2nde	**Eléments de correction de l'évaluation n°1 du 13/10/2014**
	Durée : 2h ***Calculatrice autorisée.***

Le barème est donné à titre indicatif sur 40

Le recto de cette feuille et le repère au verso sont à faire sur cet énoncé. Tout le reste est à rédiger sur copie.

<u>QCM :</u>***(9 points : 0,75 point par bonne réponse, aucun point n'est enlevé par mauvaise réponse.)***

Pour chaque ligne du tableau suivant, 4 réponses sont proposées, mais une seule est exacte.

Recopier la lettre correspondant à la réponse choisie dans la dernière colonne du tableau.

1. Si x = – 2 alors – 2 x² + 5 est égal à :

a) – 13	***b)*** 13	***c)*** – 3	***d)***autre réponse	***c***

2. Soit une fonction f définie sur ℝ. On sait que f(3) = 4. Cela signifie que :

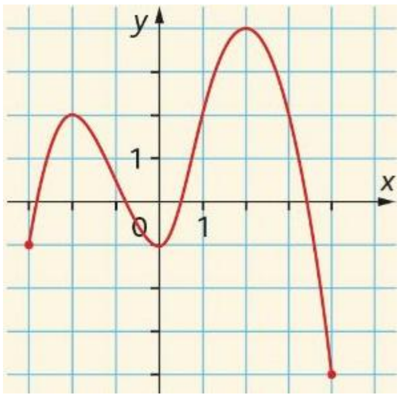
a) 3 est l'image de 4 par f	***b)*** 3 est l'antécédent de 4 par f	***c)*** le point de coordonnées (4 ; 3) appartient à la courbe représentative de f	***d)*** le point de coordonnées (3 ; 4) appartient à la courbe représentative de f	***d***

3. On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction *f*.

x	– 4		– 1		3		5
Variations de *f*	2	↗	3	↘	– 2	↗	1

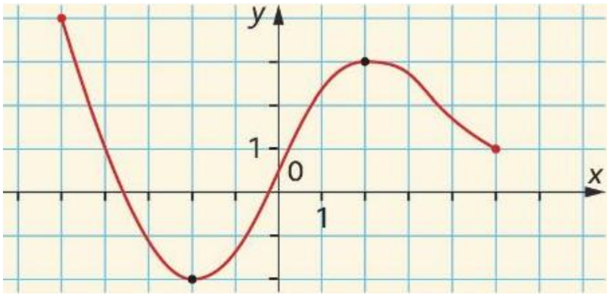
L'ensemble de définition de f est :	***a)***[– 2 ; 3]	***b)*** [– 4 ; 5]	***c)*** [1 ; 2]	***d)*** {1 ; 2}	***b***
L'image de – 3 par f est :	***a)***strictement positive	***b)*** strictement négative	***c)***égale à zéro	***d)*** n'existe pas	***a***

4. La courbe ci-contre représente une fonction f dans un repère du plan.



Le nombre de solutions de l'équation f(x) =1 est :	***a)*** 1	***b)*** 2	***c)*** 3	***d)*** 4	***d***
Les antécédents de 2 par *f* sont :	***a)*** 4	***b)*** 2	***c)*** – 2 ; 1 ; 3	***d)*** – 2 ; 1	***c***
D'après la courbe, on observe que :	***a)*** f(3) < f(–3)	***b)*** f(3) et f(–3) sont opposés	***c)*** f(4) < f(3)	***d)*** f(2) < f(3)	***c***

5. La courbe ci-contre représente la fonction f.



Le maximum de f sur son ensemble de définition est :	***a)*** 3	***b)*** 2	***c)*** 4	***d)*** –5	*c*
Le tableau de variations de la fonction f est :	***a)*** x : 4, −2, 3, 1 ; f : −5 ↘ −2 ↗ 2 ↘ 5	***b)*** x : −5, −2, 3, 5 ; f : 4 ↘ −2 ↗ 2 ↘ 1	***c)*** x : 4, −2, 2, 5 ; f : −5 ↘ −2 ↗ 3 ↘ 1	***d)*** x : −5, −2, 2, 5 ; f : 4 ↘ −2 ↗ 3 ↘ 1	*d*
Si x > – 1 alors :	***a)*** f(x) est négatif	***b)*** f(x) est positif	***c)*** f(x) > f(– 1,5)	***d)*** f(x) < 3	*c*

6. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : f (x) = 2 x – 3

L'image de 4 par f est :	***a)*** 2	***b)*** –3	***c)*** 5	***d)*** 3,5	*c*
Un antécédent de –3 par f est :	***a)*** 0	***b)*** – 9	***c)*** $\frac{1}{2}$	***d)*** 1	*a*

<u>Statistiques</u> *(2,5 points)* *VRAI ou FAUX*

Une étude statistique portant sur les tailles, en mètres, des élèves d'une classe de 30 élèves de Seconde a donné les résultats suivants :

- Minimum : 1,5 m
- Moyenne : 1,70m
- Médiane : 1,72m
- Premier quartile : 1,65m
- Troisième quartile : 1,80m
- Maximum : 1,90m

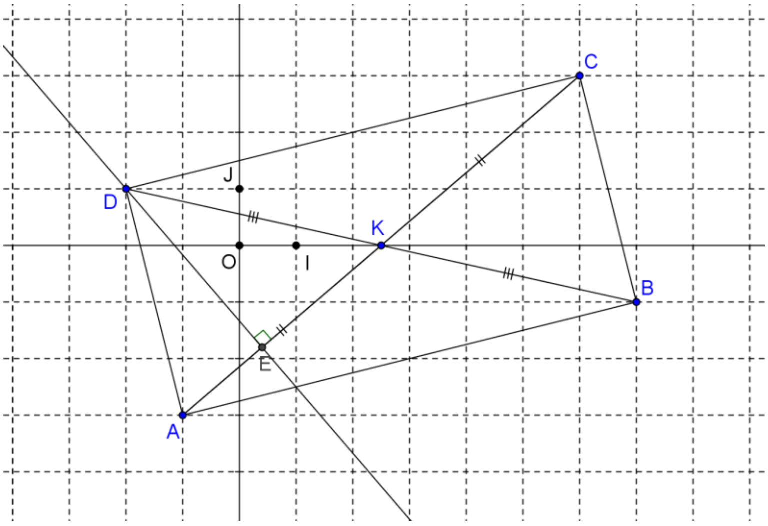
Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse ou si on ne peut pas savoir.

Affirmations	**Vrai** ou **Faux** ou **On ne peut pas savoir**
a) Un seul élève mesure 1,90m	**On ne peut pas savoir** (au moins 1 élève mesure 1,90m)
b) La somme de toutes les tailles des élèves vaut 51 mètres.	**Vrai** (moyenne × nombre d'élèves = 51)
c) Il y a à peu près autant d'élèves qui ont une taille inférieure ou égale à 1,72m que d'élèves qui ont une taille supérieure ou égale à 1,72m	**Vrai** C'est la notion de médiane
d) 30% des élèves ont une taille inférieure ou égale à 1,63m	**Faux** (Q1 = 1,65m donc environ 25% des élèves ont une taille inférieure ou égale à 1,65m. De plus, 1,63 < 1.65)
e) Environ les trois quarts des élèves ont une taille inférieure ou égale à 1,80m	**Vrai** (Q3 = 1,80m)

Géométrie analytique *(12 points)*

Dans un plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère les points suivants:

A (–1 ; –3), B (7 ; –1) et C (6 ; 3).



1) Placer les points A, B et C dans le repère ci-contre.

On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.

2) On admet que AB = $\sqrt{68}$ et BC = $\sqrt{17}$.

Calculer AC, puis en déduire la nature du triangle ABC.

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$

$AC = \sqrt{(6 - (-1))^2 + (3 - (-3))^2}$

$AC = \sqrt{(6 + 1)^2 + (3 + 3)^2}$

$AC = \sqrt{7^2 + 6^2}$

$AC = \sqrt{49 + 36}$

$\mathbf{AC = \sqrt{85}}$

Dans le triangle ABC, [AC] est le plus grand côté.

D'une part, $AB^2 + BC^2 = 68 + 17 = 85$

D'autre part, $AC^2 = 85$ Donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, **le triangle ABC est rectangle en B.**

3) Calculer les coordonnées du milieu K de [AC].

