Exercice 1. Prise d'initiative

Soit la fonction f définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et

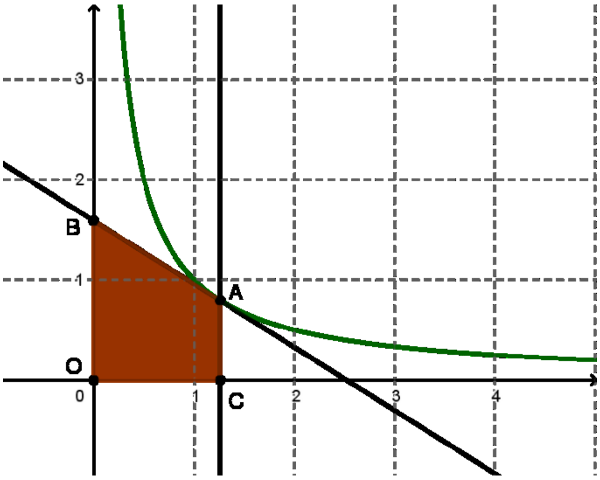
C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormal.

Soit un réel strictement positif noté a.

Le point A d'abscisse a appartient à C_f.

La tangente à C_f au point A coupe l'axe des ordonnées au point B.

Le point C est le projeté orthogonal de A sur l'axe des abscisses.



Que peut-on dire de l'aire du polygone OBAC ?

Aide : on rappelle que l'aire d'un trapèze est : $\dfrac{(\text{Grande base} + \text{Petite base}) \times \text{Hauteur}}{2}$

Le point A d'abscisse a appartient à C_f donc A (a ; f (a))

Équation de la tangente à C_f au point A d'abscisse a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Ordonnée du point B, point d'intersection de cette tangente et de l'axe des ordonnées :

$x_B = 0$ et $y_B = f'(a)(x_B - a) + f(a)$

$x_B = 0$ et $y_B = f'(a)(0 - a) + f(a)$

$x_B = 0$ et $y_B = -a\,f'(a) + f(a)$

L'aire du trapèze OBAC est : $A(a) = \dfrac{(OB + AC) \times OC}{2} = \dfrac{(y_B + y_A) \times a}{2} = \dfrac{(-a\,f'(a) + f(a) + f(a)) \times a}{2}$

$$A(a) = \frac{(-a\,f'(a) + 2\,f(a)) \times a}{2}$$

Or $f(x) = \dfrac{1}{x}$ donc $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

donc $f(a) = \dfrac{1}{a}$ et $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$

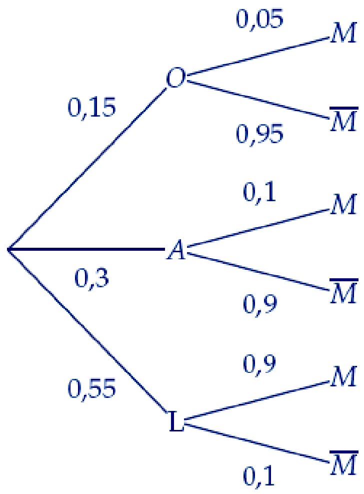
On a donc : $A(a) = \dfrac{\left(-a \times \left(-\dfrac{1}{a^2}\right) + 2 \times \dfrac{1}{a}\right) \times a}{2} = \dfrac{\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{a}\right) \times a}{2} = \dfrac{3}{2}$

<u>En conclusion</u> : l'aire du trapèze OBAC est constante, égale à 1,5 unités d'aire.

Exercice 2. probabilités

Ordralfabétix est poissonnier et 15% du poisson qu'il vend a été pêché par ses soins, 30% vient d'un grossiste armoricain et le reste d'un grossiste de Lutèce.
Il a remarqué que 5% de ses clients sont mécontents du poisson qu'il a lui-même pêché, 10% du poisson provenant du grossiste armoricain et 90% du poisson de Lutèce.
Un client achète un poisson à Ordralfabétix.
On considère les évènements suivants:

- O : « Le poisson a été pêché par Ordralfabétix »
- A : « Le poisson provient du grossiste armoricain »
- L : « Le poisson provient du grossiste de Lutèce »
- M : « Le client est mécontent du poisson »



1) Recopier et compléter l'arbre probabiliste ci-dessous.

