TES Spé Maths **Eléments de correction du Bac Blanc n°1 du Vendredi 1 Février 2013**

Calculatrice autorisée - Aucun document n'est autorisé. **Durée : 3 h**

Vous apporterez un grand soin à la présentation et à la rédaction de votre copie.
Vous n'oublierez pas de rendre le sujet avec votre copie. Bon courage.

Le barème est noté sur 20 points.

<u>Exercice 1</u>*:* *Graphes et matrices* **(5 points)**

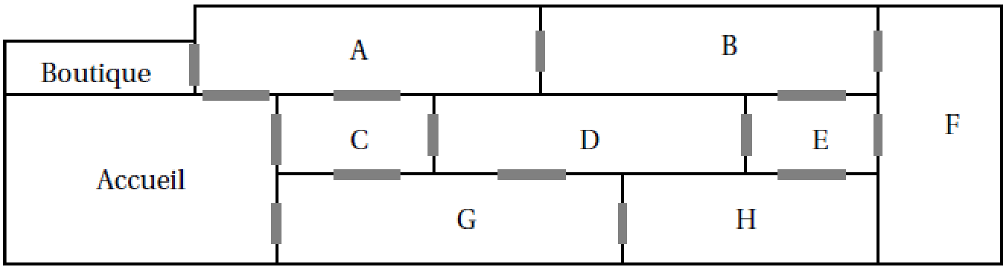
Partie A

Voici le plan d'un musée :

- huit salles d'expositions A, B, C, D, E, F, G, H proposés aux visiteurs
- l'accueil (Ac) et la boutique (Bo)
- les parties grisées matérialisent les portes.

Les visiteurs partent de l'accueil et doivent terminer leur visite à la boutique.

<u>Remarque</u> : on ne tient pas compte des portes d'entrée et de sortie : elles n'ont donc pas été tracées sur ce plan.

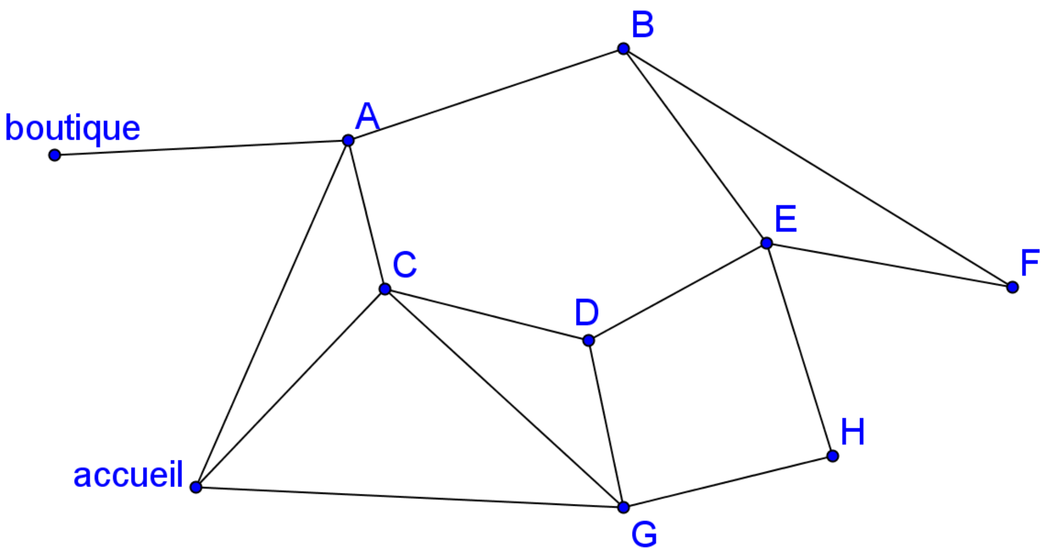


On s'intéresse au parcours d'un visiteur dans ce musée.