$K\left(\frac{x_A + x_C}{2} ; \frac{y_A + y_C}{2}\right)$ $K\left(\frac{-1 + 6}{2} ; \frac{-3 + 3}{2}\right)$ $K\left(\frac{5}{2} ; \frac{0}{2}\right)$ **K (2,5 ; 0)**

4) Placer le point D, symétrique de B par rapport à K.

Démontrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.

D'après la question précédente, K est le milieu de [AC].

Comme D est symétrique de B par rapport à K, K est aussi le milieu de [BD].

Le quadrilatère ABCD a donc **ses diagonales qui se coupent en leur milieu K** ; par conséquent, **ABCD est un parallélogramme**.

De plus, d'après la question 2, le triangle ABC est rectangle en B.

Le parallélogramme **ABCD a donc un angle droit** ; par conséquent, **ABCD est un rectangle**.

5) Calculer l'aire du rectangle ABCD et en déduire que l'aire du triangle ACD est égale à 17.

$\text{Aire}_{ABCD} = AB \times BC = \sqrt{68} \times \sqrt{17} = \sqrt{1\,156} = \mathbf{34}$

$\text{Aire}_{ACD} = \frac{1}{2}\,\text{Aire}_{ABCD} = \frac{1}{2} \times 34 = 17$

6) La droite perpendiculaire à (AC) passant par D, coupe (AC) en E.

En vous servant de l'aire de ACD, déterminer la longueur DE.

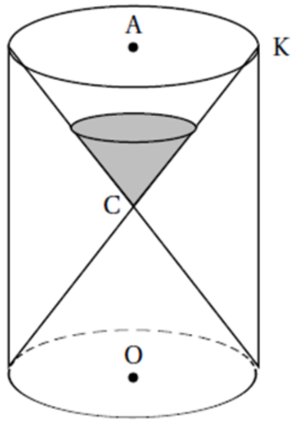
$\text{Aire}_{ACD} = \frac{AC \times DE}{2}$

$17 = \frac{\sqrt{85} \times DE}{2}$

$34 = \sqrt{85} \times DE$ donc $\mathbf{DE = \frac{34}{\sqrt{85}} = \frac{2\sqrt{85}}{5}}$

Géométrie dans l'espace *(5 points)*

On considère un sablier composé de deux cônes identiques de même sommet C et dont le rayon de la base est AK qui vaut 1,5cm.
Pour le protéger, il est enfermé dans un cylindre de hauteur 6cm et de même base que les deux cônes.
On note V le volume en cm^3 du cylindre et V_1 volume en cm^3 du sablier.



a) Montrer que la valeur exacte de V est 13,5π.
$V = \pi R^2 \times h = \pi \times 1{,}5^2 \times 6 = 13{,}5\pi$

b) Montrer que la valeur exacte de V_1 est 4,5π.
$V_1 = 2 \times$ volume d'un cône $= 2 \times \frac{1}{3} \times \pi R^2 \times CA = \frac{2}{3} \times \pi\, 1{,}5^2 \times 3 = 4{,}5\pi$

c) Quelle fraction du volume du cylindre le volume du sablier occupe-t-il ? *(on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible).*
$V_1 = k \times V$
$4{,}5\pi = k \times 13{,}5\pi$
$k = \frac{4{,}5\pi}{13{,}5\pi} = \frac{4{,}5}{13{,}5} = \mathbf{\frac{1}{3}}$

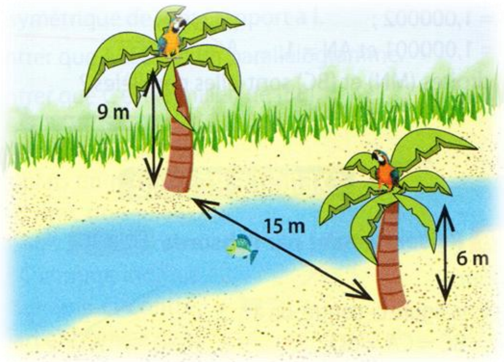
d) On a mis 6 cm^3 de sable dans le sablier. Sachant que le sable s'écoule d'un cône à l'autre avec un débit de 120cm^3 par heure, quel temps sera mesuré par ce sablier ?
$120cm^3 \leftrightarrow$ 60minutes (1heure)
$6\ cm^3 \leftrightarrow$? minutes

$\frac{6 \times 60}{120} = 3$ Ce sablier mesurera **3 minutes**.

