Le barème est donné à titre indicatif sur 35

Exercice n°1 (7 points) TRIGONOMETRIE

Résoudre dans $[0\,;\,2\pi[$, les équations :

a) $\left(2\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sqrt{2}\right)(\cos x-1)=0$ équivaut à $2\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sqrt{2}$ ou $\cos x=1$

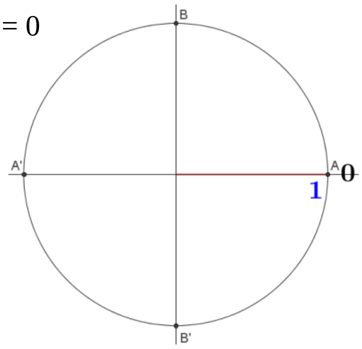
soit $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x=1$

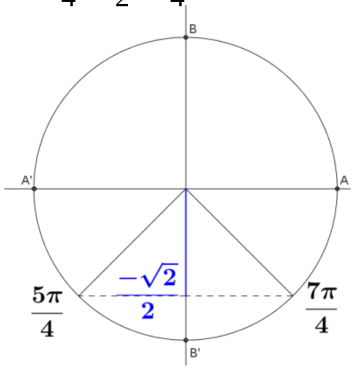
L'équation $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ a deux solutions : $\frac{\pi}{2}+x=\frac{5\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{2}+x=\frac{7\pi}{4}$

soit $x=\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}$ ou $x=\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{4}$

L'équation $\cos x=1$ a une solution : $x=0$

Donc $\mathbf{S=\left\{0\,;\,\frac{3\pi}{4}\,;\,\frac{5\pi}{4}\right\}}$





b) $3\cos^2 x-4\sqrt{3}\cos x+36=0$

Posons $X=\cos x$, l'équation devient :

$3X^2-12\sqrt{3}X+36=0$

Le calcul du discriminant nous donne : $\Delta=(-12\sqrt{3})^2-4\times3\times36=432-432=0$

L'équation admet donc une solution réelle : $X=\frac{12\sqrt{3}}{2\times3}=2\sqrt{3}$

Comme $X=\cos x$, on obtient donc : $\cos x=2\sqrt{3}$

Or $\cos x\in[-1\,;\,1]$, donc l'équation $3\cos^2 x-4\sqrt{3}\cos x+36=0$ n'a pas de solution.

$\mathbf{S=\emptyset}$

Exercice n°2 (3 points) TRIGONOMETRIE

a) Exprimer $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ à l'aide de $\cos x$ et/ou de $\sin x$.

$\mathbf{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x}$

b) On admet que $\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, en déduire $\cos\frac{\pi}{10}$. *Vous justifierez soigneusement votre réponse.*

$\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}=\frac{5\pi}{10}-\frac{4\pi}{10}$, donc $\cos\frac{\pi}{10}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right)=\sin\frac{2\pi}{5}$, d'après la question a),

donc $\mathbf{\cos\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$

Exercice n°3 (7 points) MISE EN EQUATION

Le directeur d'un parc de loisirs reçoit en moyenne 600 visiteurs par jour lorsque le prix de l'entrée est fixé à 23 €.
Lorsque le prix de l'entrée baisse de 1 €, le parc enregistre 60 entrées supplémentaires en moyenne.

a) Pour une baisse du prix de l'entrée de x € (avec x entier), montrer que la recette journalière du parc, en fonction de x est donnée par :

$$R(x) = -60x^2 + 780x + 13\,800$$

Lorsque le prix baisse de x euros, il subit donc x baisses de 1 euro, donc il enregistre $60x$ entrées supplémentaires, donc il y aura $(600 + 60x)$ visiteurs, et le prix est de $(23 - x)$ euros.

La recette est donc $R(x) = (600 + 60x)(23 - x)$

$$R(x) = 13\,800 - 600x + 1\,380x - 60x^2 = -60x^2 + 780x + 13\,800$$

b) Le directeur souhaite que la recette soit supérieure à 17 000 €. Traduire cette condition par une inéquation.

On veut $R(x) > 17\,000$ c'est-à-dire $-60x^2 + 780x + 13\,800 > 17\,000$.

c) Le directeur pourra-t-il atteindre son objectif ? Si oui, pour quelle baisse de prix ?

$$-60x^2 + 780x + 13\,800 > 17\,000$$

$$\Leftrightarrow \quad -60x^2 + 780x + 13\,800 - 17\,000 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -60x^2 + 780x - 3\,200 > 0.$$

$\Delta = (780)^2 - 4(-60)(-3\,200) = 608\,400 - 768\,000 = -159\,600$

donc $\Delta < 0$ donc $-60x^2 + 780x - 3\,200$ n'a pas de racine.

Or $a = -60$ est négatif donc $-60x^2 + 780x - 3\,200$ est toujours négatif, donc

l'inéquation $-60x^2 + 780x - 3\,200 > 0$ n'a pas de solution.

Le directeur ne peut donc pas atteindre son objectif.

Exercice n°4 (6 points) EQUATIONS DE DROITES

$(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal.
On donne les points A $(-3 ; 1)$, B $(2 ; -2)$ et (d) la droite d'équation cartésienne : $4x - 2y - 5 = 0$

a) Déterminer une équation cartésienne de (AB).

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-(-3)\\-2-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$

Soit $M(x;y)$ on a donc $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-(-3)\\y-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y-1\end{pmatrix}$

$M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ colinéaires $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ ont des coordonnées proportionnelles

$$M \in (AB) \Leftrightarrow 5(y-1) = -3(x+3)$$

$$\Leftrightarrow 5y - 5 = -3x - 9$$

$$\Leftrightarrow 3x + 5y + 4 = 0$$

Une équation cartésienne de (AB) est : $3x + 5y + 4 = 0$

b) Donner un vecteur directeur de (d).