Cette situation peut être modélisée par un graphe :

- les 10 sommets étant les noms des salles y compris l'accueil et la boutique
- les arêtes représentant les portes de communication.

1) <u>Dessiner un graphe modélisant la situation décrite</u>



2) Un visiteur désire parcourir l'ensemble des salles d'exposition en passant par chaque porte une fois et une seule.

a) <u>Expliquer pourquoi son souhait n'est pas réalisable</u>. <u>On justifiera avec beaucoup de précision</u>

Chercher à parcourir l'ensemble des salles d'exposition en passant par chaque porte une fois et une seule revient à chercher si le graphe tracé dans la question 1) admet une chaîne eulérienne.

D'après le théorème d'Euler, un graphe admet une chaîne eulérienne si et seulement s'il est connexe et admet exactement zéro ou deux sommets de degré impair.

Ici le graphe est connexe car deux sommets quelconques peuvent être reliés par au moins une chaîne.

On a de plus /

Sommets	Boutique	Accueil	A	B	C	D	E	F	G	H
Degrés	1	3	4	3	4	3	4	2	4	2

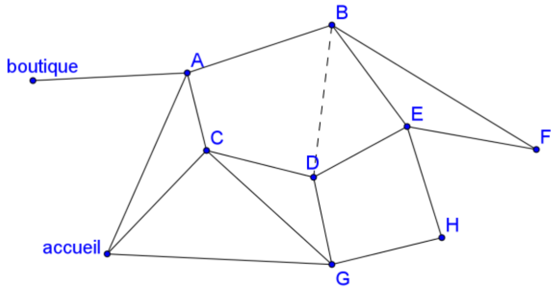
Il existe donc 4 sommets de degré impair donc il n'existe pas de chaîne eulérienne.
Le souhait du visiteur n'est donc pas réalisable.

b) <u>Proposer une modification simple du musée permettant un tel circuit</u>.

<u>Première proposition :</u>

On ajoute une porte entre D et B

Le graphe reste connexe et alors il n'existe plus qu'exactement deux sommets de degré impair (Boutique et accueil).



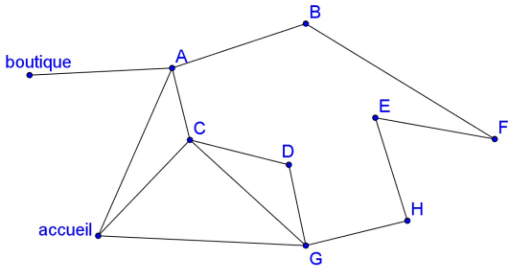
Sommets	Boutique	Accueil	A	B	C	D	E	F	G	H
Degrés	1	3	4	2	4	2	4	2	4	2

D'après le théorème d'Euler, on en déduit qu'il existe une chaîne eulérienne donc le visiteur peut parcourir l'ensemble des salles d'exposition en passant par chaque porte une fois et une seule.

<u>Seconde proposition :</u>

On supprime la porte entre une porte entre D et E et celle entre B et E

Le graphe reste connexe et alors il n'existe plus qu'exactement deux sommets de degré impair (Boutique et accueil).



Sommets	Boutique	Accueil	A	B	C	D	E	F	G	H
Degrés	1	3	4	2	4	2	2	2	4	2

D'après le théorème d'Euler, on en déduit qu'il existe une chaîne eulérienne donc le visiteur peut parcourir l'ensemble des salles d'exposition en passant par chaque porte une fois et une seule.