BONUS Recherche.

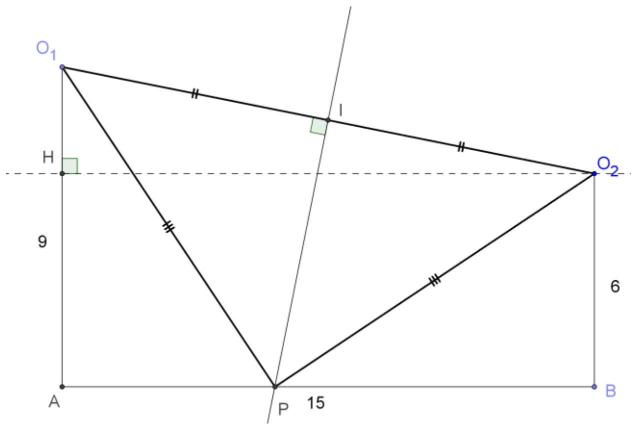
Pour cet exercice, nous attendons, sur votre copie, toute votre recherche, l'évolution de celle-ci, même si elle n'aboutit pas.
Toute trace cohérente sera notée positivement

Sur chaque rive d'un fleuve se trouve un palmier. Leurs pieds sont distants de 15 mètres, le premier a une hauteur de 9 mètres et le second une hauteur de 6 mètres.
A la cime de chaque arbre se trouve un oiseau. Brusquement, ces deux oiseaux aperçoivent un poisson à la surface du fleuve (position alignée avec les pieds des deux arbres). Ils se jettent sur lui à la même vitesse et l'atteignent au même moment.
A quelle distance du grand palmier se trouve le poisson ?



On note P le poisson, O_1 l'oiseau au sommet du grand arbre, O_2 l'oiseau au sommet du petit arbre, A le pied du grand palmier et B le pied du petit palmier.
Le but de cet exercice est de trouver la position du point P.

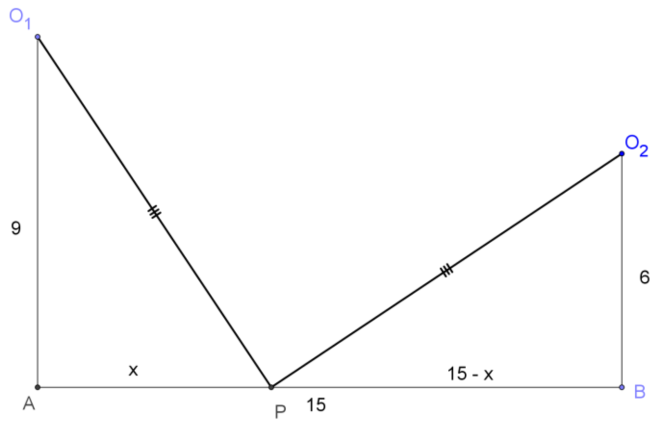
Recherche géométrique :
Comme les oiseaux volent à la même vitesse et atteignent le poisson au même moment, cela signifie qu'ils sont à égale distance du poisson.
Le point P est donc sur la médiatrice de $[O_1 ; O_2]$
C'est donc le point d'intersection entre cette médiatrice et le segment [AB]



Calcul de la distance AP.

On pose AP = x

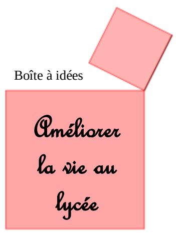
- Calcul de la longueur O_1P en fonction de x.
  Dans le triangle AO_1P rectangle en A, on a :
  $O_1P^2 = O_1A^2 + AP^2$ (théorème de Pythagore)
  $O_1P^2 = 9^2 + x^2 = 81 + x^2$
  $O_1P = \sqrt{81 + x^2}$
- Calcul de la longueur O_2P en fonction de x.
  Dans le triangle BO_2P rectangle en B, on a :
  $O_2P^2 = O_2B^2 + BP^2$ (théorème de Pythagore)
  $O_2P^2 = 6^2 + (15 - x)^2$
  $O_2P^2 = 36 + 225 - 30x + x^2$
  $O_2P^2 = 261 - 30x + x^2$
  $O_2P = \sqrt{261 - 30x + x^2}$



