2nde	Eléments de correction : **Evaluation n°2 de mathématiques**	**du 14/02/13**

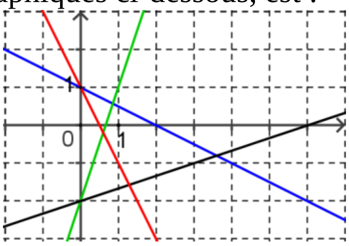
Le barème est donné sur 60 points

Le QCM et certains exercices sont à faire sur le sujet. Le reste est à rédiger sur une copie.

QCM : (5,5 points : 0,5 point par bonne réponse, <u>– 0,25 point par mauvaise réponse</u>, 0 si pas de réponse.)

Pour chaque ligne du tableau suivant, 3 réponses sont proposées, mais une seule est exacte.

Recopier la lettre correspondant à la réponse choisie dans la dernière colonne du tableau.

1. Si $-5 \leq x < 6$, alors :	a) $0 \leq x^2 \leq 25$	b) $25 \leq x^2 < 36$	c) $0 \leq x^2 < 36$	**c**
2. Soient a et b deux nombres réels négatifs tels que $a < b$ alors :	a) $a^2 > b^2$	b) $a^2 < b^2$	c) on ne peut pas répondre	**a**
3. L'ensemble S solution de l'inéquation $x^2 > 7$ est :	a) $]-\sqrt{7} ; \sqrt{7}[$	b) $]-\infty ; -\sqrt{7}[\cup]\sqrt{7} ; +\infty[$	c) $]49 ;+\infty[$	**b**
4. Voici le tableau de variations de la fonction f. x : -6, 1, 3, 5, 7 Variations de f : -4 ↗ 3 ↘ $-1,5$ ↗ 2 ↘ 1	a) f est croissante sur $[-1,5 ; 2]$	b) f est décroissante sur $[1 ; 3]$	c) f est croissante sur $[5 ; 7]$	**b**
	a) f (2) < f (2,5)	b) f (2) > f (2,5)	c) On ne peut pas comparer f (2) et f (2,5)	**b**
5. Parmi les trois fonctions affines proposées, celle qui **n'est pas** associée à une des représentations graphiques ci-dessous, est : 	a) $f(x) = 2x + 1$	b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$	c) $f(x) = 3x - 2$	**a**
6. f est la fonction affine définie sur IR par : $f(x) = \frac{x-2}{4}$	a) Le coefficient directeur est 1 et l'ordonnée à l'origine est $-\frac{1}{2}$	b) Le coefficient directeur est $\frac{1}{4}$ et l'ordonnée à l'origine est $-\frac{1}{2}$	c) Le coefficient directeur est $\frac{1}{4}$ et l'ordonnée à l'origine est -2	**b**
7. Dans un repère orthonormé, soient les points : E (– 3 ; 5) et F (4 ; 1) Le milieu M de [EF] a pour coordonnées :	a) (3,5 ; – 2)	b) (0,5 ; 3)	c) autre réponse	**b**
8. Dans un repère orthonormé, soient les points A (2 ; 7), B (4 ; 1) et C (– 5 ; – 2). La distance AB est égale à :	a) $\sqrt{32}$	b) 10	c) $\sqrt{40}$	**c**
9. Soient deux évènements A et B, tels que : p(A) = 0,3 p(B) = 0,5 p(A∩B) = 0,1	a) p(A∪B) = 0,8	b) p(A∪B) = 0,7	c) p(A∪B) = 0,9	**b**
	a) $p(A \cap \bar{B}) = 0,2$	b) $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,9$	c) $p(\bar{A}) = 0,5$	**a**

<u>Tableaux de signes :</u> (5 points) <u>Les deux questions de cet exercice sont indépendantes</u>

1) Dresser le tableau de signes de : $(2x + 4)(3 - x)$

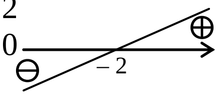
<u>Signe de $2x + 4$</u> :

$2x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = -2$

$a = 2$

$a > 0$



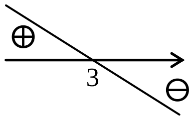
<u>Signe de $3 - x$</u> :

$3 - x = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 3$

$a = -1$

$a < 0$



x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
Signe de $2x + 4$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $3 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $(2x + 4)(3 - x)$		$-$	**0**	$+$	**0**	$-$	

2) (à faire sur le sujet)