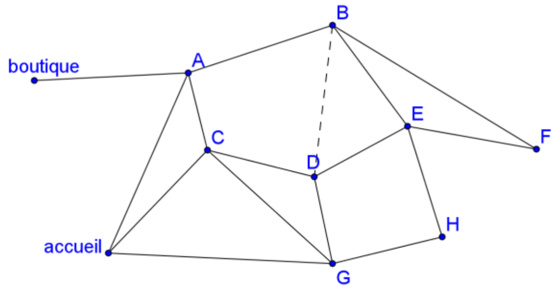
c) <u>En utilisant un algorithme, déterminer un circuit possible.</u>

Il s'agit d'utiliser l'algorithme d'Euler

Avec la première proposition :

On ajoute une porte entre D et B

deux sommets de degré impair : Boutique et accueil

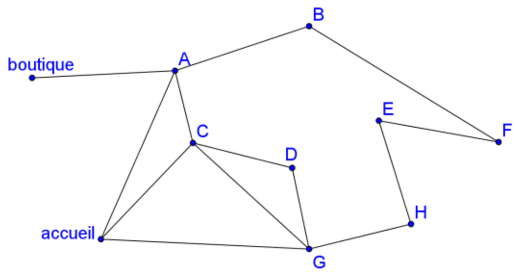


Un parcours possible est : boutique-A-B- H – G – D -B-F-E-D-C-G-Accueil-A-C-accueil

chaîne	cycle
boutique-A-C-accueil	
	A-B-F-E- D-C-G-accueil-A
boutique-**A-B-F-E-D-C-G-Accueil-A**-C-accueil	
	B- H – G – D -B
boutique-**A-B- H – G – D -B-F-E-D-C-G-Accueil-A**-C-accueil	

Avec la seconde proposition :

On supprime la porte entre une porte entre D et E et celle entre B et E



Un parcours possible est : A-B-F-E-H-G-C–D-G-Accueil-A-C-accueil

chaîne	cycle
boutique-A-C-accueil	
	A-B-F-E-H-G-accueil-A
boutique-**A-B-F-E-H-G-Accueil-A**-C-accueil	
	G-C–D-G
boutique-**A-B-F-E-H-G-C–D-G-Accueil-A**-C-accueil	

Partie B

Le directeur a fait repeindre l'accueil et la boutique. L'entreprise a utilisé pour l'accueil 3 pots de peinture blanche et 4 pots de pots de peinture de couleur pour un total de 202 €.
Pour la boutique, elle a utilisé 5 pots de peinture blanche et 7 pots de peinture de couleur pour un total de 347,50 €.
Soient x le prix en euros d'un pot de peinture blanche et y le prix en euros d'un pot de peinture de couleur.

1. Montrer que le problème posé revient à résoudre le système $\begin{cases} 3x + 4y = 202 \\ 5x+7y= 347,5 \end{cases}$

   Soient x le prix en euros d'un pot de peinture blanche et y le prix en euros d'un pot de peinture de couleur.

   L'entreprise a utilisé pour l'accueil 3 pots de peinture blanche et 4 pots de pots de peinture de couleur pour un total de 202 € donc $3x + 4y = 202$.

   Pour la boutique, elle a utilisé 5 pots de peinture blanche et 7 pots de peinture de couleur pour un total de 347,50 € donc $5x + 7y = 347,5$

   D'où le système $\begin{cases} \mathbf{3x + 4y = 202} \\ \mathbf{5x+7y= 347,5} \end{cases}$

2. Résoudre ce système en utilisant des matrices

   Soient les matrices : $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 202 \\ 347,5 \end{pmatrix}$

   Le système à résoudre est donc équivalent à $A \times X = B$

   A^{-1} existe d'après la calculatrice (A est inversible)

   donc : $A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B$

   or $A^{-1} \times A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (la matrice unité d'ordre 2)

   d'où $I \times X = A^{-1} \times B$

   $$X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} 24 \\ 32,5 \end{pmatrix}$$

   Le système admet donc une unique solution (24 ; 32,5)

3. Conclure

   On en déduit que le prix en euros d'un pot de peinture blanche est de 24€ et le prix en euros d'un pot de peinture de couleur est de 32,5€.

Exercice 2 : *Fonctions et économie* **(7 points)**

Une entreprise vend jusqu'à 3 millions de gommes par mois.

