$p(T\cap S) = 0,032$**

La probabilité que le dossier choisi soit celui d'un client qui voyagera en train et qui a souscrit une assurance multirisque est égale à 0,032

3. <u>Montrer que la probabilité de l'évènement S est égale à 0,144.</u>

A, T et C forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :
$p(S) = p(S\cap A) + p(S\cap T) + p(S\cap C)$
$p(S) = p(A) \times p_A(S) + 0,032 + p(C) \times p_C(S)$
$p(S) = 0,55 \times 0,20 + 0,032 + 0,05 \times 0,04$
$p(S) = 0,110 + 0,032 + 0,0020$ **$p(S) = 0,144$**

4. On prend un dossier au hasard parmi les clients n'ayant pas souscrit une assurance multirisque.
Calculer la probabilité que ce dossier soit celui d'un client voyageant en train.
Le résultat sera donné arrondi au millième.

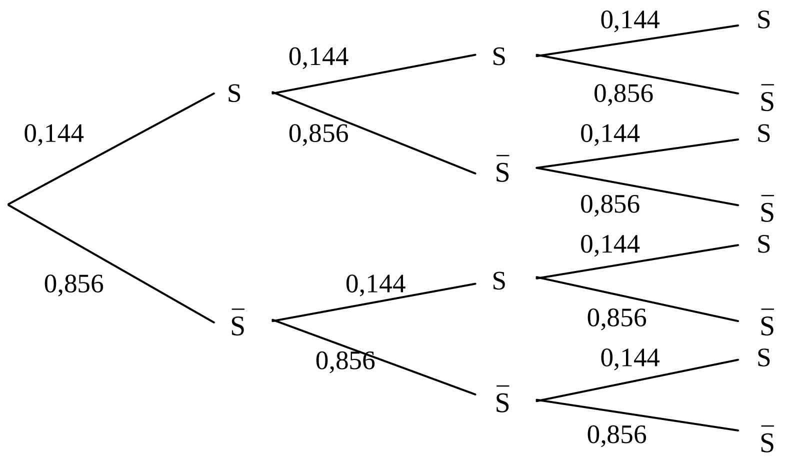
$$p_{\bar{S}}(T) = \frac{p(T \cap \bar{S})}{p(\bar{S})} = \frac{p(T) \times p_T(\bar{S})}{1 - p(S)} = \frac{0,4 \times 0,92}{1 - 0,144} = \frac{0,368}{0,856} = \frac{368}{856} = \frac{46}{107} \approx 0,430$$

Sachant que le dossier tiré au hasard est celui d'un client n'ayant pas souscrit une assurance multirisque, la probabilité que ce dossier soit celui d'un client voyageant en train est d'environ 0,430.

5. On choisit trois dossiers au hasard, indépendamment les uns des autres.
Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'exactement deux des dossiers concernent un client ayant souscrit l'assurance multirisque.

« Tirer au hasard un dossier » est une **épreuve de Bernoulli**. En effet, pour chaque dossier tiré au hasard, il y a deux issues possibles, succès ou échec, le succès S : « être celui d'un client ayant souscrit une assurance multirisque » ayant une probabilité p égale à 0,144.

De plus, on tire au hasard trois dossiers indépendamment les uns des autres, ceci revient à **répéter trois fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli précédente : on a ainsi un schéma de Bernoulli** que l'on peut schématiser au moyen de l'arbre ci-dessous.



Soit X le nombre de dossiers de clients ayant souscrit une assurance multirisque, X est le nombre de succès. **X suit donc la loi binomiale de paramètres 3 et 0,144**

Pour k compris entre 0 et 3 , on a : $p(X = k) = \binom{3}{k} \times 0,144^k \times 0,856^{3-k}$

On cherche ici p (X = 2) $\quad p(X = 2) = \binom{3}{2} \times 0,144^2 \times 0,856^{3-2} = 3 \times 0,144^2 \times 0,856 \approx 0,053$

remarque : $p(X = 2) = p(SS\bar{S}) + p(S\bar{S}S) + p(\bar{S}SS)$

La probabilité, arrondie au millième, qu'exactement deux des 3 dossiers concernent un client ayant souscrit l'assurance multirisque et égale à 0,053

BONUS :
Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'au moins deux des dossiers concernent un client ayant souscrit l'assurance multirisque.