Soit f une fonction dont on ne connaît que le tableau de signes de f (x), donné ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
Signe de f (x)		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les énoncés suivants sont-ils Vrai ou Faux ? ***On ne demande pas de justifier.***

a) Si $x \leq -2$, alors f $(x) > 0$: **Vrai**

b) Si f $(x) \geq 0$, alors $x \geq 2$: **Faux**

c) Si $0 \leq x \leq 2$, alors f $(x) \leq 0$: **Vrai**

<u>Tracé de courbe et résolution graphique</u> : (7,5 points) (à faire sur le sujet)

La représentation graphique ci-contre est celle d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

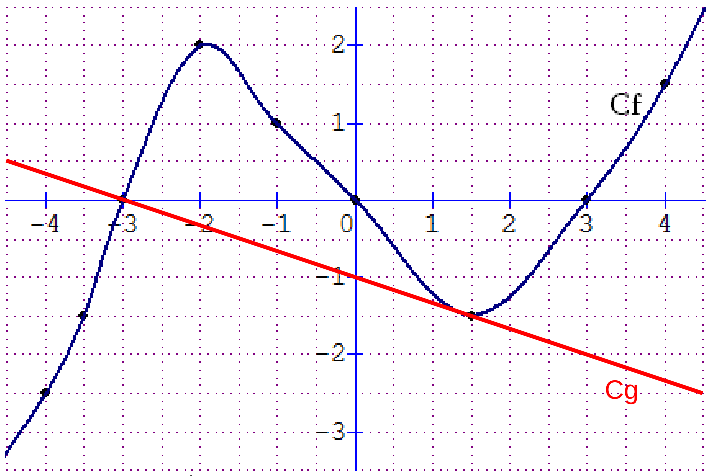
1. Résoudre graphiquement les équations et inéquations :

a) f $(x) = -\frac{3}{2}$: $\mathbf{S = \{-3,5\ ;\ 1,5\}}$

b) f $(x) \leq 0$: $\mathbf{S =]-\infty\ ;\ -3] \cup [0\ ;\ 3]}$

c) f $(x) > -\frac{5}{2}$: $\mathbf{S =]-4\ ;\ +\infty[}$

2. a) Tracer la représentation graphique de la fonction g définie par : $g(x) = -\frac{1}{3}x - 1$



b) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation f $(x) > -\frac{1}{3}x - 1$: $\mathbf{S =]-3\ ;\ 1,5[\cup]1,5\ ;\ +\infty[}$

<u>Probabilités</u> : (8 points) (à faire sur le sujet)

<u>Exercice 1</u>

Un traiteur prépare des gâteaux pour une réception. Il propose des tartelettes, des charlottes et des macarons, chacun pouvant être au chocolat ou à la framboise, leur répartition est donnée par le tableau ci-dessous.

	Chocolat	Framboise	Total
Tartelettes	48	72	120
Charlottes	25	75	100
Macarons	50	30	80
Total	123	177	300

Compléter la dernière colonne du tableau suivant :

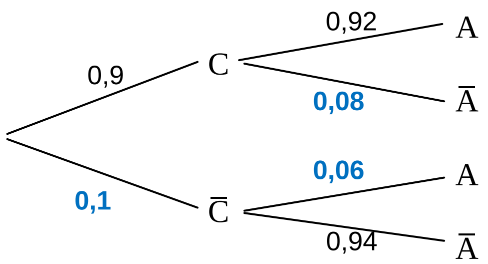
Un invité choisit un gâteau au hasard.	La probabilité que ce soit une tartelette est :	$\mathbf{\frac{120}{300} = \frac{2}{5} = 0,4}$
	La probabilité que ce soit un macaron à la framboise est :	$\mathbf{\frac{30}{300} = \frac{1}{10} = 0,1}$
	La probabilité que ce soit une charlotte au chocolat ou une tartelette à la framboise est :	$\mathbf{\frac{25 + 72}{300} = \frac{97}{300}}$
Un individu choisit un gâteau au chocolat.	La probabilité que ce soit un macaron est :	$\mathbf{\frac{50}{123}}$

Exercice 2

Une production en très grande série contient des pièces conformes et des pièces défectueuses.
Un contrôle de qualité accepte ou non les pièces produites.

1) On note : C l'événement : « la pièce tirée est conforme ».
A l'événement : « la pièce tirée est acceptée par le contrôle de qualité ».

a) Compléter l'arbre ci-dessous :



b) Compléter alors le texte ci-dessous, à l'aide de pourcentages :

Une production en très grande série contient **90 %** de pièces conformes et **10 %** de pièces défectueuses.
Un contrôle de qualité accepte les pièces conformes dans **92 %** des cas, et rejette les pièces défectueuses dans **94 %** des cas.

