1S **Eléments de correction du DNS 9** **à rendre le 08/01/13**

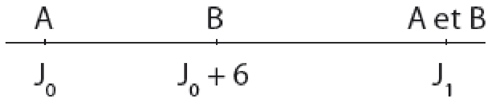
<u>Exercice n°1</u> **Conjonction de deux corps célestes**

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours.
Six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours.
On note J_1, le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.
Le but de l'exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.

1. Mise en équation.

On note u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1.

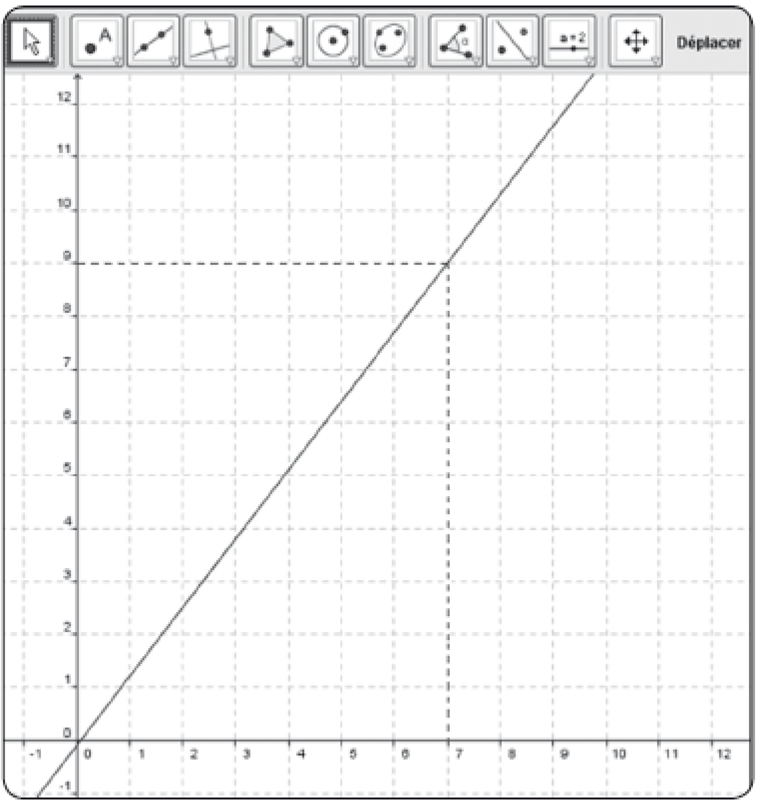
a) Démontrer que $35u - 27v = 2$.



Le nombre de jours écoulés entre J_0 et J_1 pour A : $105u$.
Le nombre de jours écoulés pour B entre $J_0 + 6$ et J_1 : $81v$.
Le nombre de jours écoulés entre J_0 et $J_0 + 6$:
$105u - 81v = 6$.
En simplifiant par 3 on obtient : $35u - 27v = 2$.

b) À l'aide d'un logiciel de géométrie (Geogebra), dans un repère, construire la droite d d'équation :

$$35x - 27y - 2 = 0.$$



c) En déduire alors les valeurs de u et v.

On cherche un point à coordonnées positives entières, les plus petites possibles, soit :
***u* = 7 et *v* = 9**

2. Détermination de J_1.

a) Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?
Effectuer ce calcul de deux façons différentes.

Le nombre de jours qui s'écouleront entre J_0 et J_1 :
$105u = 105 \times 7 = 735$.
Une autre façon : $6 + 81\,v = 6 + 81 \times 9 = 735$.

b) Le jourJ_0 était le mardi 7 décembre 2010.
Quelle est la date exacte du jour J_1 ?

$$735 = \underbrace{24}_{\text{déc 2010}} + \underbrace{365}_{\text{an 2011}} + \underbrace{31}_{\text{janvier 2012}} + \underbrace{29}_{\substack{\text{fév. 2012} \\ \text{(année bissextile)}}}$$

$$+ \underbrace{31}_{\text{mars}} + \underbrace{30}_{\text{avril}} + \underbrace{31}_{\text{mai}} + \underbrace{30}_{\text{juin}} + \underbrace{31}_{\text{juillet}} + \underbrace{31}_{\text{août}}$$

$$+ \underbrace{30}_{\text{sept.}} + \underbrace{31}_{\text{oct.}} + \underbrace{30}_{\text{nov.}} + \underbrace{11}_{\text{déc.}}$$

