TES/Spé TL **Eléments de correction du D.N.S. n°7du 7 Janvier 2014**

<u>*Objectifs :*</u> *Utiliser des probabilités conditionnelles lorsque les informations données sont « moins directes »*
Donner du sens àun graphique et savoir l'utiliser pour notamment encadrer une intégrale.

<u>EXERCICE 1</u> :

Une résidence de vacances propose deux types d'appartements (studio et deux-pièces) à louer à la semaine. L'appartement doit être restitué parfaitement propre en fin de séjour.

Le locataire peut décider de le nettoyer lui-même ou peut choisir l'une des deux formules d'entretien suivantes : la formule Simple (nettoyage de l'appartement en fin de séjour par le personnel d'entretien) ou la formule Confort (nettoyage quotidien du logement durant la semaine et nettoyage complet en fin de séjour par le personnel d'entretien).

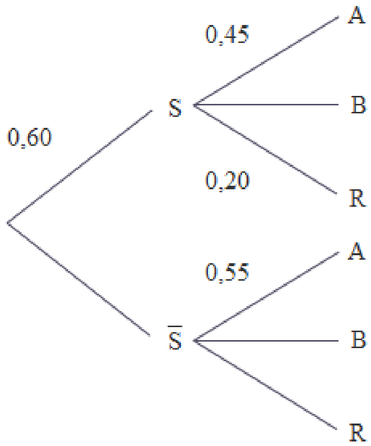
Le gestionnaire a constaté que :

- 60 % des locataires optent pour un studio et parmi ceux-ci 20 % ne souscrivent aucune formule d'entretien ;
- la formule Simple a beaucoup de succès : elle est choisie par 45 % des locataires de studio et par 55 % des locataires de deux-pièces ;
- 18 % des locataires ne souscrivent aucune formule.

On rencontre un résident au hasard.

Soient *S* : l'évènement « le résident a loué un studio » ;
A : l'évènement « le résident a souscrit la formule Simple » ;
B : l'évènement « le résident a souscrit la formule Confort » ;
R : l'évènement « le résident n'a souscrit aucune formule d'entretien ».

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.



2. a. Quelle est la probabilité que le résident ait loué un deux-pièces ?

Il n'y a que deux types d'appartements (studio et deux-pièces) à louer à la semaine, alors l'évènement « le résident a loué un deux-pièces » est l'évènement contraire de l'évènement « le résident a loué un studio ». On le note $\overline{S}$.

$$\begin{aligned} p(\overline{S}) &= 1 - p(S) \\ &= 1 - 0{,}60 \\ &= 0{,}40 \end{aligned}$$

La probabilité que le résident ait loué un deux-pièces est égale à 0,4.

b. Calculer $P_S(B)$.

L'arbre pondéré permet de calculer $p_S(B)$ en utilisant la règle des nœuds.

$$p_S(A) + p_S(B) + p_S(R) = 1$$

$$\begin{aligned} p_S(B) &= 1 - (p_S(A) + p_S(R)) \\ &= 1 - (0{,}45 + 0{,}20) \\ &= 0{,}35 \end{aligned}$$

On en conclut que : $P_S(B)$. = 0,35

3. **a.** Calculer $P(R \cap S)$; en déduire $P(R \cap \overline{S})$.

$$\begin{aligned} p(R \cap S) &= p_S(R) \times p(S) \\ &= 0{,}20 \times 0{,}60 \\ &= 0{,}12 \end{aligned}$$

Il n'y a que deux types d'appartements (studio et deux-pièces) à louer à la semaine.

Donc S et $\overline{S}$ forment une partition de l'univers donc :

d'après la formule des probabilités totales :

$$p(R) = p(R \cap S) + p(R \cap \overline{S})$$

Or 18 % des locataires ne souscrivent aucune formule. Soit $p(R) = 0{,}18$.

$$p(R \cap S) + p(R \cap \overline{S}) = 0{,}18$$

$$p(R \cap \overline{S}) = 0{,}18 - p(R \cap S) = 0{,}18 - 0{,}12 = 0{,}06$$

On a ainsi montré que : $p(R \cap S)$ **= 0,12 et** $p(R \cap \overline{S})$ **= 0,06**

b. Le résident a loué un deux-pièces. Montrer que la probabilité qu'il assure lui-même le nettoyage de son appartement est 0,15.