2) On tire une pièce au hasard dans la production après le contrôle de qualité.

a) Calculer la probabilité que la pièce tirée soit conforme et acceptée par le contrôle qualité.
(On commencera par écrire mathématiquement la probabilité demandée).

$p(C \cap A) = 0,9 \times 0,92 = 0,828$

La probabilité que la pièce tirée soit conforme et acceptée par le contrôle qualité est de 0,828

b) Calculer la probabilité que la pièce tirée ait subi une erreur de contrôle.

La pièce subit une erreur de contrôle, soit lorsqu'elle est conforme mais refusée, soit lorsqu'elle est défectueuse et acceptée :

$p(C \cap \bar{A}) + p(\bar{C} \cap A) = 0,9 \times 0,08 + 0,1 \times 0,06 = 0,072 + 0,006 = 0,078$

La probabilité que la pièce tirée ait subi une erreur de contrôle est de 0,078.

Utilisation de la calculatrice : (5 points) (à faire sur le sujet)

1) Dans le tableau suivant, compléter les cases **non grisées** à l'aide de l'algorithme de calcul donné.
La première ligne contiendra les formules tapées à la calculatrice.

Algorithme :

Choisir un nombre
Ajouter 3
Elever au carré
Retrancher 9
Retrancher 6 fois le nombre de départ

Liste 1	***Liste 1 + 3***	***(Liste 2)^2***	***Liste 3 – 9***	***Liste 4 – 6 × Liste 1***
x				
-4	**– 1**	**1**	**– 8**	**16**
-3	**0**	**0**	**– 9**	**9**
-2				**4**
-1				**1**
1				**1**
2				**4**
3				**9**
4				**16**
5				**25**

2) Quelle conjecture pouvez-vous faire sur le nombre obtenu ?

Il semble que le nombre obtenu soit toujours le carré du nombre de départ.

3) Démontrer cette conjecture.

Soit x le nombre de départ :
En ajoutant 3, on obtient : $x + 3$, puis en élevant au carré : $(x + 3)^2$
En retranchant 9, on a alors : $(x + 3)^2 – 9$, puis on retranche 6 fois le nombre de départ, soit $6x$, le nombre obtenu est donc : $(x + 3)^2 – 9 – 6x$

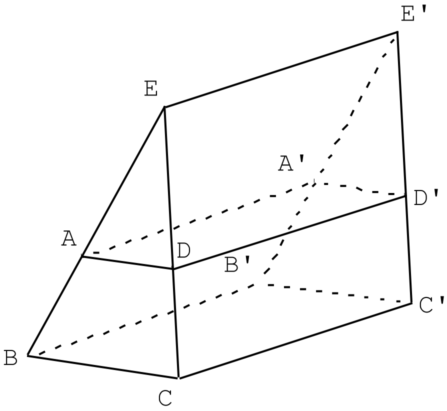
Or pour tout réel x, $(x + 3)^2 – 9 – 6x = x^2 + 6x + 9 – 9 – 6x = x^2$

Le nombre obtenu est donc bien toujours le carré du nombre de départ.

Géométrie dans l'espace : **(5,5 points)** (à faire sur le sujet)

Le solide EBCC'E'B', représenté ci-contre, est un prisme droit à base triangulaire.

Les points A, D, D' et A' appartiennent respectivement aux segments [BE], [CE], [C'E'], [B'E'], tel que le plan (ADD') soit parallèle au plan (BCC').



1) Mettre une croix dans les cases correspondantes aux bonne(s) réponse(s)

	sécants(es)	parallèles	strictement parallèles	confondus(es)	coplanaires	non coplanaires
la droite (A'D) et le plan (ADC) sont :	X					
Les droites (BB') et (DD') sont:		X	X		X	
les plans (EA'A) et (BE'B') sont :		X		X		
les droites (CE) et (B'E') sont :						X
les plans (EAD) et (E'B'C') sont :		X	X			
les plans (ADC') et (E'A'D') sont:	X					

2) Donner la position relative de la droite (B'C) et du plan (BCC') :

La droite (B'C) est incluse (ou contenue) dans le plan (BCC').

