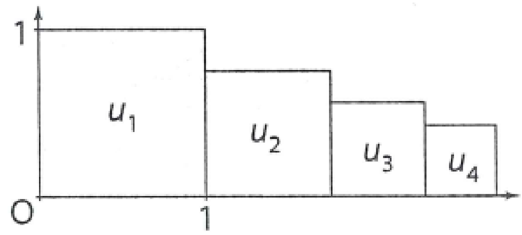
Exercice n°1 **(4 points)**

Dire pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.
Le côté du premier carré est égal à 1. A chaque étape, le côté du carré suivant est multiplié par $\frac{3}{4}$.
On note u_n l'aire du carré à l'étape n.



a) $u_2 = 0{,}5625$

Vraie car $u_2 = \left(1 \times \left(\frac{3}{4}\right)\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0{,}5625$

b) La suite u est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

Faux : u est géométrique de raison $\left(\frac{3}{4}\right)^2$.

Pour tout entier naturel n ≥ 1, $u_{n+1} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times u_n = \frac{9}{16} \times u_n$

c) Pour tout entier naturel n, n ≥1, on a $u_n = \left(\frac{9}{16}\right)^n$.

Faux, en fait $u_n = u_1 \times \left(\frac{9}{16}\right)^{n-1} = \left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}$

d) La somme des aires des 8 premiers carrés est égale à $\frac{16}{7}\left(1 - \left(\frac{9}{16}\right)^8\right)$.

Vraie car $u_1 + u_2 + \ldots + u_8 = u_1 \times \frac{1-\left(\frac{9}{16}\right)^8}{1-\frac{9}{16}}$

$= \frac{16}{7}\left(1 - \left(\frac{9}{16}\right)^8\right)$

Exercice n°2 **(9 points)**

1) La production annuelle d'une entreprise spécialisée dans la fabrication de phares de plongée augmente régulièrement d'une même quantité.

On note P_n la production de la n-ième année.

La production P_6 de la 6ème année est de 14 000 unités, et P_{10} est de 18 800 unités.

a) Quelle est la nature de la suite (P_n) ?

La production annuelle augmente régulièrement d'une même quantité donc la suite (P_n) est arithmétique.

b) Calculer P_1, ainsi que l'augmentation annuelle de la production.

Soit r l'augmentation annuelle de la production :

$P_{10} = P_6 + (10 - 6) \times r$
$18\,800 = 14\,000 + 4\,r$
$4\,800 = 4\,r$
$r = \frac{4\,800}{4}$
$\mathbf{r = 1\,200}$

$P_6 = P_1 + (6 - 1) \times r$
$14\,000 = P_1 + 5 \times 1\,200$
$P_1 = 14\,000 - 6\,000$
$\mathbf{P_1 = 8\,000}$

c) Si l'évolution de la production reste la même, au bout de combien d'années la production dépassera-t-elle le double de la production P_1 ?

Il s'agit de trouver n tel que : $P_n \geq 2\,P_1$

$P_n = P_1 + (n - 1) \times r = 8\,000 + 1\,200\,(n - 1)$ donc $8\,000 + 1\,200\,(n - 1) \geq 16\,000$

$1\,200\,n \geq 16\,000 - 8\,000 + 1\,200$

$n \geq \frac{9\,200}{1\,200}$

$n \geq \frac{23}{3}$

donc **la production dépassera le double de la production P_1 au bout de 8 années.**

2) Dans une seconde entreprise, la production de la 1ère année a été de 50 000 unités. La production augmente régulièrement de 10 % par an.

On note Q_n la production de la n-ième année.

a) Calculer Q_5.

La production augmente régulièrement de 10 % par an, donc $Q_{n+1} = Q_n \times (1 + \frac{10}{100}) = Q_n \times 1,1$

Par conséquent la suite (Q_n) est géométrique de raison 1,1 et de premier terme $Q_1 = 50\,000$.

$Q_5 = Q_1 \times 1,1^{5-1} = 50\,000 \times 1,1^4 = 50\,000 \times 1,4641$ **$Q_5 = 73\,205$**

b) Si l'évolution de la production reste la même, au bout de combien d'années la production annuelle dépassera-t-elle le double de la production Q_1 ?

$Q_n = Q_1 \times 1,1^{n-1} = 50\,000 \times 1,1^{n-1}$ donc on cherche n tel que : $Q_n \geq 2\,Q_1$

soit $50\,000 \times 1,1^{n-1} \geq 100\,000$

Avec la calculatrice, on obtient : $Q_8 = 97\,435$ et $Q_9 = 107\,179$

donc **la production dépassera le double de la production Q_1 au bout de 9 années.**

<u>Exercice n°3</u> **(7 points)**

Une compagnie pétrolière dispose d'une somme de 4,9 millions d'euros pour réaliser un forage en pleine mer. Le coût du forage est estimé de la façon suivante :

- cent mille euros pour les dix premiers mètres ;
- trois cent mille euros pour les dix mètres suivants ;
- cinq cent mille euros pour les dix mètres suivants et ainsi de suite, le coût de chaque dizaine de mètres augmentant de deux cent mille euros par rapport au coût précédent.