- Le prix unitaire qu'acceptent de payer les consommateurs en fonction de la quantité x de gommes disponibles sur le marché est modélisé par la fonction g définie sur [0 ; 3] par $g(x) = \dfrac{5}{x^2 + x + 1}$
- Les producteurs acceptent de fabriquer une quantité x de gommes si le prix unitaire de la gomme atteint une valeur minimale. Ce prix minimal est modélisé par la fonction f définie sur [0 ; 3] par $f(x) = 0{,}5e^{0{,}5x}$

Les prix unitaires $f(x)$ et $g(x)$ sont exprimé en euros et la quantité x en millions de gommes.

Partie A : **Etude de la demande et de l'offre**

1. a) Calculer f '(x)

pour tout x de [0 ; 3] $f(x) = 0{,}5e^{0{,}5x}$

$f = 0{,}5\, e^{u}$ donc $f' = 0{,}5\, u'e^{u}$ avec : $u(x) = 0{,}5\, x$ donc $u'(x) = 0{,}5$

donc $f'(x) = 0{,}5\times 0{,}5e^{0{,}5x} = 0{,}25\, e^{0{,}5x}$

pour tout x de [0 ; 3] $f'(x) = 0{,}25e^{0{,}5x}$

b) Etudier alors les variations de f sur [0 ; 3]

x	0	3
Signe de 0,25	+	
Signe de $e^{0{,}5x}$	+	
Signe de f '(x)	+	
Variation de f	0,5 ↗	$0{,}5e^{1{,}5}$

Remarque : on peut raisonner sans faire de tableau de signes ; Il suffit de préciser que 0,25 est strictement positif ainsi que, pour tout x de | 0 ; 3], $e^{0{,}5x}$. On en déduit que le produit de ces deux réels strictement positifs, qui est égal à f '(x) est strictement positif.

En conclusion : f est strictement croissante sur | 0 ; 3]

2. Etudier les variations de la fonction g sur [0 ; 3]

➢ Calcul de la dérivée

Pour tout x de | 0 ; 3], $g(x) = \dfrac{5}{x^2 + x + 1} = 5 \times \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

$g = 5 \times \dfrac{1}{v}$ avec $v(x) = x^2 + x + 1$ $v'(x) = 2x + 1$

$g' = 5 \times \dfrac{-v'}{v2}$ donc $g'(x) = 5 \times \dfrac{-(2x+1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \dfrac{-5(2x+1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \dfrac{-10x - 5}{(x^2 + x + 1)^2}$

Autre méthode : $g = \dfrac{u}{v}$ donc $g' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

avec $u(x) = 5$ $\qquad u'(x) = 0$

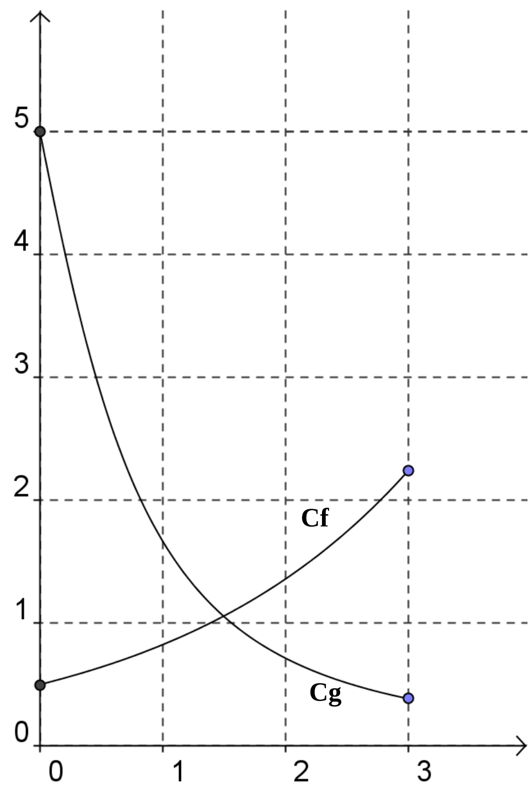
$v(x) = x^2 + x + 1 \qquad v'(x) = 2x + 1$

$$\text{donc } g'(x) = \frac{0\times(x^2 + x + 1) - 5(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{-10x - 5}{(x^2 + x + 1)^2}$$