$p(X \geq 2) = p(X = 2) + p(X = 3) = 3 \times 0,144^2 \times 0,856 + 0,144^3 \approx 0,056$

La probabilité, arrondie au millième, qu'au moins deux des trois dossiers concernent un client ayant souscrit l'assurance multirisque est égale à 0,056

Exercice 2 :(7 points)*A traiter directement sur le sujet*

Pour tout réel x, simplifier : $(e^{x})^{2} \times e^{3x-1} = e^{2x} \times e^{3x-1} = e^{2x+(3x-1)} = \boxed{e^{5x-1}}$

$$\frac{e^{-3x}}{e^{1-4x}} = e^{-3x-(1-4x)} = e^{-3x-1+4x} = \boxed{e^{x-1}}$$

Montrer que, pour tout x de IR, $\dfrac{e^{x}+1}{3e^{x}+2} = \dfrac{1+e^{-x}}{3+2e^{-x}}$

$$\frac{1+e^{-x}}{3+2e^{-x}} = \frac{1+\frac{1}{e^{x}}}{3+2\times\frac{1}{e^{x}}} = \frac{1+\frac{1}{e^{x}}}{3+\frac{2}{e^{x}}} = \frac{\frac{e^{x}+1}{e^{x}}}{\frac{3e^{x}+2}{e^{x}}} = \frac{e^{x}+1}{e^{x}} \times \frac{e^{x}}{3e^{x}+2} = \frac{e^{x}+1}{3e^{x}+2}$$

Exercice 3 :(9 points) **Etude d'une demande**

Une entreprise récolte et conditionne des fruits exotiques.

On estime que la quantité demandée, en tonnes, en fonction du prix x, en euros par kg, est modélisée par la fonction f définie sur [1 ; 4] par : $f(x) = 7{,}4 \times 0{,}6^{x}$

1. Etudier les variations de la fonction f. Interpréter économiquement ce résultat.

   $0 < 0{,}6 < 1$ donc la fonction : $x \mapsto 0{,}6^{x}$ est strictement décroissante sur IR donc sur [1 ; 4]
   En multipliant cette fonction par le réel 7,4, strictement positif, on en conclut que :
   la fonction f strictement décroissante sur [1 ; 4]

   Plus le prix au kilo augmente, plus la quantité demandée diminue.

2. L'entreprise a 2 tonnes de fruits à vendre.

   a) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans [1 ; 4]

   f est continue sur [1 ; 4]

   f est strictement décroissante sur [1 ; 4],

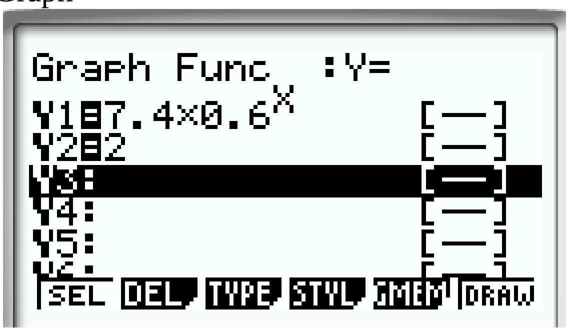
   le réel 2 est compris entre f(1) et f(4) car f(1) = 4,44 et f(4) = 0,95904

   donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires,

   l'équation $f(x) = 2$ possède une unique solution α dans [1 ;4].

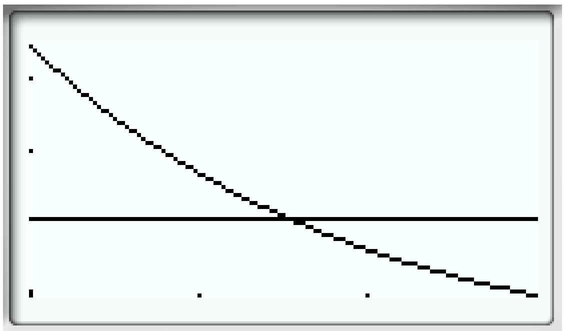
   b) A l'aide du solveur de votre calculatrice, donnerune valeur approchée par défaut de la solution α à 0,01 près.*On précisera les réglages utilisés et on fera un dessinreprésentant ce qui est visualisé sur l'écran de la calculatrice*.