- Comme les oiseaux volent à la même vitesse et atteignent le poisson au même moment, cela signifie qu'ils sont à égale distance du poisson. Autrement dit, $O_1P = O_2P$
  Mais encore : $O_1P^2 = O_2P^2$
  D'où : $81 + x^2 = 261 - 30x + x^2$
  $30x = 261 - 81$
  $30x = 180$
  $x = \frac{180}{30} = 6$

  Conclusion : Le poisson se trouve à 6 mètres du grand palmier.

Modélisation *(11,5 points)* *Un motif publicitaire*



Le responsable de la vie scolaire d'un lycée a décidé de faire un blog. Il veut créer un logo qui aurait un motif de ce style. Comme il est aussi professeur de mathématiques, il voudrait que l'un des carrés s'appuie sur un triangle rectangle et que l'aire du motif soit minimale. Ils demandent à ses élèves de résoudre le problème.

Voici les hypothèses :

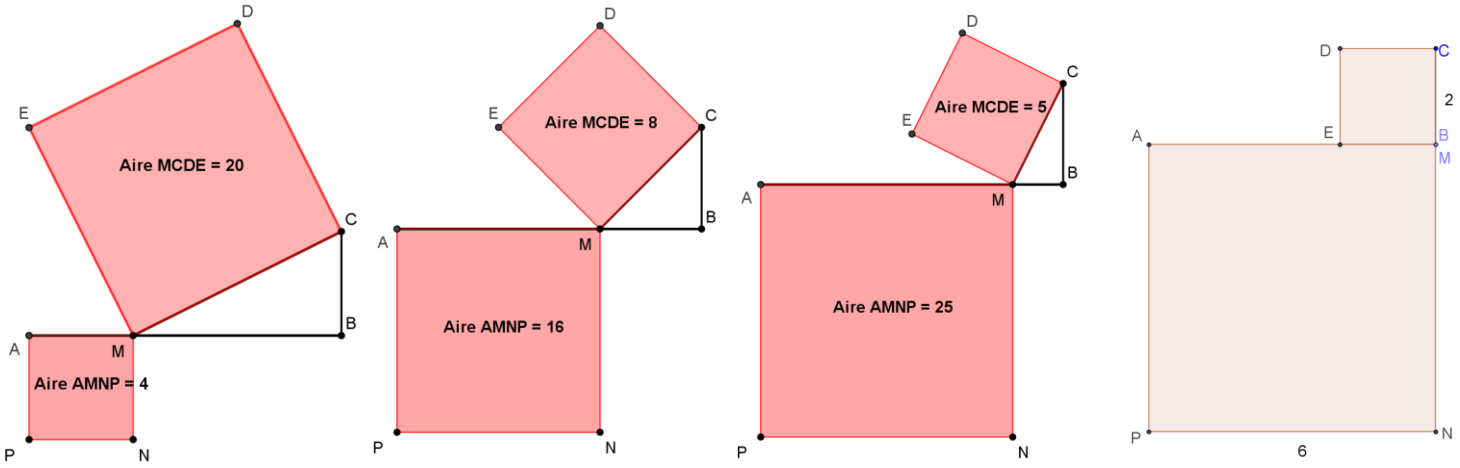
- Les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.
- AB = 6 et BC = 2.
- Le point M se déplace sur le segment [AB], on note x la longueur AM.
- AMNP et MCDE sont deux carrés

On s'intéresse donc à l'aire du motif constitué des deux carrés (en gris sur le dessin).

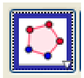
L'objectif du problème est que la somme totale des aires des carrés soit la plus petite possible.

Partie 1 : construction de la figure

Les élèves ont travaillé sur poste informatique avec le logiciel de géométrie Geogebra pour faire la figure.Un élève a réussi sa construction et il montre alors à la classe ce qu'il obtient pour diverses positions du point M.
En voici quelques-unes.



