Chap. G4 **Produit scalaire & Relations métriques** **Corrigé**

I. FORMULES D'AL KASHI

Soit ABC un triangle quelconque, on note a = BC, b = AC et c = AB

a) Démontrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$

(*Pour vous aider à « démarrer »* : $BC^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2$)

$BC^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2$

donc $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

d'où $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$

b) Que se passe-t-il si ABC est un triangle rectangle en A ?

Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $\cos \widehat{A} = 0$, d'où $a^2 = b^2 + c^2$

II. THEOREME DE LA MEDIANE

Soient A et B deux points et I le milieu du segment [AB].
Soit M un point quelconque du plan.

a) Démontrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$

(*Pour vous aider à « démarrer »* : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{M\_} + \overrightarrow{\_B})$)

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$

Comme $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} - IA \times IB$

Or $IA = IB = \dfrac{AB}{2}$ donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$

b) Démontrer que $MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$

(*Pour vous aider à « démarrer »* : $MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{M\_} + \overrightarrow{\_B})^2$)

$MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$

$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MI}^2 + 2\,\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\,\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2$

Comme $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$, $MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + 2\,\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + IA^2 - 2\,\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + IB^2$

Or $IA = IB = \dfrac{AB}{2}$ donc $MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + 2\,\dfrac{AB^2}{4} = 2\,MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$

c) Démontrer que $MA^2 - MB^2 = 2\,\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$

(*Pour vous aider à « démarrer »* : $MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{M\_} + \overrightarrow{\_B})^2$)

$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$

$MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MI}^2 + 2\,\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 - \overrightarrow{MI}^2 - 2\,\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IB}^2$

$MA^2 - MB^2 = -2\,\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{IA} + IA^2 + 2\,\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{IB} - IB^2 = 2\,\overrightarrow{IM} \cdot (-\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})$

$MA^2 - MB^2 = 2\,\overrightarrow{IM} \cdot (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) = 2\,\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$

III. FORMULES DES SINUS

Soit ABC un triangle quelconque, on note a = BC, b = AC et c = AB.
On note H le projeté orthogonal de A sur (BC) et S l'aire du triangle ABC.

a) Démontrer que $S = \dfrac{1}{2} ac \sin \widehat{B}$

$S = \dfrac{1}{2} BC \times AH$ or dans le triangle rectangle ABH, $\sin \widehat{B} = \dfrac{AH}{AB}$

donc $AH = AB \times \sin \widehat{B}$

d'où $S = \dfrac{1}{2} BC \times AB \times \sin \widehat{B} = \dfrac{1}{2} ac \sin \widehat{B}$

b) En déduire que $\dfrac{abc}{2S} = \dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin \widehat{C}}$

D'après l'égalité précédente, $\dfrac{abc}{2S} = \dfrac{abc}{ac \sin \widehat{B}} = \dfrac{abc}{2S} = \dfrac{b}{\sin \widehat{B}}$

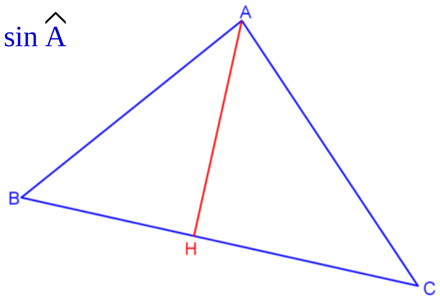
De même en utilisant le projeté orthogonal de B sur (AC) et celui de C sur (AB), on montre comme au a) que :

$S = \dfrac{1}{2} ab \sin \widehat{C}$ et $S = \dfrac{1}{2} bc \sin \widehat{A}$

On en déduit alors que :

$\dfrac{abc}{2S} = \dfrac{abc}{ab \sin \widehat{C}} = \dfrac{c}{\sin \widehat{C}}$

$\dfrac{abc}{2S} = \dfrac{abc}{bc \sin \widehat{A}} = \dfrac{a}{\sin \widehat{A}}$



IV. APPLICATIONS

Exercice n°1 : Soit ABC un triangle tel que AC = 3, AB = 4 et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ rad.

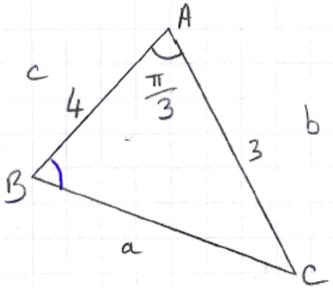
Calculer BC :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$ (Al-Kashi)

$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\times AC\times AB\cos\frac{\pi}{3}$

$BC^2 = 3^2+4^2-2\times 3\times 4\times\frac{1}{2}$

$BC^2 = 13$



Calculer $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$:

$b^2 = a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}$

$AC^2 = BC^2+AB^2-2\times BC\times AB\cos\hat{B}$

$3^2 = (\sqrt{13})^2 + 4^2 - 2\times\sqrt{13}\times 4\cos\hat{B}$

$9-13 = 16-8\sqrt{13}\cos\hat{B}$

$9-13-16 = -8\sqrt{13}\cos\hat{B}$

$\frac{-20}{-8\sqrt{13}} = \cos\hat{B} \Rightarrow \cos\hat{B} = \frac{5\sqrt{13}}{26}$

$\Rightarrow \hat{B} \simeq 46,10°$

Calculer $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$:

Σ des angles ds 1 triangle vaut 180° $\Rightarrow \hat{C} = 180° - 60° - 46,10$

$\hat{C} = 73,90°$

ou

$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$

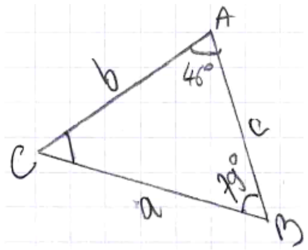
$AB^2 = BC^2+AC^2-2\times BC\times AC\cos\hat{C}$

$4^2 = (\sqrt{13})^2+3^2-2\times\sqrt{13}\times 3\times\cos\hat{C}$

$16-13-9 = -6\sqrt{13}\cos\hat{C}$

$\frac{-6}{-6\sqrt{13}} = \cos\hat{C} \Rightarrow \cos\hat{C} = \frac{\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \hat{C} \simeq 73,90°$

Exercice n°2 : Soit ABC un triangle tel que AB =3 cm, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = 46°$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 79°$



Calculer AC :

Formule des sinus : $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$

$\hat{C} = 180° - 46° - 79° = 55°$

$\frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} \Leftrightarrow \frac{b}{\sin 79°} = \frac{3}{\sin 55°}$

$\Rightarrow b = \frac{3\times\sin 79°}{\sin 55°} \simeq 3,6$

$AC \simeq 3,6\ cm$

Calculer BC :

$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} \Leftrightarrow a = \frac{c\sin\hat{A}}{\sin\hat{C}} = \frac{3\sin 46°}{\sin 55°} \simeq 2,63$

$BC \simeq 2,63\ cm$