TES/Spé TL **Eléments de correction du D.N.S. n°5 du 3 Décembre 2013**

<u>*Objectifs :*</u> *Utiliser des exponentielles*
Donner du sens et mathématiser (graphique, énoncés)

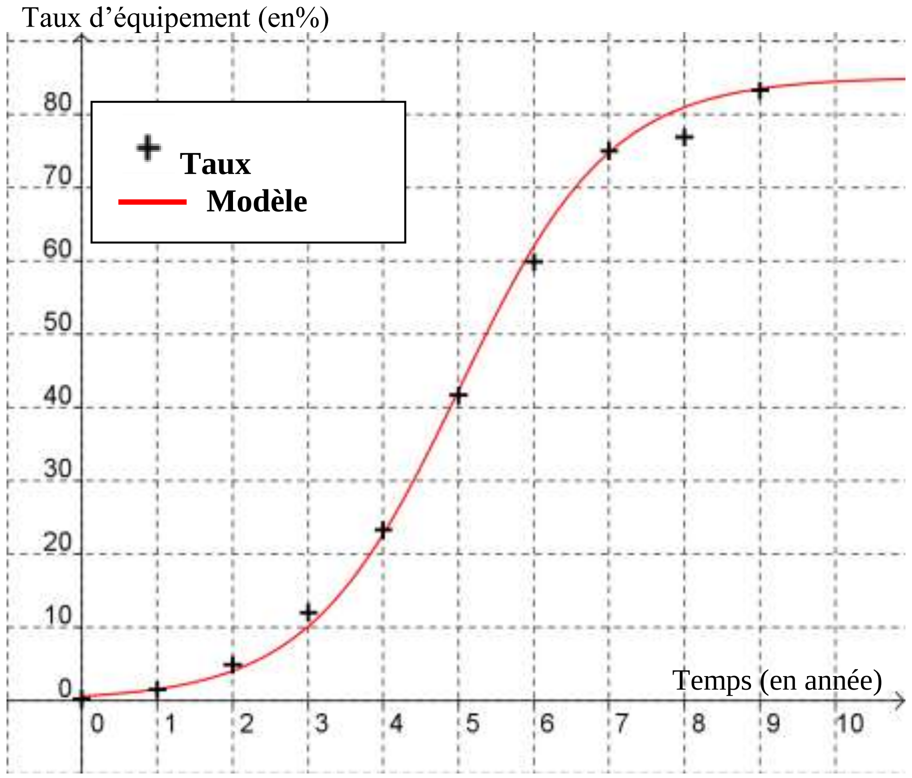
Taux d'équipement en lecteur de DVD (d'après une idée du Déclic TES)

Pour une étude, on s'est intéressé au taux d'équipement des ménages français en lecteur de DVD et on a trouvé des statistiques sur les années 1998 à 2007.

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Pourcentage	0,2	1,5	4,9	12,0	23,3	41,7	59,9	75,0	76,9	83,3

Sources : GIK–CNC/DEPS7

Au vu de ces données, une modélisation est proposée. Elle consiste à estimer, pour l'année 1998 + x, le taux d'équipement en lecteur DVD, en pourcentage, par : $f(x) = \dfrac{85\,e^x}{e^x + 150}$



1. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe. En déduire les variations de f.

$f(x) = \dfrac{85\,e^x}{e^x + 150}$ donc $f = \dfrac{u}{v}$ $\quad f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = 85\,e^x$ $\quad u'(x) = 85\,e^x$

$v(x) = e^x + 150$ $\quad v'(x) = e^x$

$$f'(x) = \frac{85\,e^x \times (e^x + 150) - e^x \times 85\,e^x}{(e^x + 150)^2} = \frac{85\,e^{2x} + 12750\,e^x - 85\,e^{2x}}{(e^x + 150)^2} = \mathbf{\frac{12750\,e^x}{(e^x + 150)^2}}$$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $12750\,e^x$	+
Signe de $(e^x + 150)^2$	+
Signe de $f'(x)$	+
Variation de f	$\dfrac{85}{151}$ ↗

2. En utilisant cette modélisation, estimer le taux d'équipement en lecteur DVD que l'on pouvait prévoir pour 2010, puis pour 2012.

f (x) est le taux d'équipement en lecteur DVD, en pourcentage, pour l'année 1998 + x.

Pour l'année 2010, nous devons donc calculer f (12) (car 2010 − 1998 = 12)

Or $f(12) = \dfrac{85\,e^{12}}{e^{12} + 150} \approx 84{,}92$

On peut prévoir, avec cette modélisation, que le taux d'équipement des ménages en lecteur DVD en 2010 est d'environ 84,92 %.