Logique : (4,5 points) (à faire sur le sujet)

Pour chacune des propositions ci-dessous :

- dire si elle est vraie ou fausse
- justifier votre réponse ***dans le cas où elle est fausse***

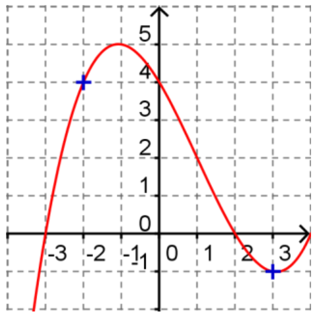
a) Soient a et b deux réels. Si le produit a × b est positif alors a et b sont tous deux positifs. **Faux**
Contre-exemple : $-5 \times (-2) = +10$

b) Soit a un réel. Si a > 2 alors a > 0 **Vrai**

c) Soient A et B deux points du plan. Si AB = AC alors A est le milieu de [BC]. **Faux**
Si AB = AC alors A appartient à la médiatrice de [BC]

d) Soit f une fonction définie sur l'intervalle [–2 ; 3].
Si f (–2) = 4 et f (3) = –1, alors f est décroissante sur [–2 ; 3]. **Faux**

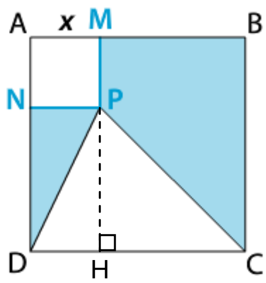
Contre-exemple : la fonction f représentée ci-contre est telle que f (–2) = 4 et f (3) = –1, mais elle n'est pas décroissante sur [–2 ; 3].



e) Deux droites de l'espace qui n'ont aucun point commun sont strictement parallèles. **Faux**
Elles peuvent être non coplanaires.

<u>Fonction et calculatrice</u> : (15 points)

Monsieur et Madame Dupont disposent d'un terrain carré de 30 m de côté, ABCD, dans lequel ils veulent aménager une piscine carrée, AMPN, et un massif triangulaire, DPC, comme le montre la figure ci-contre.



Madame Dupont voudrait avoir un massif le plus grand possible, et Monsieur Dupont veut, au contraire, avoir une piscine d'aire maximale.
Ils décident donc de créer la piscine et le massif d'aire égale.

On note x la longueur AM.

1. A quel ensemble appartient x ? $\quad x \in [0\,;30]$

2. Exprimer, en fonction de x, l'aire de la piscine que l'on note f (x), et l'aire du massif, que l'on note g (x).

$$f(x) = AM^2 = x^2$$

Soit H le pied de la hauteur issue de P du triangle DPC, DNPH est un rectangle, donc DN = PH

$$g(x) = \frac{DC \times PH}{2} = \frac{DC \times DN}{2}$$

Or $\quad DN = AD - AN = 30 - x$

d'où $\quad g(x) = \dfrac{30(30-x)}{2} = 450 - 15\,x$

<u>Autre méthode pour g (x)</u> :

$$g(x) = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{AMNP} - \mathcal{A}_{NDP} - \mathcal{A}_{MBCP}$$

$$g(x) = AB^2 - x^2 - \frac{NP \times ND}{2} - \frac{MB(MP + BC)}{2}$$

Or $\quad MB = AB - AM = 30 - x\,,\quad$ **d'où**

$$g(x) = 900 - x^2 - \frac{x(30-x)}{2} - \frac{(30-x)(x+30)}{2}$$

$$g(x) = 900 - x^2 - 15\,x + \frac{x^2}{2} - \frac{900}{2} + \frac{x^2}{2}$$

$$g(x) = 450 - 15\,x$$

3. <u>Partie 1 : Conjecture</u>

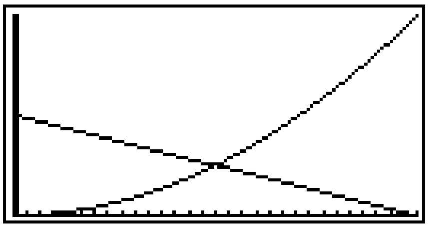
Conjecturer à l'aide de la calculatrice, la valeur de x, pour laquelle les aires de la piscine et du massif sont égales. *Vous indiquerez sur la copie les manipulations effectuées, les réglages utilisés et un dessin à main levée de ce qui est visualisé à l'écran.*

On trace les courbes représentatives respectives des fonctions : f et g, telles que :

