TES/Spé TL	Eléments de correction du D.N.S n°13 du 19 Mars 2013

Objectifs : *Utiliser une fonction comportant e^u*
Donner du sens à des informations et faire des liens (représentation graphique, étude mathématique,…)
Utiliser la loi normale centrée

Exercice 1 : *Tester une crème solaire* livre p 59 n° 101

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = 50xe^{-0,5x+1}$

1. a) Calculer les valeurs exactes de f(0), f(2), f(4) et f(7) éventuellement arrondies à 10^{-2} près.

$\mathbf{f(0)} = 50\times 0 \times e^{-0,5\times 0+1} = \mathbf{0}$

$\mathbf{f(2)} = 50\times 2 \times e^{-0,5\times 2+1} = 100e^{-1+1} = 100e^{0} = 100 \times 1 = \mathbf{100}$

$\mathbf{f(4)} = 50\times 4 \times e^{-0,5\times 4+1} = 200e^{-2+1} = \mathbf{200e^{-1}} = \mathbf{\dfrac{200}{e}} \approx \mathbf{73,58}$

$\mathbf{f(7)} = 50\times 7 \times e^{-0,5\times 7+1} = 350e^{-3,5+1} = \mathbf{350e^{-2,5}} = \dfrac{350}{e^{\frac{5}{2}}} = \dfrac{350}{\sqrt{e^5}} = \dfrac{350}{e^2\sqrt{e}} \approx \mathbf{28,73}$

b) Montrer que, pour tout nombre réel x, on a $f'(x) = (50 - 25x)\, e^{-0,5x+1}$

$f(x) = 50xe^{-0,5x+1}$ donc $f = uv$ et $f' = u'v + uv'$

avec $u(x) = 50x$ $\quad u'(x) = 50$

$v(x) = e^{-0,5x+1}$ $\quad v'(x) = -0,5e^{-0,5x+1}$

($v = e^w$ avec $w(x) = -0,5x+1$) **($v' = w'e^w$)**

On a donc pour tout réel x

$$f'(x) = 50\times e^{-0,5x+1} + (50x)\times(-0,5e^{-0,5x+1}) = 50e^{-0,5x+1} - 25xe^{-0,5x+1}$$

En conclusion, **pour tout nombre réel x, on a $f'(x) = (50 - 25x)\, e^{-0,5x+1}$**

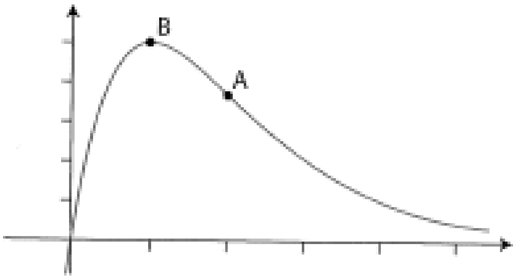
c) Dresser le tableau de variation de f

$50 - 25x = 0 \Leftrightarrow x = 2$
$50 - 25x = ax + b$ avec $a = -25$ $(a< 0)$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $(50 - 25x)$		+	0	–	
Signe de $e^{-0,5x+1}$		+		+	
Signe de $f'(x)$		+	0	–	
Variation de f		↗	100	↘	

2. <u>Expliquer comment l'étude de la fonction f permet de retrouver les unités utilisées sur chacun des axes</u>

Le maximum de f est égal à 100 et il est atteint pour x = 2 .
Or le point B est le point le plus haut de C_f donc B a pour coordonnées (2 ; 100)



On en déduit que :
l'axe des abscisses est gradué de 2 en 2 (une graduation correspond à 2 unités) et l'axe des ordonnées est gradué de 20 en 20 (une graduation correspond à 20 unités)

3. La fonction f correspond au taux d'hydratation de la peau mesuré, exprimé en pourcentage, pendant 7 heures.
   a) <u>Sur quel intervalle doit-on considérer f pour tester la qualité de cette crème ?</u>

   Comme le taux d'hydratation est mesuré pendant 7 heures, **on considère f sur [0 ;7]**

   b) <u>Quelle information donne le calcul de f(4) au laboratoire ?</u>

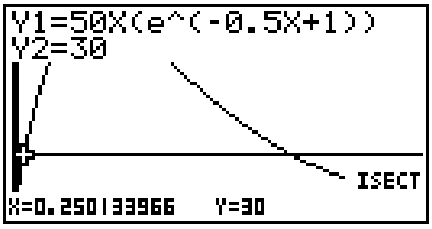
   f(4) ≈ 73,58
   donc **le taux d'hydratation de la peau après 4 heures d'exposition est d'environ 73,58%**