   Mode Graph

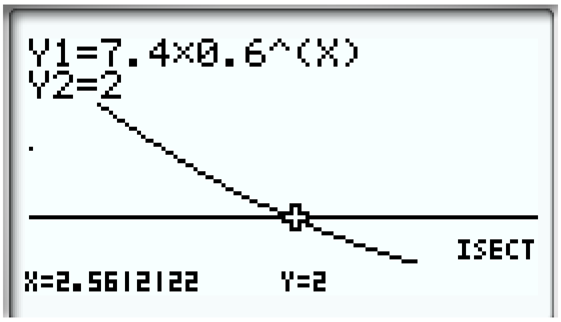


Shift Window :

Draw
Shift ZOOM AUTO



Shift G-Solve
ISCT



On en déduit que la valeur approchée par défaut de α à 0,01 près est 2,56

c) <u>En déduire le prix maximal d'un kilo de fruits permettant d'écouler totalement la production.</u>

L'entreprise a 2 tonnes de fruits à vendre.
On veut que toute cette production soit écoulée.
On cherche donc le prix en euros/kg correspondant soit la valeur de *x* telle que f(*x*) = 2
Il s'agit donc de la valeur α.

Vu la décroissance de f sur [1 ;4] , il s'agit donc de prendre une valeur approchée par défaut. Vu que le prix est en euros, on prend celle trouvée précédemment à 0,01 près.

Le prix maximal d'un kilo de fruits permettant d'écouler toute la production de 2 tonnes est donc de 2,56 €

Exercice 4 :(4points) *A traiter directement sur le sujet*

Soit une fonction f dérivable sur son ensemble de définition et dont on connaît le tableau de variation ci-dessous

x	-2	1	3	6
Variation de f	6		5	
		1,5		-4

Répondre par Vrai ou Faux ***en justifiant***

1. L'équation f(x)= 0 admet une unique solution. **VRAI**

x	-2	1	3	α	6
Variation de f	6		5		
				0	
		1,5			-4

Sur [- 2 ; 3], la fonction f admet un minimum égal à 1,5 donc l'équation f(x)= 0 n'admet aucune solution dans cet intervalle

Sur [3 ; 6], l a fonction f est continue, strictement décroissante et zéro est compris entre f(3) et f(6) car f(3) = 5 et f(6) = - 4 donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires , l'équation f(x)= 0 admet une unique solution dans cet intervalle

En conclusion l'équation f(x) = 0 admet une unique solution

2. Il existe un réel k tel que l'équation f(x) = k admet exactement trois solutions **VRAI**

x	-2	x_1	1	x_2	3	x_3	α	6
Variation de f	6				5			
		k		k		k	0	
			1,5					-4

Il suffit de prendre comme valeur de k un réel compris entre 1,5 et 5 ; par exemple k = 2

3. f '(2) × f '(4) ≤ 0 **VRAI**

x	-2	1	2	3	4	6
Variation de f	6			5		
		1,5				-4

2 appartient à [1 ; 3] et f est strictement croissante sur cet intervalle donc f '(2) ≥ 0
4 appartient à [3 ; 6] et f est strictement décroissante sur cet intervalle donc f '(4) ≤ 0
Or le produit de deux nombre de signes contraires est un réel négatif

On en déduit que f '(2) × f '(4) ≤ 0

4. Pour tous réels a et b de [1 ; 3], si a > b alors f(a) < f(b) **FAUX**

x	-2	1	b	a	3	6
Variation de f	6				5	
				f(a)		
			f(b)			
		1,5				-4

La fonction f est strictement croissante sur [1 ; 3] donc les réels de cet intervalle et leurs images sont rangés dans le même ordre
On en déduit que, **pour tous réels a et b de [1 ; 3], si a > b alors f(a) > f(b)**