Pour l'année 2012, nous devons donc calculer f (14) (car 2012 − 1998 = 14)

Or $f(14) = \dfrac{85\,e^{14}}{e^{14} + 150} \approx 84{,}99$

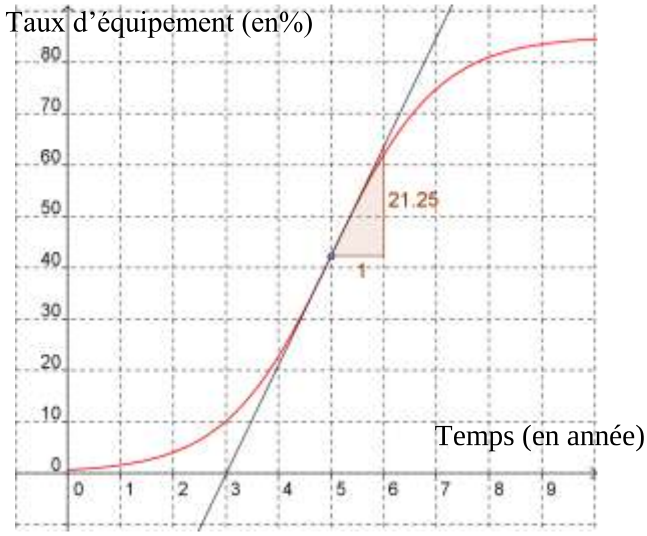
On peut prévoir, avec cette modélisation, que le taux d'équipement des ménages en lecteur DVD en 2012 est d'environ 84,99%.

3. Le rythme de croissance (instantané) du taux d'équipement est assimilé alors à la dérivée de f.
En utilisant le graphique, estimer en quelle année le rythme de croissance est maximal.

Il semble, en traçant les tangentes à la courbe de f, que celle qui a le coefficient directeur le plus important est la tangente à Cf au point d'abscisse 5.

Le rythme de croissance semble donc maximal en 2003.

Remarque : le point de Cf d'abscisse 5 semble être un point d'inflexion.



4. Selon ce modèle, peut-on estimer que le taux d'équipement des ménages en lecteur DVD atteindra 90% ? Si oui, en quelle année ?

On cherche la plus petite valeur de x telle que : $f(x) \geq 90$

$$\frac{85\,e^{x}}{e^{x} + 150} \geq 90$$

Comme $e^{x} + 150 > 0$, on a

$$85\,e^{x} \geq 90\,(e^{x} + 150)$$
$$85\,e^{x} \geq 90\,e^{x} + 13\,500$$
$$-5\,e^{x} \geq 13\,500$$
$$e^{x} \leq -\frac{13\,500}{5}$$
$$e^{x} \leq -2700$$

ce qui est faux car e^{x} est toujours strictement positif

En conclusion, le taux d'équipement des ménages ne pourra atteindre 90%.

5. Un scientifique qui travaille aussi sur cette étude fait remarquer que la courbe ressemble à la représentation graphique d'une fonction logistique.

Après recherche sur le Net, on trouve que les fonctions logistiques (créées par le mathématicien Pierre François Verhulst (vers 1840)) sont des fonctions définies par :

$x \mapsto \dfrac{k}{1 + ae^{-bx}}$ où k et b sont des réels positifs et a est un réel quelconque.

Montrer ici que, pour tout x de $[\,0\,;+\infty\,[$, $f(x) = \dfrac{85}{1 + 150e^{-x}}$

Première méthode :

Pour tout x de $[\,0\,;+\infty\,[$, $f(x) = \dfrac{85\,e^{x}}{e^{x} + 150} = \dfrac{e^{-x}(85\,e^{x})}{e^{-x}(e^{x} + 150)} = \dfrac{85}{1 + 150e^{-x}}$

Seconde méthode :

Pour tout x de $[\,0\,;+\infty\,[$, $\dfrac{85}{1 + 150e^{-x}} = \dfrac{85}{1 + 150 \times \dfrac{1}{e^{x}}} = \dfrac{85}{\dfrac{e^{x}}{e^{x}} + \dfrac{150}{e^{x}}} = \dfrac{85}{\dfrac{e^{x} + 150}{e^{x}}} = 85 \times \dfrac{e^{x}}{e^{x} + 150} = \dfrac{85\,e^{x}}{e^{x} + 150}$

Avis personnel sur cette modélisation :
Pensez-vous que le modèle choisi reste encore valable vu l'évolution de la technologie actuelle ? Expliquez.

