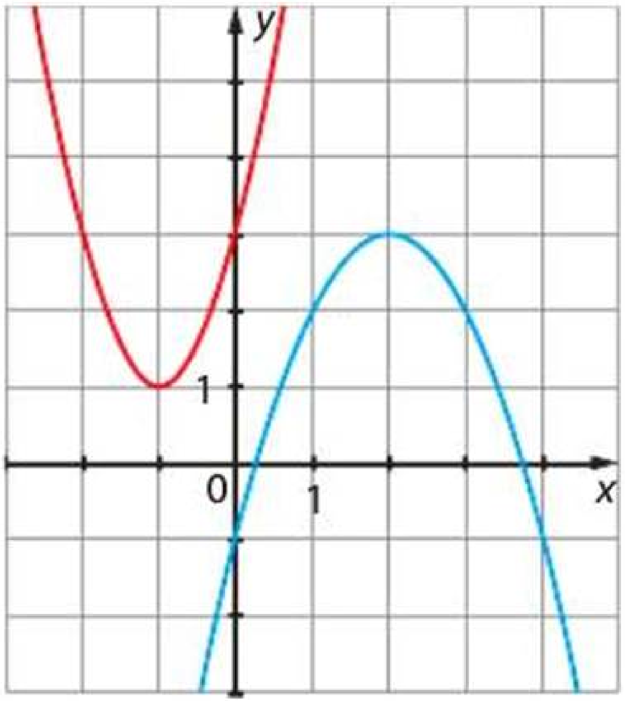
1S — **Corrigé du DNS 3 de Mathématiques** — **du mercredi 08 octobre 2014**

Exercice 112 p22

Chacune des deux paraboles ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré.



Déterminer l'expression de chacune de ces fonctions.

courbe rouge : Soit la fonction f de forme $a(x-\alpha)^2+\beta$

on remarque graphiquement que $x_s = \alpha = -1$

$y_s = \beta = 1$

donc $f(x) = a(x+1)^2+1$

or $f(0) = 3$

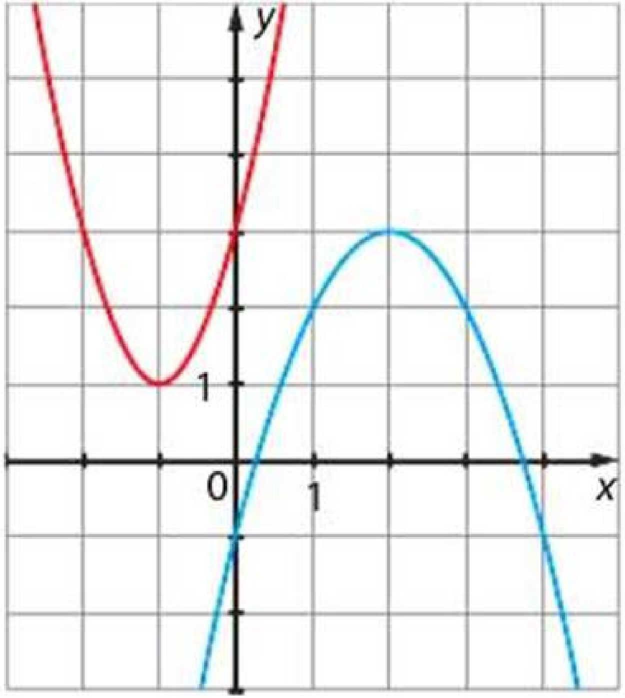
donc $a(0+1)^2+1 = 3$

$a+1 = 3$

$a = 2$

$f(x) = 2(x+1)^2+1$

$\boxed{= 2x^2+4x+3}$



courbe bleue : Soit la fonction g de forme $a(x-\alpha)^2+\beta$

on remarque graphiquement que $x_s = \alpha = 2$

$y_s = \beta = 3$

donc $g(x) = a(x-2)^2 + 3$

or $g(0) = -1$

donc $a(0-2)^2 + 3 = -1$

$4a + 3 = -1$

$4a = -4$

$a = -1$

donc $g(x) = -1(x-2)^2 + 3$

$= -1(x^2 - 4x + 4) + 3$

$\boxed{= -x^2 + 4x - 1}$

Exercice 164 p29

Sur la figure ci-dessous, l'unité est le carreau.