1) Dessiner la figure dans le cas où AM = 6 et calculer alors l'aire du motif.
   Aire du motif = aire $_{AMNP}$ + aire $_{MCDE}$
   Aire du motif = $6^2 + 2^2 = 36 + 4$ **= 40**

2) Sur Géogébra, quelle méthode de construction l'élève a pu utiliser pour que les quadrilatères AMNP et MCDE restent des carrés lorsque M se déplace sur [AB] ? ***Vous ne donnerez une démarche possible que pour le carré MCDE (on suppose que A, B, C et M sont déjà construits).***
   Première méthode : On utilise  l'outil polygone régulier. On clique sur M puis A puis on entre le nombre de sommets : 4.
   Seconde méthode : On trace le cercle de centre C et de rayon CM puis la perpendiculaire à (MC) passant par C. Soit D un (celui situé du « bon côté ») des points d'intersection de ce cercle et de cette droite. Il reste ensuite à tracer la perpendiculaire à (CD) passant par D et la perpendiculaire à (CM) passant par M ; ces deux droites se coupent en E.

Partie 2 : modélisation puis conjecture avec la calculatrice

1) Dans quel intervalle varie x ? **$x \in [0 ; 6]$**
2) Exprimer en fonction de x l'aire du carré AMNP. Aire $_{AMNP}$ = $x \times x$ = $\mathbf{x^2}$

3) On veut déterminer l'aire du carré MCDE. Pour cela, exprimer en fonction de x :
   a) la longueur MB.
      Les points A, M et B sont alignés dans cet ordre donc MB = AB – AM = **6 – x**

   b) la longueur MC.
      Dans le triangle MCB rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore, on a :
      $MC^2 = MB^2 + BC^2$
      $MC^2 = (6 - x)^2 + 2^2$
      $MC^2 = 36 - 12x + x^2 + 4$
      $MC^2 = 40 - 12x + x^2$
      $\mathbf{MC = \sqrt{40 - 12x + x^2}}$

   c) l'aire du carré MCDE.
      Aire $_{MCDE}$ = MC^2 = $\mathbf{40 - 12x + x^2}$

4) On appelle f (x) l'aire du motif constitué des deux carrés.
   Exprimer f (x) en fonction de x et montrer alors que, pour tout x de [0 ; 6], f (x) = $2x^2 - 12x + 40$.

   f (x) = Aire $_{AMNP}$ + Aire $_{MCDE}$ = $x^2 + 40 - 12x + x^2$ = $\mathbf{2x^2 - 12x + 40}$

5) Conjecturer alors une réponse au problème posé.
Vous indiquerez la méthode que vous avez utilisée, avec tous les réglages et vous recopierez ce que vous avez visualisé.

Dans le mode graph, on rentre Y1 = $2x^2 - 12x + 40$

Réglages de la fenêtre (V-window) :

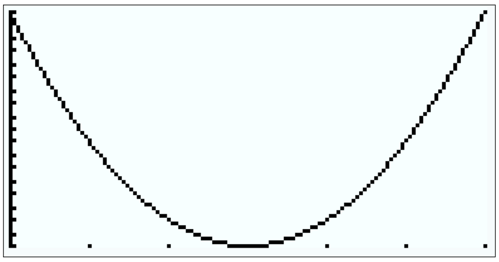
Xmin = 0

Xmax = 6

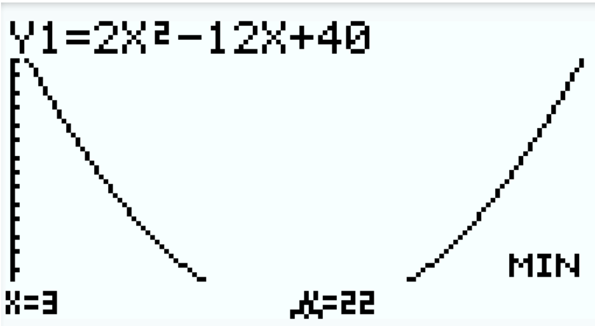
(Scale = 1)

+ zoom automatique

On obtient la courbe ci-contre :



Comme la somme des aires doit être la plus petite possible, on utilise le solveur graphique : G-solv + Min. On obtient l'écran ci-dessous :



Il semble que l'aire minimale du motif est égale à 22 (et elle est obtenue lorsque AM = 3).