2) **a)** Calculer $P(M)$.

O, A et L forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :
$P(M) = P(O \cap M) + P(A \cap M) + P(L \cap M)$
$P(M) = P(O) \times P_O(M) + P(A) \times P_A(M) + P(L) \times P_L(M)$
$P(M) = 0,15 \times 0,05 + 0,3 \times 0,1 + 0,55 \times 0,9$
$P(M) = 0,0075 + 0,03 + 0,495$
$\mathbf{P(M) = 0,5325}$

b) Un client est mécontent du poisson acheté.
Quelle est la probabilité que ce poisson ait été pêché par Ordralfabétix ?

On cherche : $\mathbf{P_M(O)} = \dfrac{P(M \cap O)}{P(M)} = \dfrac{0,0075}{0,5325} = \mathbf{\dfrac{1}{71}} \approx \mathbf{0,014}$

3) Les évènements O et M sont-ils indépendants ? Justifier.

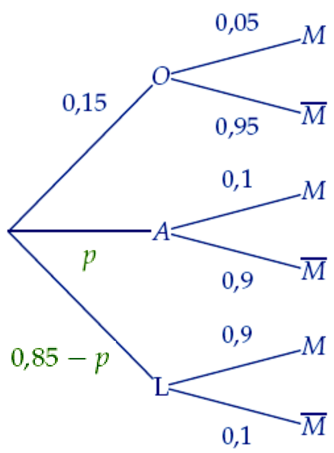
$P(O \cap M) = 0,0075$ et $P(O) \times P(M) = 0,15 \times 0,5325 = 0,079875$

$P(O \cap M) \neq P(O) \times P(M)$, donc les évènements O et M ne sont pas indépendants.

4) Ordralfabétix souhaite ramener le taux de mécontentement à 30% en continuant à pêcher 15% de sa production.
Déterminer les proportions de poisson qu'il doit commander à chaque grossiste pour atteindre son objectif.

Soit p la proportion de poisson acheté au grossiste armoricain,
on a : $\mathbf{P(A) = p}$ et $\mathbf{P(L)} = 1 - 0,15 - p = \mathbf{0,85 - p}$

On modifie donc l'arbre comme ci-contre :



On cherche à résoudre : $\mathbf{P(M) = 0,3}$

Soit $0,0075 + p \times 0,1 + (0,85 - p) \times 0,9 = 0,3$
$\Leftrightarrow 0,7725 - 0,8p = 0,3$
$\Leftrightarrow 0,8p = 0,4725$
$\Leftrightarrow p = \dfrac{0,4725}{0,8} = \dfrac{189}{320}$

Donc $\mathbf{p \approx 0,59}$ **et** $\mathbf{0,85 - p \approx 0,26}$

Pour atteindre son objectif, Ordralfabétix devra commander environ 59% de son poisson au grossiste armoricain et 26% à celui de Lutèce.

Exercice 3. *SUITES EXERCICE POUR RETRAVAILLER LES SUITES APRES LES EVAS*

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

1. a) Calculer u_1 et u_2.

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 0 - 2 = \frac{1}{3} \times 1 + 0 - 2 = \frac{1}{3} - 2 = \mathbf{-\frac{5}{3}}$$

$$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 1 - 2 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{5}{3}\right) + 1 - 2 = -\frac{5}{9} - 1 = \mathbf{-\frac{14}{9}}$$

b) En déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

$$u_1 - u_0 = -\frac{5}{3} - 1 = -\frac{8}{3} \quad \text{et} \quad u_2 - u_1 = -\frac{14}{9} - \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{9}$$

donc $\mathbf{u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1}$

On en déduit que la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{-\frac{5}{3}}{1} = -\mathbf{\frac{5}{3}} \quad \text{et} \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{-\frac{14}{9}}{-\frac{5}{3}} = \frac{14}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{14}{15}$$

donc $\mathbf{\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}}$

On en déduit que la suite (u_n) n'est pas géométrique.