Probabilité

Livre : page185 n° 54

Allergies alimentaires

Un enfant a choisi une compote parmi trois compotes appelées A, B et C.
Si nécessaire, les probabilités demandées seront arrondies au millième.

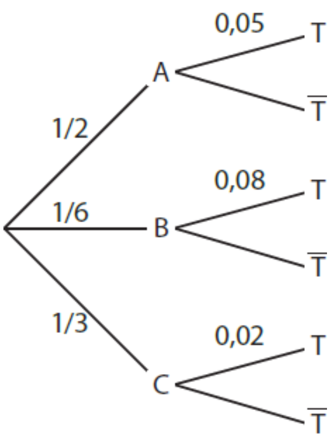
a) Il y avait trois pots A, un pot B et deux pots C à égale portée de l'enfant.
Quelle est la probabilité que l'enfant ait pris un pot A ?

La probabilité que l'enfant ait pris le pot A est $\frac{3}{6}$

donc $\frac{1}{2}$

b) Les compotes A, B et C peuvent éventuellement entraîner des allergies chez certains enfants, respectivement dans 5 % des cas, 8 % des cas, 2 % des cas. L'enfant présente des troubles révélateurs de ces allergies. Quelle est la probabilité qu'il ait pris un pot A ?

Soit : T « l'enfant présente des troubles ».
On cherche $p_T(A)$



$P_T(A) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)}$

Or $p(A \cap T) = p(A) \times p_A(T) = 0,5 \times 0,05 = 0,025$

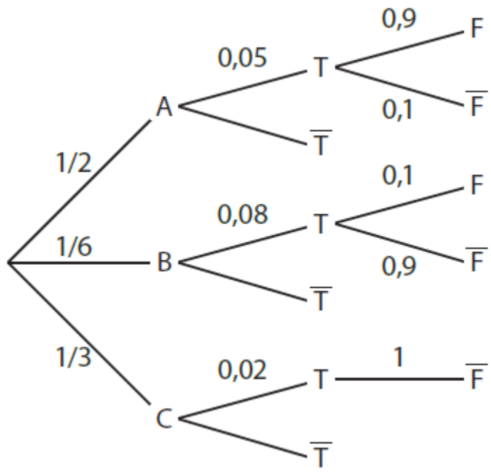
De plus A, B et C forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales on a :
$p(T) = p(A \cap T) + p(B \cap T) + p(C \cap T)$
$p(T) = p(A) \times p_A(T) + p(B) \times p_B(T) + p(C) \times p_C(T)$
$p(T) = 0,25 + \frac{1}{6} \times 0,08 + \frac{1}{3} \times 0,02$
$p(T) = 0,25 + \frac{0,04}{3} + \frac{0,02}{3} = 0,025 + \frac{0,06}{3} = 0,25 + 0,02$
$p(T) = 0,045$

$$p_T(A) = \frac{0,025}{0,045} = \frac{25}{45} = \frac{5}{9} \; (\approx 0,56)$$

La probabilité que l'enfant ait pris le pot A, sachant qu'il présente des troubles révélateurs d'allergies, est de $\frac{5}{9}$.

c) S'ils ont présenté des troubles révélateurs de ces allergies, les malades donnent au bout de quelques jours des signes de fièvre dans 90 % des cas pour A, 10 % pour B, et aucun cas pour C.
L'enfant a présenté des troubles révélateurs de l'allergie, mais n'a pas de signes de fièvre.
Quelle est alors la probabilité qu'il ait pris un pot A ?

$$P_{(T \cap \overline{F})}(A) = \frac{P(T \cap \overline{F} \cap A)}{P(T \cap \overline{F})}$$



D'après l'arbre :
$P(A \cap T \cap \overline{F}) = \frac{1}{2} \times 0,05 \times 0,1 = 0,002\,5$

$$P(T \cap \overline{F}) = P(A \cap T \cap \overline{F}) + P(B \cap T \cap \overline{F}) + P(C \cap T \cap \overline{F})$$
$$= \frac{0,05 \times 0,1}{2} + \frac{0,08 \times 0,9}{6} + \frac{0,02 \times 1}{3}$$
$$= \frac{31}{1500}$$

D'où $P_{(T \cap \overline{F})}(A) = \dfrac{0,0025}{\frac{31}{1500}} = \dfrac{15}{124} \; (\approx 0,12)$

La probabilité que l'enfant ait pris le pot A, sachant qu'il a présenté des troubles révélateurs de l'allergie mais pas de signes de fièvre, est de $\frac{15}{124}$.