➢ Signe de la dérivée et variations de g

x	0 $\qquad\qquad$ 3
Signe de $-10x - 5$	–
Signe de $(x^2 + x + 1)^2$	+
Signe de $g'(x)$	–
Variation de g	5 ↘ $\frac{5}{13}$

3. Reconnaître sur le graphique ci-dessous les représentations graphiques de f et g, tracées dans un repère orthogonal.

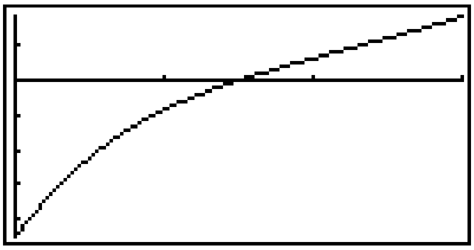


Partie B : Recherche du prix d'équilibre

Dans un marché à concurrence « parfaite », la loi de l'offre et de la demande tend à dégager un prix d'équilibre p_0 *pour lequel l'offre des producteurs est égale à la demande des consommateurs.*

Pour tout réel x de [0 ; 3], on pose $h(x) = f(x) - g(x) = 0{,}5e^{0{,}5x} - \dfrac{5}{x^2 + x + 1}$

1. **On admet que** h est strictement monotone. <u>En utilisant la calculatrice, conjecturer alors les variations de h sur [0 ; 3]</u>. <u>*On admettra cette conjecture pour ce qui suit*</u>.



Il semble que h soit strictement croissante sur [0 ; 3]

2. <u>Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution q_0 sur [0 ; 3]</u>

X	Y1
0	-4.5
1	-0.842
2	0.6448
3	1.8562

0

FORM DEL ROW EDIT G-CON G-PLT

h est continue sur [0 ; 3]

h est strictement croissante sur [0 ; 3]

le réel zéro est compris entre h (0)et h (3) car

h (0) = – 4,5 et h(3) ≈ 1,86

donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires,

l'équation h(x) = 0 possède une unique solution q_0 **dans [0 ; 3]**

3. <u>A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur arrondie à 0,01 près de la solution</u> q_0

X	Y1
1.2	-0.462
1.3	-0.295
1.4	-0.139
1.5	5.8E-3

1.4

FORM DEL ROW EDIT G-CON G-PLT

X	Y1
1.47	-0.036
1.48	-0.022
1.49	-8E-3
1.5	5.8E-3

1.5

FORM DEL ROW EDIT G-CON G-PLT

X	Y1
1.494	-2E-3
1.495	-1E-3
1.496	1.9E-4
1.497	1.6E-3

1.495

FORM DEL ROW EDIT G-CON G-PLT

$1{,}495 < q_0 < 1{,}496$ car $h(1{,}495) < 0$ et $h(1{,}496) > 0$

En conclusion : **la valeur arrondie à 0,01 près de la solution q_0 est égale à 1,5**

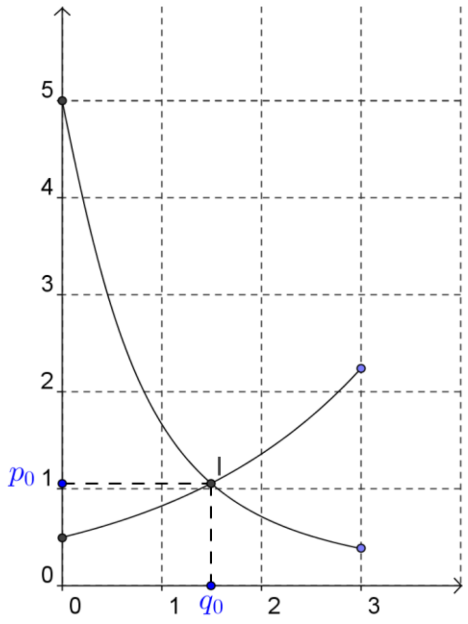
4. <u>Calculer alors $f(q_0)$. En donner une valeur arrondie à 0,01 € près.</u>