On pose $C_0 = 1$, $C_1 = 3$, $C_2 = 5$ et plus généralement, on note C_n le coût exprimé en centaines de milliers d'euros de la (n + 1)-ième dizaine de mètres creusés.

1) a) Quelle est nature de la suite (C_n) ?

Le coût de chaque dizaine de mètres augmente de deux cent mille euros par rapport au coût précédent, pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = C_n + 2$, donc **la suite (C_n) est arithmétique de raison 2.**

b) Pour tout entier naturel n, exprimer C_n en fonction de n.

$C_n = C_0 + n\,r$ donc **$C_n = 1 + 2n$**

2) a) Calculer $C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_{10}$. Que représente cette somme ?

$\mathbf{C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_{10}} = 11 \times \frac{C_0 + C_{10}}{2} = 11 \times \frac{1 + 1 + 2 \times 10}{2} = \mathbf{144}$

Cette somme représente le coût total, en centaines de milliers d'euros, soit 14,4 millions d'euros, pour creuser un forage de 110 mètres de profondeur.

b) Démontrer que pour entier naturel n, $C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_n = (n + 1)^2$.

$C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_n = (n + 1) \times \frac{C_0 + C_n}{2} = (n + 1) \times \frac{1 + 1 + 2\,n}{2} = (n + 1)^2$

c) En tenant compte des moyens financiers dont dispose la compagnie, calculer la profondeur maximale du puits de forage.

La compagnie dispose d'une somme de 4,9 millions d'euros, soit 49 centaines de milliers d'euros, donc il suffit de résoudre :

$C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_n \leq 49$

$(n + 1)^2 \leq 49$

$n^2 + 2\,n + 1 - 49 \leq 0$

$n^2 + 2\,n - 48 \leq 0$

$\Delta = 196$ $n_1 = \frac{-2 - 14}{2}$ $n_2 = \frac{-2 + 14}{2}$

$n_1 = -8$ $n_2 = 6$

Or n est un entier naturel et a > 0, donc le polynôme est négatif pour $0 \leq n \leq 6$.

La compagnie pourra donc creuser un puits de 70 mètres de profondeur au maximum.

Exercice n°4 **(2,5 points)**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux de normes respectives 1 et 2.
Démontrer que $(\vec{u} - \vec{v})^2 - (\vec{u} + 3\,\vec{v})^2 = -32$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 - (\vec{u} + 3\,\vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^{\,2} - (\vec{u}^{\,2} + 6\,\vec{u}\cdot\vec{v} + 9\,\vec{v}^{\,2})$$

$$= \vec{u}^{\,2} + \vec{v}^{\,2} - \vec{u}^{\,2} - 9\,\vec{v}^{\,2}$$ car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

$$= -8\,\|\vec{v}\|^2$$
$$= -8 \times 2^2$$
$$= -32$$

Exercice n°5 **(9,5 points)**

Dans un repère orthonormé, on considère les points A (– 4 ; 1), B (–1 ; 2) et C (1 ; – 4)

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-4+1\\1-2\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1+1\\-4-2\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$$

On en déduit que $\boldsymbol{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -3\times 2 + (-1)\times(-6) = 0}$

Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?

Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc orthogonaux et **le triangle ABC est rectangle en B.**

b) Déterminer la valeur approchée par défaut au degré près de la mesure de chacun des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BCA}$.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$$

donc $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$

Or $AB = \sqrt{(-1+4)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10}$ et $AC = \sqrt{(1+4)^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{50}$

De plus $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\times 5 + 1\times(-5) = 10$

D'où $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{10}{\sqrt{10}\times\sqrt{50}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

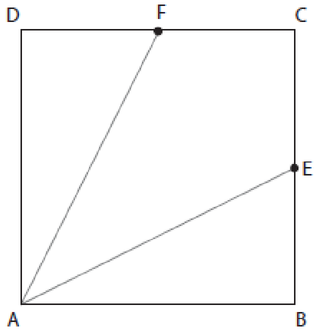
On en déduit que $\boldsymbol{\widehat{BAC} \approx 63°}$, puis que $\widehat{BCA} \approx 90 - 63$, donc $\boldsymbol{\widehat{BCA} \approx 27°}$

Exercice n°6 **(8 points)**

ABCD est un carré de côté a. E et F sont les milieux respectifs de [BC] et [CD].

Calculer $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ en décomposant $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$, puis en déduire l'angle $\widehat{EAF}$ au degré près.

(*On pensera à faire une figure*)



D'une part, $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE})\cdot(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF})$

$$= \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$$

$$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$= 0 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 + 0$$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux

$$= a^2$$

D'autre part, $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF} = AE \times AF \times \cos\widehat{EAF}$

Dans les triangles ABE et ADF, rectangles respectivement en B et en D, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AE^2 = AB^2 + BE^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4} \quad \text{et} \quad AF^2 = AD^2 + DF^2 = \frac{5a^2}{4}$$

Donc $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF} = \dfrac{5a^2}{4}\times\cos\widehat{EAF} = a^2$

Il en résulte que : $\cos\widehat{EAF} = a^2 \times \dfrac{4}{5a^2} = \dfrac{4}{5}$ donc $\boldsymbol{\widehat{EAF} \approx 37°}$