1S — **Corrigé du D.S. de Mathématiques n°4** — Le 18 avril 2014

Le barème est donné à titre indicatif sur 30.

EXERCICE 1. (13 points)

Un laboratoire pharmaceutique fabrique un produit solide conditionné sous la forme d'un petit parallélépipède rectangle dont le volume est 72 mm cube.
On note y la hauteur et ses autres dimensions sont x et $2x$ (x et y sont en mm).

1. Exprimer y en fonction de x.

   $V(x) = L \times l \times h = 2x \times x \times y = 2x^2y$ donc $2x^2y = 72$

   On prend $x \neq 0$ pour ne pas avoir un parallélépipède rectangle aplati donc :

   $$\boldsymbol{y} = \frac{72}{2x^2} = \boldsymbol{\frac{36}{x^2}}$$

2. On note S(x) la surface totale, en mm^2, de ce parallélépipède rectangle en fonction de x.
   Montrez que $S(x) = \frac{216}{x} + 4x^2$

   $$\mathbf{S(x)} = 2(y \times 2x) + 2(x \times y) + 2(x \times 2x) = 4yx + 2yx + 4x^2 = 6yx + 4x^2 = 6x \times \frac{36}{x^2} + 4x^2 = \boldsymbol{\frac{216}{x} + 4x^2}$$

3. Montrez que $S'(x) = \frac{8(x-3)(x^2+3x+9)}{x^2}$

   S est définie et dérivable sur]0 ; 12].

   $$\mathbf{S'(x)} = -\frac{216}{x^2} + 8x = \frac{-216 + 8x^3}{x^2} = \boldsymbol{\frac{8(x^3-27)}{x^2}}$$

   or $\boldsymbol{(x-3)(x^2+3x+9)} = x^3 + 3x^2 + 9x - 3x^2 - 9x - 27 = \boldsymbol{x^3 - 27}$

   Donc $S'(x) = \frac{8(x-3)(x^2+3x+9)}{x^2}$.

4. Etudiez le sens de variation de S sur l'intervalle]0 ; 12] et déduisez-en la valeur des dimensions du parallélépipède pour lesquelles S(x) est minimale.

   On étudie le signe de $S'(x)$:

   - Signe de $x^2 + 3x + 9$: $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 9 = -27$
     $\Delta < 0$ et $a > 0$, donc le polynôme $x^2 + 3x + 9$ est strictement positif.
   - Signe de $8(x-3)$: $8(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$
   - Signe de x^2 : $x^2 > 0$ pour tout x appartenant à]0 ; 12].

x	0		3		12
Signe de $8(x-3)$		–	0	+	
Signe de $x^2 + 3x + 9$		+		+	
Signe de x^2		+		+	
Signe de $S'(x)$		–	0	+	
Variations de S		↘	108	↗	594

D'après le tableau de variations de S, l'aire S(x) est minimale pour $x = 3$, donc

les dimensions du parallélépipède sont : 3 mm, 6 mm et 4mm.

EXERCICE 2. (10 points)

1. Le nombre d'abonnés d'un journal A était de 50 000 en 2005. Chaque année ce journal compte 2 500 abonnés de plus. On note u_n le nombre d'abonnés de l'année (2005 + n).

a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

Chaque année ce journal compte 2 500 abonnés de plus, donc

$$\mathbf{u_{n+1} = u_n + 2\,500}$$

b) En déduire la nature de la suite (u_n) puis exprimer u_n en fonction de n.

La suite (u_n) est arithmétique de raison a = 2 500 et de premier terme u_0 = 50 000.

On a donc : $u_n = u_0 + n \times a$ $\qquad$ $\mathbf{u_n = 50\,000 + 2\,500\, n}$

c) Quel sera le nombre d'abonnés de ce journal en 2015 ?

2015 = 2005 + 10

$u_{10} = u_0 + 10 \times a = 50\,000 + 10 \times 2\,500$ $\qquad$ $\mathbf{u_{10} = 75\,000}$

En 2015 ce journal aura 75 000 abonnés.