$f(q_0) \approx f(1{,}5) \approx 0{,}5e^{0{,}5\times1{,}5} \approx 1{,}0585$

donc **la valeur arrondie de $f(q_0)$ à 0,01 € près est égal à 1,06**

On appelle q_0 la quantité d'équilibre et p_0 le prix d'équilibre associé à q_0 donc $p_0 = g(q_0) = f(q_0)$.

5. Placer sur le graphique q_0 et p_0.



Partie C : Surplus des producteurs

On appelle surplus des producteurs, le gain supplémentaire que réalisent les producteurs en vendant au prix p_0.

Il est égal à : $$S = p_0 \times q_0 - \int_0^{q_0} f(x)\,dx$$

Il est exprimé en millions d'euros.

1. Donner, en justifiant, une interprétation graphique de $\int_0^{q_0} f(x)\,dx$, puis sans justifier celle de S .

(on interprétera le produit $p_0 \times q_0$ *comme l'aire d'un rectangle)*

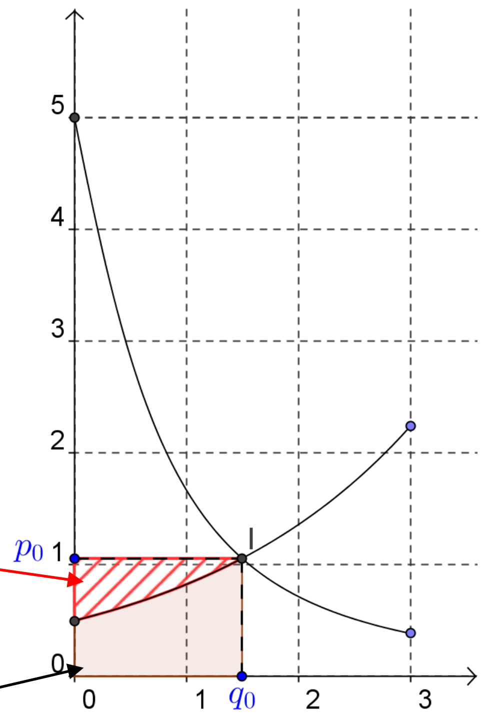
➢ Interprétation graphique de $\int_0^{q_0} f(x)\,dx$

La fonction f est continue sur [0 ; 3] (comme produit d'un réel positif par une fonction de type e^u avec u continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0 ; q_0]$).

La fonction f est positive sur [0 ; 3] . En effet, la fonction exponentielle est strictement positive et 0,5 aussi.

On en déduit que $\int_0^{q_0} f(x)\,dx$ est l'aire en unité d'aires du domaine limité par C_f, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 0$ et $x = q_0$

S est l'aire en unités d'aire du domaine hachuré ci-contre



$\int_0^{q_0} f(x)\,dx$ est l'aire en unités d'aire du domaine colorié ci-contre

Avec votre calculatrice, calculer $I = \int_0^{1,5} f(x)\,dx$. On arrondira le résultat à 0,001 près.

$$\mathbf{I} = \int_0^{1,5} f(x)\,dx \approx \mathbf{1,117}$$

2. En faisant apparaître l'intégrale I dans le calcul de S, donner une valeur arrondie de S à 0,01 millions d'euros près.

