TES/TL spé math **Corrigé du D.S. n°5 du Vendredi 23 Mai 2014** **1h15min**

Le barème, à titre indicatif, est noté sur 25 sans document, calculatrice autorisée

Exercice 1. Fluctuation d'échantillonnage (4,5 points)

Un fournisseur d'accès Internet (FAI) affirme que, sur sa hotline, seuls 20% des clients attendent plus de 5 minutes pour obtenir un interlocuteur.

Une association de consommateurs, ayant reçu de nombreuses doléances de la part de ses adhérents, décide de faire une enquête et interroge au hasard 200 personnes ayant eu à s'adresser à la hotline de ce FAI. 53 d'entre elles ont dû attendre plus de 5 minutes.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence au seuil de 95% adapté à cette situation.

$n = 200$ et $p = \frac{20}{100} = 0{,}2$ donc $\boldsymbol{n > 30}$

$np = 200 \times 0{,}2 = 40$ et $n(1 - p) = 200 \times 0{,}8 = 160$ donc $\boldsymbol{np > 5}$ **et** $\boldsymbol{n(1 - p) > 5}$

Toutes les conditions sont donc réunies afin de pouvoir utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence au seuil de 95%.

L'intervalle adapté à cette situation est :

$$I = \left[0{,}2 - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}2(1-0{,}2)}}{\sqrt{200}} \; ; 0{,}2 + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}2(1-0{,}2)}}{\sqrt{200}}\right]$$

I = [0,145 ; 0,255] en arrondissant au millième.

2. Le résultat de l'enquête permet-il de mettre en doute l'affirmation de ce fournisseur d'accès à Internet ? Argumenter.

Soit *f* la fréquence observée dans cet échantillon de 200 personnes.

$$\boldsymbol{f = \frac{53}{200} = 0{,}265}$$

f **n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %, *f* est supérieure à la borne supérieure de l'intervalle I, donc on peut rejeter l'hypothèse selon laquelle seuls 20% des clients attendent plus de 5 minutes pour obtenir un interlocuteur, avec un risque d'erreur de 5%.**

Exercice 2. Suites (6,5 points) ***Nouvelle Calédonie : Novembre 2013***

Le premier janvier 2014, Monica ouvre un livret d'épargne sur lequel elle dépose 6000 euros.

Elle décide de verser 900 euros sur ce livret chaque premier janvier à partir de 2015 jusqu'à atteindre le plafond autorisé de 19 125 euros.

On suppose dans tout cet exercice que le taux de rémunération du livret reste fixé à 2,25 % par an et que les intérêts sont versés sur le livret le premier janvier de chaque année.

Première Partie

On note M_n le montant en euros disponible sur le livret le premier janvier de l'année (2014 + n). On a donc $M_0 = 6\,000$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = 1{,}0225M_n + 900$.

Chaque année, le montant disponible augmente de 2,25 %, auxquels il faut ajouter le versement de 900 €.

Donc pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = M_n \times (1 + \frac{2{,}25}{100}) + 900$

Soit $M_{n+1} = 1{,}0225M_n + 900$

Deuxième partie

Monica souhaite savoir en quelle année le montant de son livret atteindra le plafond de 19 125 euros.

On considère la suite (G_n), définie pour tout entier naturel n, par $G_n = M_n + 40\,000$.

a) Montrer que la suite (G_n) est une suite géométrique de raison 1,0225. On précisera son premier terme.

Pour tout entier n, $G_n = M_n + 40\,000$ donc $M_n = G_n - 40\,000$

<u>1ère méthode</u> :

$G_{n+1} = M_{n+1} + 40\,000$

$G_{n+1} = 1{,}0225M_n + 900 + 40\,000$

$G_{n+1} = 1{,}0225M_n + 40\,900$

$G_{n+1} = 1{,}0225\,(M_n + 40\,000)$

$G_{n+1} = 1{,}0225\,G_n$

<u>2ème méthode</u> :

$G_{n+1} = M_{n+1} + 40\,000$

$G_{n+1} = 1{,}0225M_n + 900 + 40\,000$

$G_{n+1} = 1{,}0225M_n + 40\,900$

$G_{n+1} = 1{,}0225(G_n - 40\,000) + 40\,900$

$G_{n+1} = 1{,}0225G_n - 40\,900 + 40\,900$

$G_{n+1} = 1{,}0225\,G_n$

Pour tout entier n, $\mathbf{G_{n+1} = 1{,}0225G_n}$ donc (G_n) est une suite géométrique de raison 1,0225.

$G_0 = M_0 + 40\,000 = 6\,000 + 40\,000$ d'où $\mathbf{G_0 = 46\,000}$

b) Donner l'expression de G_n en fonction de n.

Pour tout entier n, $\mathbf{G_n = 46\,000 \times 1{,}0225^n}$

c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $M_n = 46\,000 \times 1{,}0225^n - 40\,000$.