2. Un élève a voulu utiliser un tableur. Voici sa feuille de calcul :

	A	B
1	**n**	**u(n)**
2	0	1
3	1	-1,66666667
4	2	-1,55555556
5	3	-0,51851852
6	4	0,82716049
7	5	2,27572016
8	6	3,75857339
9	7	5,2528578
10	8	6,7509526
11	9	8,25031753
12	10	9,75010584
13	11	11,2500353
14	12	12,7500118

a) Indiquer la formule qui a été écrite dans la cellule B3 pour obtenir la valeur de u_1 et qui, par recopie vers le bas, permet de trouver les autres termes consécutifs de cette suite (u_n).

=(1/3)*B2+A2−2

b) Cet élève conjecture que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang. Préciser ce rang.

Il semble que cette suite soit croissante à partir du rang 1.

3. Un autre élève a conçu l'algorithme ci-dessous dans lequel M est un réel quelconque.

a) Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes.

```
N ← 0
U ← 1
Tant que U ≤ M :
    U ← (1/3) U + N − 2
    N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

Pour information : **Programme en Python**

```
n = 0
u = 1
while U <= m :
    u = (1/3)*u + n − 2
    n = n + 1
print (n)
```

b) Qu'affiche cet algorithme lorsque M a pour valeur 5 ?

On cherche la plus petite valeur de n tel que $u_n > 5$

Il s'agit de la valeur : 7

c) Cet élève a utilisé cet algorithme pour des valeurs de M égales respectivement à 100, 1000, 5000. Quelle conjecture cherchait-il à émettre à partir des résultats obtenus ? Expliquer.

Il cherchait à savoir si la suite (u_n) tend vers $+\infty$

4. Pour tout entier naturel n, on note : $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

$\mathbf{v_{n+1}} = -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2}$

$\mathbf{v_{n+1}} = -2(\frac{1}{3}u_n + n - 2) + 3(n+1) - \frac{21}{2}$

$\mathbf{v_{n+1}} = -\frac{2}{3}u_n - 2n + 4 + 3n + 3 - \frac{21}{2}$

$\mathbf{v_{n+1}} = -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2}$

$\mathbf{v_{n+1}} = \frac{1}{3}(-2u_n + 3n - \frac{21}{2})$

$\mathbf{v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n}$ **On en déduit que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison égale à $\frac{1}{3}$**

<u>autre méthode :</u>

$\mathbf{v_{n+1}} = -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2} = -2(\frac{1}{3}u_n + n - 2) + 3(n+1) - \frac{21}{2}$

$\mathbf{v_{n+1}} = -\frac{2}{3}u_n - 2n + 4 + 3n + 3 - \frac{21}{2} = -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2}$

Or $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$ donc $2u_n = -v_n + 3n - \frac{21}{2}$ et donc $u_n = -\frac{1}{2}v_n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$

On en déduit que : $\mathbf{v_{n+1}} = -\frac{2}{3}(-\frac{1}{2}v_n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}) + n - \frac{7}{2} = \frac{1}{3}v_n - n + \frac{7}{2} + n - \frac{7}{2} = \mathbf{\frac{1}{3}v_n}$

De plus, son premier terme est : $\mathbf{v_0}$ = $-2u_0 + 3 \times 0 - \frac{21}{2} = -2 \times 1 - \frac{21}{2} = \mathbf{-\frac{25}{2}}$

b) Exprimer v_n en fonction de n.

Comme (v_n) est une suite géométrique de raison égale à $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{25}{2}$

On a, pour tout n, $\mathbf{v_n = -\frac{25}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}$

c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$

On sait que $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$ donc $2u_n = -v_n + 3n - \frac{21}{2}$

et donc $u_n = -\frac{1}{2}v_n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$