$f(x) = x^2 \qquad$ **et** $\qquad g(x) = 450 - 15\,x$

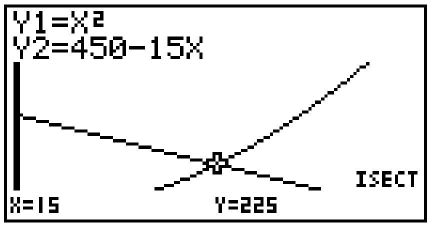
Fenêtre d'affichage : Xmin : 0
Xmax : 30

puis zoom auto



On utilise ensuite le solveur graphique :

G-SOLV ; ISCT



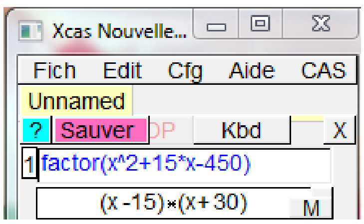
Il semble donc que les aires de la piscine et du massif soient égales pour $x = 15$.

<u>Partie 2 : Démonstration</u>

a) Montrer que pour résoudre le problème posé, il faut résoudre l'équation $\quad x^2 + 15\,x - 450 = 0$.

$$f(x) = g(x) \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 450 - 15x \quad \Longrightarrow \quad x^2 + 15x - 450 = 0$$

b) On utilisa alors un logiciel de calcul formel qui permet de factoriser l'expression $\quad x^2 + 15\,x - 450$.
Voici l'écran obtenu :



Vérifier que, pour tout x, $\quad x^2 + 15\,x - 450 = (x - 15)\,(x + 30)$

Pour tout x, $\;(x-15)(x+30) = x^2 + 30x - 15x - 450 = x^2 + 15\,x - 450$

c) Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 15\,x - 450 = 0$

$$x^2 + 15\,x - 450 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x-15)(x+30) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x - 15 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 30 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 15 \quad \text{ou} \quad x = -30$$
$$S = \{-30\,;15\}$$

d) Retrouve-t-on la conjecture émise précédemment ? Pourquoi ?

On ne retrouve pas la conjecture faite précédemment.
Ici on résout l'équation sur $\mathbb{R}$, alors que dans la partie conjecture, on cherche les solutions sur l'ensemble [0 ; 30] et – 30 n'appartient pas à [0 ; 30].

e) Quelle sera alors l'aire de la piscine et du massif ?

Les aires de la piscine et du massif sont donc égales pour $x = 15$.

$$f(x) = x^2 = 15^2 = 225$$

L'aire de la piscine (et du massif) est de 225 m².

Mise en équation : (4 points) (à faire sur la copie)

Voici deux énoncés de problèmes et quatre équations.

Problème 1 : Un âne porte 15 sacs de sel et 2 kg d'olives. Un mulet porte 2 sacs de sel et 40 kg d'olives. L'âne souffle fort ! « De quoi te plains-tu ? Nous portons la même charge ! » dit le mulet. Quelle est la masse x en kilogrammes d'un sac de sel ?

Problème 2 : Pour s'entraîner au marathon, Baptiste part faire un footing à la vitesse de 15 km/h. Son frère David veut le rejoindre en scooter. Il part 2 heures plus tard et roule à 40 km/h. Quel temps x en heures mettra-t-il pour le rattraper ?

Quatre équations :

(A) $40\,x - 15 = 12$ (C) $15\,(x + 2) = 40\,x$

(B) $15\,x + 2 = 2\,x + 40$ (D) $2\,x + 40 = 2\,(x + 15)$

Sans résoudre les problèmes, choisir parmi les quatre équations celle qui correspond au problème 1 et celle qui correspond au problème 2.

Pour le problème 2, faire figurer les traces de recherche sur la copie.

Toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

Problème 1 : Soit x la masse, en kilogrammes, d'un sac de sel :

Le mulet porte 2 sacs de sel et 40 kg d'olives, soit $(2\,x + 40)$ kg

L'âne porte 15 sacs de sel et 2 kg d'olives, soit $(15\,x + 2)$ kg

Tous deux portent la même charge, donc il s'agit de l'équation (B) : $15\,x + 2 = 2\,x + 40$

Problème 2 : Soit x le temps, en heures, que David mettra pour rattraper Baptiste :

David roule à 40 km/h, donc pendant x h, il parcourt $40\,x$ km

Baptiste court à la vitesse de 15 km/h, et il est parti 2 heures avant son frère, donc jusqu'à leur rencontre, il aura couru pendant $(x + 2)$ h, et aura donc parcouru la distance de $15\,(x + 2)$ km

Lors de leur rencontre, tous deux auront parcouru la même distance,

donc il s'agit de l'équation (C) : $15\,(x + 2) = 40\,x$