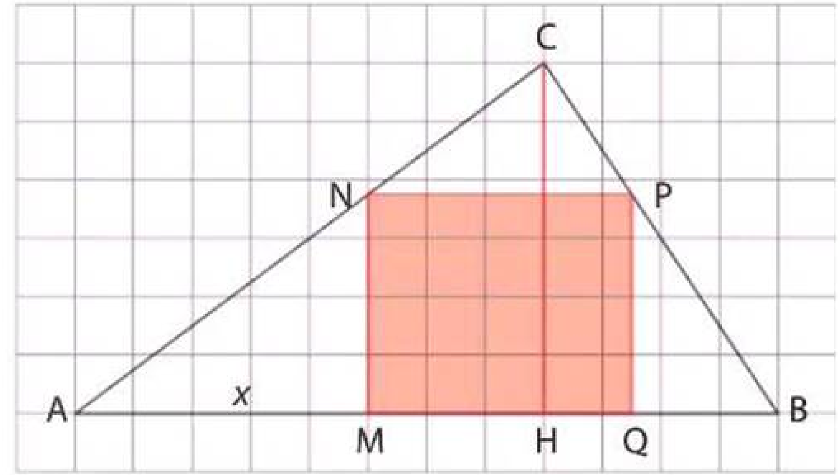
H est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

On a donc : $AB = 12$, $AH = 8$, $BH = 4$ et $CH = 6$.

À tout point M du segment [AH], on associe le rectangle MNPQ.

On pose $AM = x$, où x est un réel compris entre 0 et 8.

1. a. À l'aide du théorème de Thalès, montrer que $MN = \frac{6x}{8}$.



Dans le triangle ACH, $(HC) \perp (AH)$ et MNPQ est un rectangle donc $(MN) \perp (AH)$.

D'où $(MN) // (HC)$

Comme $M \in [AH]$ et $N \in [AC]$, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AM}{AH} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{HC} \quad \text{soit} \quad \frac{x}{AH} = \frac{MN}{HC}$$

donc $\frac{x}{8} = \frac{MN}{6}$.

On en déduit que : $MN = \frac{6x}{8} = \frac{3x}{4}$.

b. De la même façon, montrer que $QB = \frac{x}{2}$.

De même dans le triangle BHC,

$(HC) // (QP)$; $Q \in [BH]$ et $P \in [BC]$,

donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BQ}{BH} = \frac{BP}{BC} = \frac{QP}{HC} \quad \text{soit} \quad \frac{BQ}{4} = \frac{QP}{6}$$

Or dans le rectangle MNPQ, $QP = MN = \frac{3x}{4}$

D'où : $\underline{BQ =} \frac{4 \times \frac{3x}{4}}{6} = \frac{3x}{6} = \underline{\frac{x}{2}}$

c. En déduire MQ en fonction de x.

Les points M et Q appartiennent à [AB],

donc $AB = AM + MQ + QB$.

d'où $MQ = AB - AM - QB$

$MQ = 12 - x - \frac{x}{2}$

$\underline{MQ = 12 - \frac{3x}{2}}$

2. On note $S(x)$ l'aire du rectangle MNPQ en fonction de x.

a. Vérifier que $S(x) = \frac{3}{4}x\left(12 - \frac{3x}{2}\right)$.

$S(x) = MN \times MQ = \frac{3}{4}x\left(12 - \frac{3x}{2}\right)$ d'après 1a. et 1c.

b. Pour quelle valeur de x l'aire $S(x)$ de MNPQ est-elle maximale ?

$S(x) = \frac{3x}{4} \times 12 - \frac{3x}{4} \times \frac{3x}{2} = 9x - \frac{9x^2}{8}$

S est une fonction polynôme du second degré, avec

$a = \frac{-9}{8}$, $b = 9$ et $c = 0$.

Comme $a < 0$, la fonction S est d'abord croissante puis décroissante.

Son maximum est donc atteint pour

$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-9}{2 \times \frac{-9}{8}} = 4$

(et ce maximum est : $f(\alpha) = \frac{-9}{8} \times 4^2 + 9 \times 4$

$f(\alpha) = -18 + 36 = 18$.)

L'aire de MNPQ est donc maximale lorsque

$AM = 4$.