$S = p_0 \times q_0 - \int_0^{q_0} f(x)\,dx$

Or $q_0 \approx 1,5$ (d'après la question B 3)) et $p_0 \approx 1,06$ (d'après la question B 4))

Donc $S = p_0 \times q_0 - \int_0^{q_0} f(x)\,dx \approx 1,06 \times 1,5 - \int_0^{1,5} f(x)\,dx \approx 1,59 - 1,117 \approx 0,473$

Le surplus des producteurs, noté S, est donc environ égal à 0,473 millions d'euros

Exercice 3 : *Suites* (4points)

En Janvier 2010, un artisan a réalisé un chiffre d'affaires de 2 300 € alors que ses frais se sont élevés à 800 € d'où un bénéfice de 1 500€.
Grâce à une clientèle en augmentation, le chiffre d'affaires augmente de 1% tous les mois.
Cependant ses frais augmentent dans le même temps de 2,5%.

1. Soit R_n le montant en euros de son chiffre d'affaires au bout de n mois après Janvier 2010
   a) Montrer que la suite (R_n) est une suite géométrique

   Son chiffre d'affaires augmente de 1% tous les mois donc pour tout n on a :

   $$R_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{100}\right) R_n = 1,01\, R_n$$

   On en déduit que **la suite (R_n) est une suite géométrique de raison 1,01 (b=1,01).**

   De plus, R_n le montant en euros de son chiffre d'affaires au bout de n mois après Janvier 2010 et, en Janvier 2010, il a réalisé un chiffre d'affaires de 2 300 €

   donc son premier terme est R_0 tel que $R_0 = 2\,300$

   b) En déduire l'expression de R_n en fonction de n

   Comme (R_n) est une suite géométrique de raison 1,01 (b= 1,01) et de premier terme est R_0 tel que $R_0 = 2\,300$,

   on a pour tout $n \geq 0$ $\mathbf{R_n} = R_0 \times b^n = \mathbf{2\,300 \times 1,01^n}$

2. Soit C_n le montant en euros de ses frais au bout de n mois après Janvier 2010

   On admet que pour tout $n \geq 0$ $C_n = 800 \times 1,025^n$

   Etudier les variations de la suite (C_n) puis sa limite.

   - Variations de (C_n)

     $1,025 > 1$ donc la suite ($1,025^n$) est strictement croissante

     En multipliant par 800 qui est strictement positif, on en déduit que :

     la suite (C_n) est strictement croissante

   - Limite de (C_n)

$1{,}025 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}025^n = +\infty$

En multipliant par 800 qui est strictement positif, on en déduit que

$\mathbf{\lim\limits_{n \to +\infty} C_n = +\infty}$

3. On considère l'algorithme ci-contre.

Variables : n est un entier naturel

Initialisation: n prend la valeur 0

Traitement : Tant que $\mathbf{2\,300 \times 1,01^n} \geq \mathbf{800 \times 1,025^n}$
n prend la valeur $n + 1$
Fin de Tant que

Sortie : Afficher n

$\mathbf{R_n}$
Chiffres d'affaires (recettes)

$\mathbf{C_n}$
Montant de ses frais

a) Quel est le rôle de cet algorithme ?

Cet algorithme permet de connaître le plus petit rang *n* tel que $R_n < C_n$

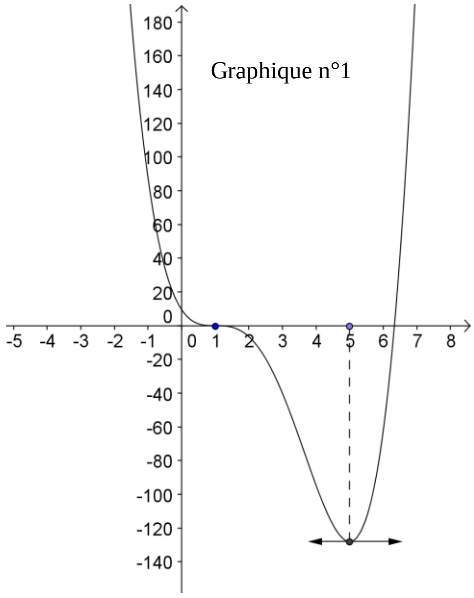
b) En l'utilisant, la valeur affichée est 72. Quelle information peut-en tirer l'artisan ?