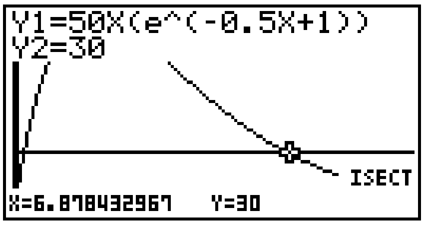
   c) <u>Indiquer le moment où le taux est maximal</u>

   D'après la question 1c), le maximum de f sur IR est atteint pour x = 2.
   Or 2 appartient à l'intervalle d'étude [0 ;7]
   donc on en déduit que
   le taux d'hydratation de la peau est maximal 2 heures après l'application de cette crème.

   d) <u>Graphiquement, déterminer les moments où le taux est égal à 30%</u>

   On doit donc résoudre f(x) = 30



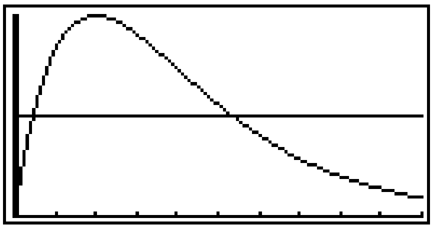


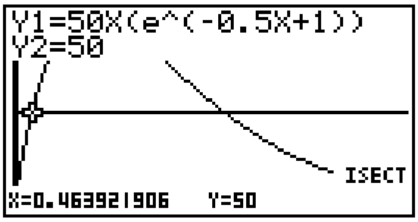
   On trouve $x \approx 0{,}25$ ou $x \approx 6{,}9$

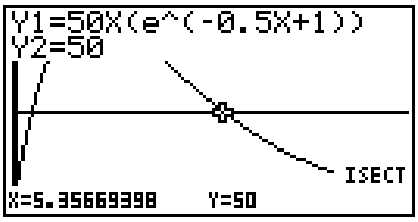
   Le taux d'hydratation de la peau est donc égal à 30% environ au bout d'un quart d'heure et au bout de 6 heures 54 min

4. On peut commercialiser cette crème si le taux d'hydratation dépasse 50% pendant une durée d'au moins 6 heures. Le laboratoire peut-il commercialiser cette crème ?

On cherche à résoudre f(x) > 50
Conjecturons une réponse avec la calculatrice







On trouve x compris entre 0,46 et 5,36
La différence entre 5,36 et 0,46 est de 4,9 donc la durée est inférieure à 6.
On ne peut donc pas commercialiser cette crème

<u>Exercice 2 :</u> ***Baguettes à commercialiser*** livre 206 n° 49

Une boulangerie industrielle fabrique des baguettes dont la masse théorique est 200g.
X est la variable aléatoire qui à une baguette associe sa masse en grammes.
On admet que la variable $Y = X - 200$ suit la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$
On prend une baguette au hasard dans la production.

a) La baguette doit avoir une masse supérieure à 199 g pour être commercialisable.
<u>Quelle est la probabilité qu'elle ne soit pas commercialisable ?</u>

On cherche $p(X \leq 199)$
Or $p(X \leq 199) = p(X - 200 \leq 199 - 200) = p(Y \leq -1)$

Y suit la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$
donc $p(Y \leq -1) = 0{,}5 - p((-1 \leq Y \leq 0)$
$\approx 0{,}5 - 0{,}3413447 \approx 0{,}159$

La probabilité que la baguette ne soit pas commercialisable est donc d'environ 0,159

b) <u>Quelle est la probabilité que la baguette ait une masse comprise entre 198,04 g et 201,96g ?</u>

On cherche donc $p(198{,}04 < X < 201{,}96)$
Or $p(198{,}04 < X < 201{,}96) = p(198{,}04 - 200 < X - 200 < 201{,}96 - 200)$
$= p(-1{,}96 < Y < 1{,}96)$

Or comme Y suit la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$, on sait que $p(-1{,}96 < Y < 1{,}96) \approx 0{,}95$

Donc en conclusion $p(198{,}04 < X < 201{,}96) \approx 0{,}95$

La probabilité que la baguette ait une masse comprise entre 198,04 g et 201,96g est d'environ 0,95