Il s'agit de déterminer la probabilité de l'évènement R sachant que l'évènement $\overline{S}$ est réalisé.

Or $p_{\overline{S}}(R) = \dfrac{p(R \cap \overline{S})}{p(\overline{S})}$

D'où $p_{\overline{S}}(R) = \dfrac{0{,}06}{0{,}40} = 0{,}15$

Le résident a loué un deux-pièces. On a montré que la probabilité qu'il assure lui-même le nettoyage de son appartement est 0,15.

4. Le gestionnaire affirme que près de la moitié des résidents choisissent la formule Simple. Présenter les calculs qui justifient son affirmation.

Comme dans la question précédente on utilise la formule des probabilités totales pour déterminer la probabilité de l'évènement A.

$$\begin{aligned} p(A) &= p(A \cap S) + p(A \cap \overline{S}) \\ &= p_S(A) \times p(S) + p_{\overline{S}}(A) \times p(\overline{S}) \\ &= 0{,}45 \times 0{,}60 + 0{,}55 \times 0{,}40 \\ &= 0{,}49 \end{aligned}$$

On en conclut que la probabilité que les résidents choisissent la formule Simple est égale à 0,49.
Donc près de la moitié des résidents choisissent la formule Simple.

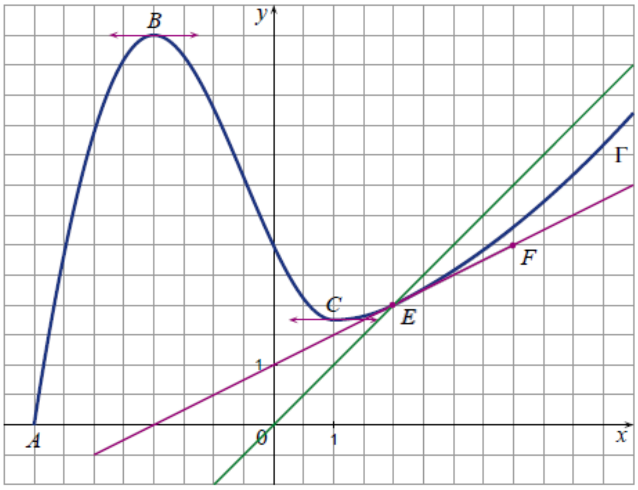
EXERCICE 2 :

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle [−4 ; 6]. On note f' sa fonction dérivée.

La courbe Γ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal est tracée ci-dessous ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.
La courbe Γ et la droite Δ se coupent au point E d'abscisse 2.

On sait par ailleurs que :

- la courbe Γ admet des tangentes parallèles à l'axe des abscisses aux points B (−2 ; 6,5) et C (1 ; 1,75),
- la droite (EF) est la tangente à la courbe Γ au point E et F est le point de coordonnées (4 ; 3).



1. Dans cette question, déterminer par lecture graphique et sans justification
   a) les valeurs de $f'(-2)$ et $f(-2)$

- $f'(-2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe Γ au point d'abscisse − 2. Or la tangente à la courbe Γ au point $B(-2; 6{,}5)$ est parallèle à l'axe des abscisses donc $f'(-2) = 0$.
- $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente (EF) à la courbe Γ au point E d'abscisse 2 donc

$$f'(2) = \frac{3-2}{4-2} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{f'(-2) = 0 \text{ et } f'(2) = 0{,}5}$

   b) les valeurs de x dans [− 4 ; 6] vérifiant $f'(x) \geq 0$

On cherche les abscisses des points de la courbe de f où la tangente a un coefficient directeur positif ou nul.

$\boxed{f'(x) \geqslant 0 \text{ pour tout réel } x \text{ dans } [-4; -2] \cup [1; 6]}$.

   c) les valeurs de x dans [− 4 ; 6] vérifiant $f(x) \leq x$.