Le jour J_7 est le 11 décembre 2013.
(un mardi car $735 = 7 \times 105$)

3. Une question ouverte.

Si l'astronome manque ce rendez-vous du jour J_1, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

<u>1ère méthode</u> :

Graphiquement, on trouve (34 ; 44).
Le nombre de jours qui s'écouleront entre J_0 et J_2 (jour de la prochaine conjonction) est $34 \times 105 = 3\,570$.
$3\,570 - 735 = 2\,835$.
L'astronome devra attendre 2 835 jours.

<u>2ème méthode</u> :

On cherche les nombres de périodes respectifs des corps A et B, soit deux entiers positifs, n et p, tels que :

$105\,n = 81\,p$ avec n et p les plus petits possibles

Soit : $35\,n = 27\,p$ or PGCD(35 ; 27) = 1

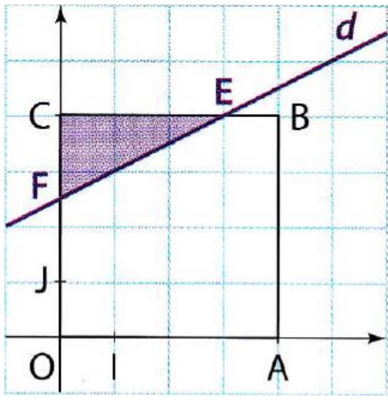
Donc le plus petit multiple commun à 35 et 27 est leur produit : 35×27

D'où : $n = 27$ et $p = 35$

L'astronome devra donc attendre 27 périodes du corps A et 35 périodes du corps B, soit :

$105 \times 27 =$ **2835 jours** (ou $81 \times 35 = 2835$)

Exercice n°2



On se place dans un repère orthonormé (O; I, J).
OABC est un carré de côté 4.

d a pour équation : $y = \frac{1}{2}x + m$

avec *m* appartenant à l'intervalle [2 ; 4[.

1. Justifiez que pour tout nombre *m* de [2 ; 4[, *d* coupe le segment [OC] en F et le segment [BC] en E.

d coupe (OC) au point F de coordonnées (0 ; *m*) ;

donc si $2 \leq m < 4$, alors F appartient à [OC].

d coupe (BC) au point E de coordonnées $(8 - 2m\ ;\ 4)$;

donc si $2 \leq m < 4$, alors $0 < 8 - 2m \leq 4$ et E $\in$[BC].

2. a) Démontrez que : $\text{aire(ECF)} = (4 - m)^2$.

E $\in$[BC], donc E est le point de *d* d'ordonnée 4, d'abscisse *x*, telle que :

$\frac{1}{2}x + m = 4 \Leftrightarrow x + 2m = 8 \Leftrightarrow x = 8 - 2m$, donc CE $= 8 - 2m$

$\text{aire(ECF)} = \frac{\text{CF} \times \text{CE}}{2}$

Or CF =OC – OF $= 4 - m$,

Donc $\text{aire(ECF)} = \frac{(4 - m)\ (8 - 2m)}{2} = \frac{(4 - m) \times 2\ (4 - m)}{2}$

donc **aire(ECF) = $\mathbf{(4 - m)^2}$.**

b) Déduisez-en l'ensemble des nombres *m* de l'intervalle [2 ; 4[pour lesquels :

8 aire (ECF) < aire (OABC).

$8(4 - m)^2 < 16 \Leftrightarrow (4 - m)^2 < 2 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 14 < 0$.

$\Delta = 8$ $\Delta > 0$,donc le trinôme $m^2 - 8m + 14$ possède deux racines réelles :

$m_1 = 4 - \sqrt{2}$ et $m_1 = 4 + \sqrt{2}$

Comme $a > 0$, le trinôme $m^2 - 8m + 14$ est négatif pour :

$m \in [4 - \sqrt{2}\ ;\ 4 + \sqrt{2}]$.

De plus, par hypothèse $m \in [2\ ;\ 4[$, donc les nombres cherchés sont ceux de l'intervalle $[4 - \sqrt{2}\ ;\ 4[$.

S = $\mathbf{[4 - \sqrt{2}\ ;\ 4[}$