D'après une propriété de cours $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d)

c) Le point C $(-20 ; -42)$ appartient-il à (d) ? Justifier.

$4x_C - 2y_C - 5 = 4\times(-20) - 2\times(-42) - 5 = -80 + 84 - 5 = -1 \neq 0$ donc **C n'appartient pas à (d).**

d) (d) et (AB) sont-elles sécantes ou parallèles ?

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ $2(-3) - 4\times 5 = -26 \neq 0$, donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires,

donc (d) et (AB) n'ont pas la même direction,

donc (d) et (AB) ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes.

Exercice n°5 **(5 points)** STATISTIQUES

On note Y la série statistique des prix de 100 articles :

x_i	4	6	10	12	18	20
n_i	8	20	22	25	19	6
Effectifs cumulés	**8**	**28**	**50**	**75**	**94**	**100**

a) Déterminer le prix médian (Med), le premier quartile (Q1) et le troisième quartile (Q3) de cette série. Justifier soigneusement vos réponses.

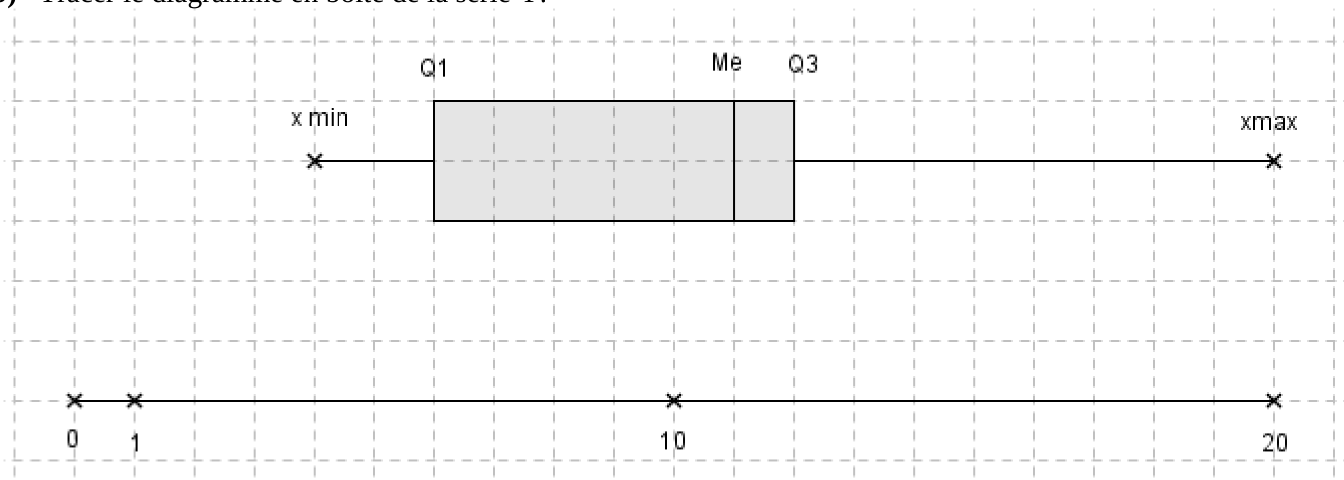
$\frac{100}{2} = 50$ le prix médian est la moyenne de la 50ème et de la 51ème valeur de la série ordonnée :

Med = $\mathbf{\frac{10+12}{2} = 11}$**, le prix médian est 11 euros**

$\frac{100}{4} = 25$ le premier quartile est la 25ème valeur de la série ordonnée : **Q1 = 6 euros**

$\frac{3 \times 100}{4} = 75$ le troisième quartile est la 75ème valeur de la série ordonnée : **Q3 = 12 euros**

b) Tracer le diagramme en boite de la série Y.



Exercice n°6 **(7 points)** VECTEURS

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un parallélogramme.

Soient I et J les points définis par $\overrightarrow{AI} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$ et $5\,\overrightarrow{JD} = 3\,\overrightarrow{JA}$.

1) Exprimer $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$.

$5\,\overrightarrow{JD} = 3\,\overrightarrow{JA}$ donc :

$5\,\overrightarrow{JA} + 5\,\overrightarrow{AD} = 3\,\overrightarrow{JA}$

$5\,\overrightarrow{AD} = -2\,\overrightarrow{JA}$

$5\,\overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{AJ}$

$\mathbf{\frac{5}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AJ}}$

2) Compléter la figure.

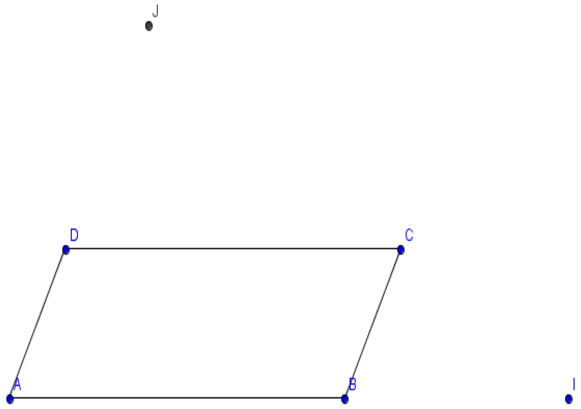
3) Montrer que C, I et J sont alignés.

$\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AD} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{BC}$

Ainsi, on a $\frac{5}{2}\overrightarrow{IC} = \frac{5}{2}(-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IJ}$

donc $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires, donc I, J et C sont alignés.


J
D
C
A
B
I