Comme $\mathbf{v_n = -\frac{25}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}$, on a : $u_n = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{25}{2}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4} = \mathbf{\frac{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}}$

d) Déterminer alors la limite de la suite (u_n)

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{-1 < \frac{1}{3} < 1} \text{ donc } \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbf{\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0} \text{ et donc } \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbf{\frac{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0} \\ \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbf{\left(\frac{3}{2}n - \frac{21}{4}\right) = +\infty} \end{array}\right\} \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbf{u_n = +\infty}$$

On en déduit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$, elle est divergente.

5. On note, pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n$

On peut remarquer que, pour tout n, $u_n = x_n + y_n$ avec $x_n = \frac{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $y_n = \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$

Calculer $\sum_{k=0}^{k=n} x_k$ et $\sum_{k=0}^{k=n} y_k$ puis en déduire S_n

$x_n = \frac{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

On remarque que la suite (x_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ (**différente de 1**) et $x_0 = \frac{25}{4}$

$$\text{donc } \sum_{k=0}^{k=n} x_k = x_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{25}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \frac{75}{8} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$y_n = \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$

On remarque que la suite (y_n) est arithmétique de raison $\frac{3}{2}$ et $y_0 = -\frac{21}{4}$

$$\sum_{k=0}^{k=n} y_k = (n+1) \times \frac{y_0 + y_n}{2} = (n+1) \times \frac{-\frac{21}{4} + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}}{2} = (n+1) \times \frac{\frac{3}{2}n - \frac{21}{2}}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} y_k = (n+1) \times \left(\frac{3}{4}n - \frac{21}{4}\right)$$

Comme $u_n = x_n + y_n$, $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} x_k + \sum_{k=0}^{k=n} y_k = \frac{75}{8} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + (n+1) \times \left(\frac{3}{4}n - \frac{21}{4}\right)$

T.S. **Devoir de Mathématiques n°5** *Pour le 28 novembre 2019*

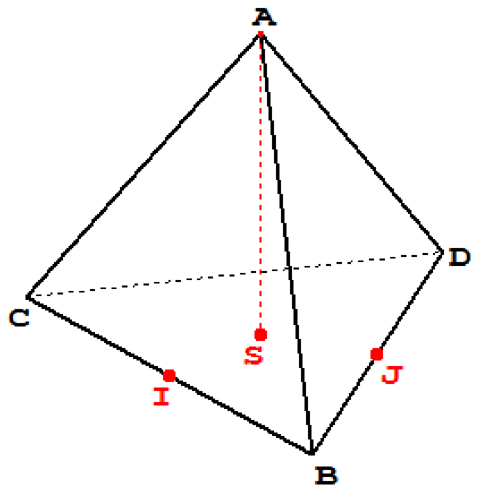
<u>*Objectifs :*</u> *Réinvestir l'espace*
Représenter une situation à l'aide d'un arbre
Réinvestir les notions vues en probabilités (1ère et Tle)

Exercice 1. Espace

ABCD est un tétraèdre régulier.

S est le pied de la hauteur issue de A relativement à la base BCD.

I est le milieu de [BC] et J est le milieu de [BD].



1) Démontrer que les droites (AS) et (BC) sont orthogonales.
2) En déduire que la droite (BC) est orthogonale au plan (AIS).
3) Quelle est l'intersection de (AIJ) et de (ACD) ?

Exercice 2. Probabilités

Un opérateur de téléphonie mobile organise une campagne de démarchage par téléphone pour proposer la souscription d'un nouveau forfait à sa clientèle, composée à 65 % d'hommes. Des études préalables ont montré que 30 % des hommes contactés écoutent les explications, les autres raccrochant aussitôt (ou se déclarant immédiatement non intéressés). Parmi les femmes, 60 % écoutent les explications. On admet que ces proportions restent stables.

Partie A

On choisit au hasard une personne dans le fichier clients. Chaque personne a la même probabilité d'être choisie.