Pour tout entier n, $G_n = M_n + 40\,000$

D'où $M_n + 40\,000 = 46\,000 \times 1{,}0225^n$

On en déduit que, pour tout entier n, $M_n = 46\,000 \times 1{,}0225^n - 40\,000$

d) Déduire de l'expression de M_n l'année à partir de laquelle le plafond de 19 125 euros sera atteint.

On cherche le plus petit entier n tel que $M_n \geq 19\,125$. Soit :

$$46\,000 \times 1{,}0225^n - 40\,000 \geq 19\,125 \Leftrightarrow 46\,000 \times 1{,}0225^n \geq 59125$$

$$\Leftrightarrow 1{,}0225^n \geq \frac{59125}{46000}$$

$$\Leftrightarrow 1{,}0225^n \geq \frac{473}{368} \qquad 1{,}0225^n > 0 \text{ et } \frac{473}{368} > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(1{,}0225^n) \geq \ln\left(\frac{473}{368}\right) \qquad \text{et la fonction logarithme est croissante}$$

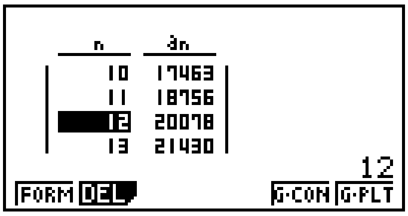
$$\Leftrightarrow n\ln(1{,}0225) \geq \ln\left(\frac{473}{368}\right)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{473}{368}\right)}{\ln(1{,}0225)} \qquad \ln(1{,}0225) > 0$$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{473}{368}\right)}{\ln(1{,}0225)} \approx 11{,}3$ par conséquent, le plus petit entier n pour lequel $M_n \geq 19\,125$ est 12.

Le plafond de 19 125 euros sera atteint pendant l'année 2026.

<u>Autre méthode à l'aide de la table de valeurs de la calculatrice</u> :



$1{,}0225 > 1$, donc la suite $(1{,}0225^n)$ est croissante
et $46\,000 > 0$, donc la suite (G_n) est croissante.

On en déduit que la suite (M_n) est également croissante.

Or $M_{11} \approx 18\,756$ et $M_{12} \approx 20\,078$,
donc le plus petit entier n pour lequel $M_n \geq 19\,125$ est 12.

Le plafond de 19 125 euros sera atteint pendant l'année 2026.

Exercice 3. **Valeur moyenne sur un intervalle** (4,5 points) ***Amérique du Sud 2011***

On suppose que la quantité de substance présente dans le sang, en milligrammes, à l'instant t (t exprimé en heures) est donnée par f (t) pour t variant de 0 à 12, tel que : $f(t) = 10e^{-0,15t}$.

1. Déterminer une primitive F de f sur [0 ; 12].

1ère méthode : Pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 12], posons : $u(t) = -0,15t$ d'où, $u'(t) = -0,15$.

Par conséquent, $f = \dfrac{10}{-0,15} \times u'e^u = -\dfrac{200}{3} \times u'e^u$

donc une primitive de f est de la forme $F = -\dfrac{200}{3} \times e^u$

2ème méthode : $F(t) = 10 \times \dfrac{e^{-0,15t}}{-0,15}$ $\boldsymbol{F(t) = -\dfrac{200}{3}\, e^{-0,15t}}$

2. Soit $I = \int_0^{10} f(t)\,dt$.

Calculer la valeur exacte de I, puis en donner une valeur approchée au centième près.

$I = [F(t)]_0^{10} = F(10) - F(0) = -\dfrac{200}{3}\, e^{-0,15 \times 10} + \dfrac{200}{3}\, e^0$ $\boldsymbol{I = \dfrac{200}{3}\,(1 - e^{-1,5})}$ Soit $\boldsymbol{I \approx 51,79}$

3. En déduire, à un dixième de milligramme près, la quantité moyenne de substance médicamenteuse présente dans le sang pendant les 10 heures qui suivent l'injection.

La quantité moyenne m de substance médicamenteuse présente dans le sang pendant les 10 heures qui suivent l'injection est :