A partir du 72ème mois c'est-à-dire à partir de la sixième année, son entreprise ne sera plus rentable car son chiffre d'affaires sera plus petit que sa recette.

Exercice 4 : *Vrai ou Faux ????* (4 points)

Les questions sont indépendantes. Pour certaines d'entre elles, il est demandé une justification.

Question 1 :
On considère la fonction f définie et dérivable sur IRet on donne, ci-contre, sa courbe représentative C_f dans un repère orthogonal.



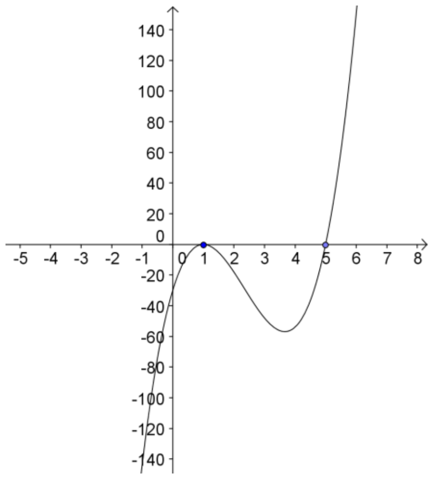
Réponder sans justifier : est-il « Vrai » ou « Faux » de dire que

a) La fonction f est concave sur] – ∞ ; 1] **FAUX**

b) La fonction f admet au moins un point d'inflexion **VRAI**

Réponder en justifiant : est-il « Vrai » ou « Faux » de dire que

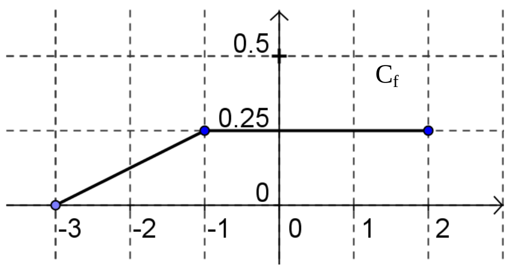
c) La fonction représentée ci-contre peut-être la fonction dérivée de la fonction f représentée sur le graphique n°1
VRAI



x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
Signe de f '(x)		–	0	–	0	+	
Variation de f	↘				↗		

Question 2 : Soit la fonction f définie sur [– 3 ; 2] et représentée ci-contre dans un repère orthogonal.

Réponder en justifiant : est-il « Vrai » ou « Faux » de dire que



f est une fonction de densité de probabilité sur [– 3 ; 2]

VRAI

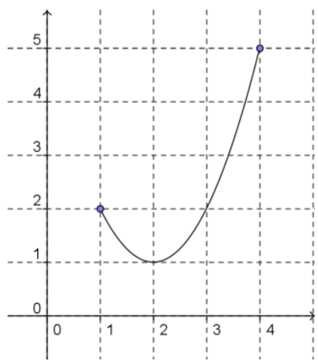
f est continue sur [– 3 ; 2]

f est positive sur [– 3 ; 2]

$$\int_{-3}^{2} f(x)\,dx = \int_{-3}^{-1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \frac{2\times 0,25}{2} + 3\times 0,25 = 0,25 + 0,75 = 1$$

Question 3 : Soit f est une fonction définie et continue sur [1 ; 4].

Réponder en justifiant : est-il « Vrai » ou « Faux » de dire que



s'il existe deux réels a et b tels que a < b et f(a) < f(b) alors f est strictement croissante sur [1 ; 4].

FAUX : ci-contre un contre exemple où a = 1 ; b = 4 donc a< b

f(a) =f(1)= 2 et f(b)=f(4)=5 donc f(a) < f(b)

Or f n'est pas strictement croissante sur [1 ; 4].