On note H l'évènement « la personne choisie est un homme », F l'évènement « la personne choisie est une femme », E l'évènement « la personne choisie écoute les explications du démarcheur » et E l'évènement contraire de E.

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilité.

2. (a) Traduire par une phrase l'évènement $E \cap F$ et calculer sa probabilité.
(b) Montrer que la probabilité que la personne choisie écoute les explications du démarcheur est égale à 0,405.
(c) Le démarcheur s'adresse à une personne qui l'écoute. Quelle est la probabilité que ce soit un homme ? On donnera le résultat arrondi au centième.

Partie B

Les relevés réalisés au cours de ces premières journées permettent également de constater que 12 % des personnes interrogées souscrivent à ce nouveau forfait.
Chaque employé de l'opérateur effectue 60 appels par jour.
On suppose le fichier suffisamment important pour que les choix soient considérés réalisés de façon indépendante et dans des conditions identiques.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de souscriptions réalisées par un employé donné un jour donné.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

2. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne 5 souscriptions un jour donné. (On arrondira le résultat au centième).

3. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné. On donnera une valeur arrondie au dix millième.

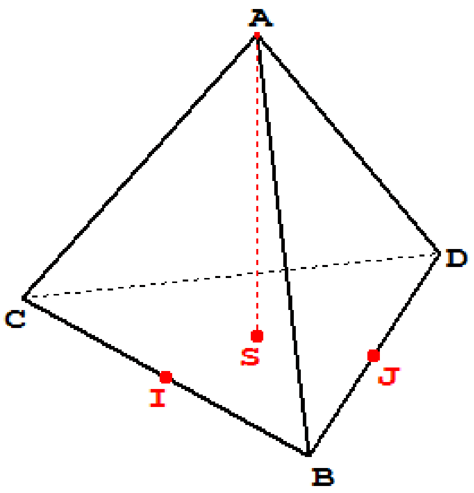
4. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

Exercice 1. Espace

ABCD est un tétraèdre régulier.

S est le pied de la hauteur issue de A relativement à la base BCD.

I est le milieu de [BC] et J est le milieu de [BD].



1) Démontrer que les droites (AS) et (BC) sont orthogonales.

(AS) hauteur du tétraèdre, est orthogonale à (BCD) donc (AS) est orthogonale à toute droite de ce plan. En particulier, (AS) est orthogonale à (BC).

2) En déduire que la droite (BC) est orthogonale au plan (AIS).

Dans le triangle équilatéral ABC, la médiane (AI) est aussi la hauteur relative à [BC], donc (BC) est orthogonale à (AI).

(BC) est orthogonale à la fois à (AS) et à (AI) qui sont deux droites sécantes du plan (AIS), donc (BC) est orthogonale au plan (AIS).

3) Quelle est l'intersection de (AIJ) et de (ACD) ?

A appartient aux plans (AIJ) et (ACD), et (IJ) n'est pas incluse dans (ACD), donc les plans (AIJ) et (ACD) sont sécants.

Dans le triangle BCD, la droite des milieux (IJ) est parallèle à (CD).

De plus, (CD) est incluse dans le plan (ACD) et (IJ) est incluse dans le plan (AIJ).

D'après le théorème du toit, la droite d'intersection des plans (AIJ) et (ACD) est parallèle à (CD) et à (IJ).

L'intersection des plans (AIJ) et (ACD) est la parallèle à (CD) et à (IJ), passant par A.

Probabilités

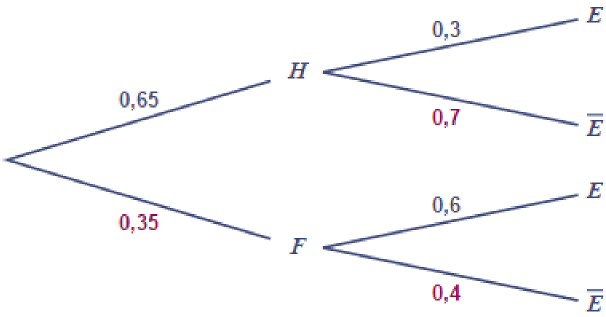
Un opérateur de téléphonie mobile organise une campagne de démarchage par téléphone pour proposer la souscription d'un nouveau forfait à sa clientèle, composée à 65 % d'hommes. Des études préalables ont montré que 30 % des hommes contactés écoutent les explications, les autres raccrochant aussitôt (ou se déclarant immédiatement non intéressés). Parmi les femmes, 60 % écoutent les explications. On admet que ces proportions restent stables.

Partie A

On choisit au hasard une personne dans le fichier clients. Chaque personne a la même probabilité d'être choisie.