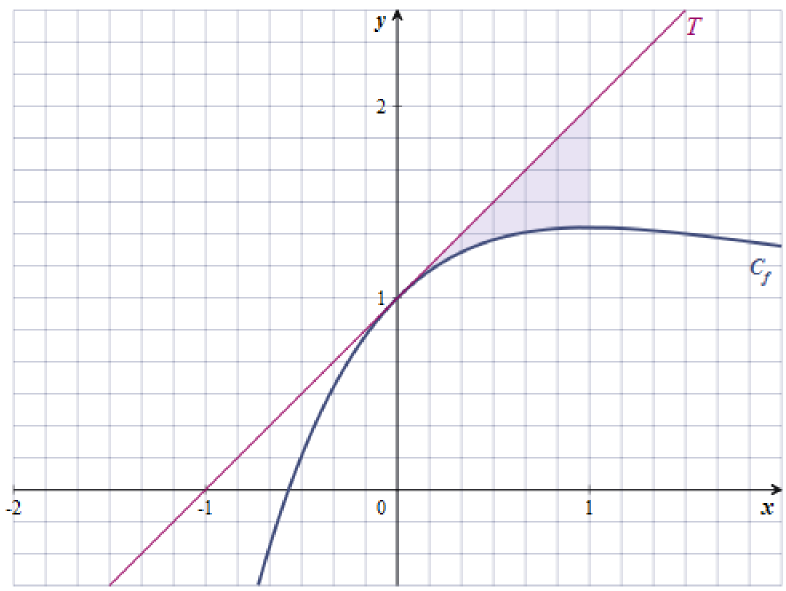
$$m = \frac{1}{10}\int_0^{10} f(t)dt = \frac{1}{10}I \qquad \boldsymbol{m = \frac{20}{3}\,(1 - e^{-1,5}) \approx 5,179}$$

La quantité moyenne de substance médicamenteuse présente dans le sang pendant les 10 heures qui suivent l'injection est de 5,2 mg environ.

Exercice 4. ***Calculs d'aires*** (6,5 points) ***Amérique du Sud 2013***

On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x} + 1$.

On a tracé ci-dessous C_f, la courbe représentative de la fonction f, et la tangente T à C_f au point d'abscisse zéro dans un repère orthonormé.



1. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=e^{-x}(-1-x)+x$.

Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x,

$$\boldsymbol{F'(x)} = -e^{-x} \times (-1-x) + e^{-x} \times (-1) + 1 = \boldsymbol{xe^{-x} + 1}$$

Ainsi, pour tout réel x, $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$ donc F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. **a)** Calculer $\int_0^1 f(x)dx$ puis interpréter ce résultat.

$$I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = e^{-1}(-1-1) + 1 - (e^0(-1-0)+0) = -2e^{-1} + 2$$

$$\boldsymbol{I = 2 - \frac{2}{e}}$$

Sur l'intervalle [0 ; 1], la fonction f est continue et positive, donc **l'intégrale I est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.**

b) Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine colorié, compris entre la courbe Cf, la tangente T et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ puis donner le résultat arrondi à 10^{-3} près.

Sur l'intervalle [0 ; 1], la courbe C_f est située entièrement en dessous de sa tangente T d'où l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe C_f, la tangente T et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est :

$$\int_0^1 [(x+1) - f(x)]\mathrm{d}x = \int_0^1 (x+1)\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 - I = \frac{1}{2} + 1 - (2 - \frac{2}{e}) = \frac{2}{e} - \frac{1}{2}$$

L'aire du domaine colorié est égale à $\left(\frac{2}{e} - \frac{1}{2}\right)$ unités d'aire. Soit arrondie au millième près, 0,236 unités d'aire.

Exercice 5. (3 points) ***QCM***

Pour chacune des questions suivantes, ***une seule des réponses proposées est exacte****.*
Il s'agit de la trouver et ***d'entourer la réponse correspondante.*** *Il n'est demandé aucune justification.*

1. Soit f une fonction définie et dérivable sur [0 ; +∞ [telle que, pour tout réel x strictement positif, $\frac{1}{x} < f(x) < \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$. On peut alors affirmer que :

$$\int_{e^{-1}}^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x < \int_{e^{-1}}^1 f(x)\mathrm{d}x < \int_{e^{-1}}^1 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x \text{ donc } \ln(1) - \ln(e^{-1}) < \int_{e^{-1}}^1 f(x)\mathrm{d}x < \ln(1) - \frac{1}{1} - (\ln(e^{-1}) - \frac{1}{e^{-1}})$$

$$\text{d'où} \quad 0 - (-1) < \int_{e^{-1}}^1 f(x)\mathrm{d}x < 0 - 1 - (-1) + e$$

$\boxed{\textbf{Réponse A: } 1 < \int_{e^{-1}}^1 f(x)\mathrm{d}x < e}$ **Réponse B:** $\frac{1}{e} < \int_{e^{-1}}^1 f(x)dx < \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2}$ **Réponse C:** $e < \int_{e^{-1}}^1 f(x)dx < e + e^{-1}$

2. On donne le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$	-2	↗	0	↗	2	↘	1

On peut affirmer que :

Sur [−2 ; 0], $f(x) < 0$ donc $\int_{-2}^0 f(x)\mathrm{d}x < 0$ et sur [2 ; 4], $f(x) > 0$ donc $\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x > 0$

Réponse A: $\int_{-2}^0 f(x)dx > 0$ $\boxed{\textbf{Réponse B: } \int_2^4 f(x)\mathrm{d}x > 0}$ **Réponse C:** $\int_5^3 f(x)dx > 0$