2. Pour le journal B, les affaires sont moins florissantes et il perd 2,4% de ses abonnés chaque année. En 2005, il comptait 100 000 abonnés. Soit v_n le nombre d'abonnés de l'année (2005 + n).

a) Combien y-avait-il d'abonnés en 2006 ?

$v_1 = 100\,000\,(1 - \frac{2,4}{100}) = 100\,000 \times 0,976$ $\qquad$ $\mathbf{v_1 = 97\,600}$

En 2006 ce journal avait 97 600 abonnés.

b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .

Ce journal perd 2,4% de ses abonnés chaque année, donc

$$\mathbf{v_{n+1} = v_n \times 0,976}$$

c) En déduire la nature de la suite (v_n) puis exprimer v_n en fonction de n.

La suite (v_n) est géométrique de raison b = 0,976 et de premier terme v_0 = 100 000.

On a donc : $v_n = v_0 \times b^n$ $\qquad$ $\mathbf{v_n = 100\,000 \times 0,976^{\,n}}$

3. Au bout de combien d'années le nombre d'abonnés du journal A aura-t-il dépassé celui du journal B ? Justifier.

Il s'agit de déterminer la valeur de n pour laquelle on aura :

$$u_n > v_n$$

Soit : $50\,000 + 2\,500\, n > 100\,000 \times 0,976^{\,n}$

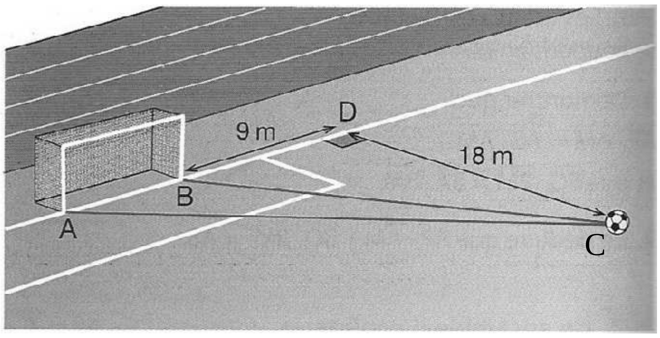
A l'aide de la table de la calculatrice, on obtient :

$u_{10} = 75\,000$ et $v_{10} \approx 78\,432$ $\qquad$ soit $u_{10} < v_{10}$

$u_{11} = 77\,500$ et $v_{11} \approx 76\,550$ $\qquad$ soit $u_{11} > v_{11}$

Par conséquent, le nombre d'abonnés du journal A aura dépassé celui du journal B la 11$^{\text{ème}}$ année, soit en 2016.

EXERCICE 3. (7 points)



Sur la figure ci-contre, $\widehat{ADC}$ est un angle droit,
BD = 9 mètres et DC = 18 mètres.

La largeur des buts est 7,32 mètres.

1. Calculer les longueurs AC et BC.

Dans le triangle ACD rectangle en D,

$AC^2 = AD^2 + DC^2$ (théorème de Pythagore)

$AC^2 = (9 + 7{,}32)^2 + 18^2$

$AC^2 = 590{,}3424$

$\mathbf{AC = \sqrt{590{,}3424}}$

Dans le triangle BCD rectangle en D,

$BC^2 = BD^2 + DC^2$ (théorème de Pythagore)

$BC^2 = 9^2 + 18^2$

$BC^2 = 405$

$\mathbf{BC = \sqrt{405} = 9\sqrt{5}}$

2. En déduire une valeur approchée, à 0,01° près, de l'angle de tir $\widehat{ACB}$.

Dans le triangle ABC,

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos \widehat{ACB}$ (Théorème d'Al Kashi)

$7{,}32^2 = 590{,}3424 + 405 - 2 \times \sqrt{590{,}3424} \times 9\sqrt{5} \times \cos \widehat{ACB}$

$18 \times \sqrt{2\,951{,}712} \times \cos \widehat{ACB} = 995{,}3424 - 53{,}5824$

$\cos \widehat{ACB} = \dfrac{941{,}76}{18 \times \sqrt{2\,951{,}712}}$

d'où $\widehat{ACB} \approx 15{,}63°$