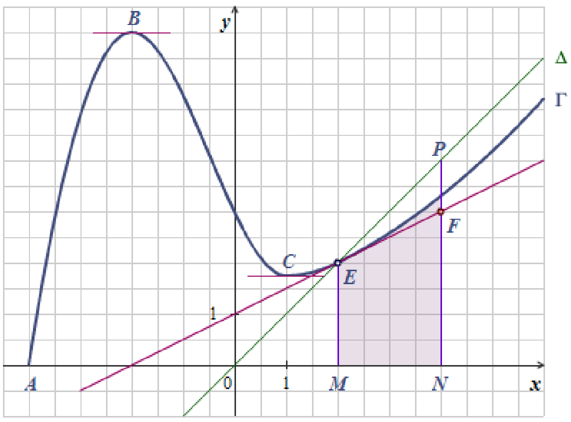
Graphiquement, les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant x$ sont les abscisses des points de la courbe Γ situés sous la droite Δ.

$\boxed{f(x) \leqslant x \text{ pour tout réel } x \text{ de l'intervalle } [2; 6]}$.

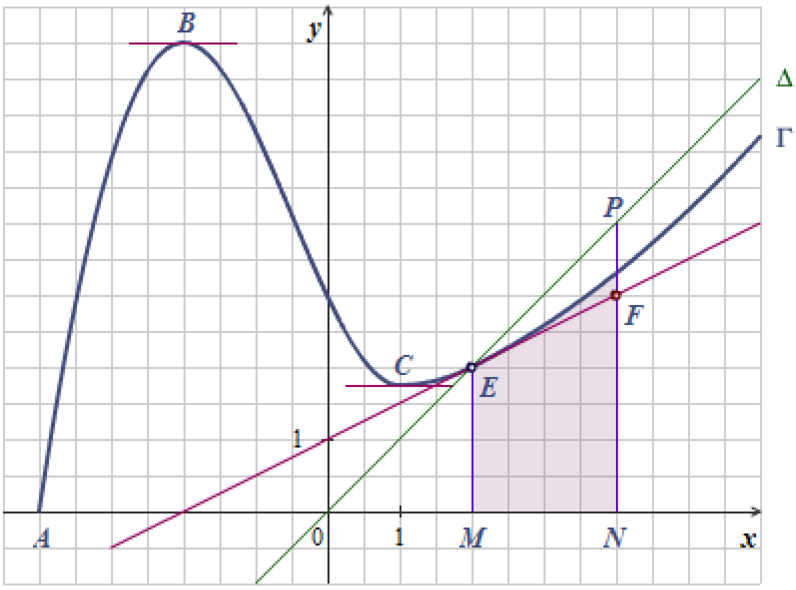
2. Encadrement d'une intégrale
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.
   a) Soit l'intégrale $I = \int_2^4 f(x)\,dx$. Interpréter graphiquement I.

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[-4; 6]$, donc f est continue sur cet intervalle. D'autre part, la courbe Γ est située au dessus de l'axe des abscisses, donc f est positive sur $[-4; 6]$.

L'intégrale $I = \int_2^4 f(x)\mathrm{d}\,x$ est l'aire exprimée en unité d'aire du domaine compris entre la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 4$.



b) Proposer un encadrement de l'intégrale I par deux nombres entiers consécutifs. Justifier.



Soient $M(2;\,0)$, $N(4;\,0)$ et $P(4;\,4)$ le point de la droite Δ d'abscisse 4.

L'aire du domaine compris entre la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 4$ est comprise entre l'aire du trapèze EMNF et celle du trapèze EMNP. Soit

$$\frac{(\mathrm{EM}+\mathrm{FN})\times\mathrm{MN}}{2} \leqslant \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}\,x \leqslant \frac{(\mathrm{EM}+\mathrm{PN})\times\mathrm{MN}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(2+3)\times 2}{2} \leqslant \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}\,x \leqslant \frac{(2+4)\times 2}{2}$$

Donc $5 \leqslant \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}\,x \leqslant 6$