On note H l'évènement « la personne choisie est un homme », F l'évènement « la personne choisie est une femme », E l'évènement « la personne choisie écoute les explications du démarcheur » et $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilité.



2. (a) Traduire par une phrase l'évènement $E \cap F$ et calculer sa probabilité.

$E \cap F$ est l'évènement :

« la personne choisie est une femme et elle écoute les explications du démarcheur »

$P(E \cap F) = P(F) \times P_F(E) = 0,35 \times 0,6 = 0,21$

(b) Montrer que la probabilité que la personne choisie écoute les explications du démarcheur est égale à 0,405.

Les évènements H et E forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(E) = P(E \cap H) + P(E \cap F) = P(H) \times P_H(E) + 0,21 = 0,65 \times 0,3 + 0,21 = 0,195 + 0,21 = 0,405$

(c) Le démarcheur s'adresse à une personne qui l'écoute. Quelle est la probabilité que ce soit un homme ? On donnera le résultat arrondi au centième.

$$P_E(H) = \frac{P(H \cap E)}{P(E)} = \frac{0,195}{0,405} = \frac{13}{27} \approx 0,48$$

Partie B

Les relevés réalisés au cours de ces premières journées permettent également de constater que 12 % des personnes interrogées souscrivent à ce nouveau forfait.

Chaque employé de l'opérateur effectue 60 appels par jour.

On suppose le fichier suffisamment important pour que les choix soient considérés comme réalisés de façon indépendante et dans des conditions identiques.

On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de souscriptions réalisées par un employé donné un jour donné.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

12 % des personnes interrogées souscrivent à ce nouveau forfait. Le fait qu'une personne interrogée souscrive ou non à ce nouveau forfait constitue une épreuve de Bernoulli, de paramètre $p = 0,12$ (probabilité du succès « la personne interrogée souscrit à ce nouveau forfait »).

Chaque employé effectue 60 appels par jour et, le fichier est suffisamment important pour que les choix soient considérés réalisés de façon indépendante et dans des conditions identiques donc on obtient un schéma de Bernoulli et le nombre de succès, **X, suit une loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = 0,12$.**

2. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne 5 souscriptions un jour donné. (On arrondira le résultat au centième).

$$\mathbf{P(X = 5)} = \binom{n}{5} \times p^5 \times (1-p)^{60-5} = \binom{60}{5} \times 0,12^5 \times (1-0,12)^{55} \approx 0,12$$

3. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné. On donnera une valeur arrondie au dix millième.

L'évènement « obtenir au moins une souscription un jour donné » est l'évènement contraire de « n'obtenir aucune souscription un jour donné ». D'où :

$$\mathbf{P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)} = 1 - (1-p)^n = 1 - (1-0,12)^{60} = \mathbf{1 - 0,88^{60} \approx 0,9995}$$

4. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

$\mathbf{E(X)} = n \times p = 60 \times 0,12 = \mathbf{7,2}$

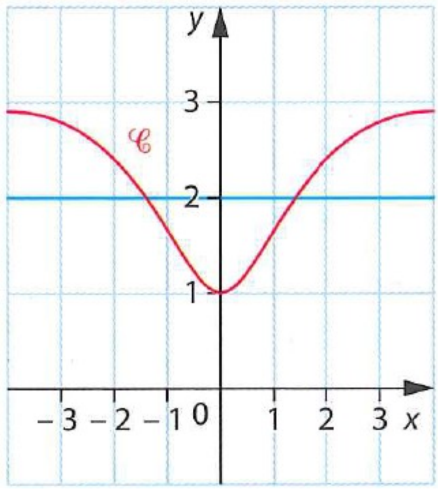
En moyenne, un employé réalise 7,2 souscriptions par jour.

T.S.	***Devoir de Mathématiques n°6***	*Pour le 5 décembre 2019*

Objectifs : *Etre capable de prendre des initiatives*
Appliquer les notions vues sur la fonction exponentielle
Chercher pour résoudre un type d'équation non rencontré en cours.

On donne ci-contre la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{4e^{x}}{e^{x}+1}$$



1. À l'aide du graphique, émettre des conjectures sur une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, sur la présence d'un axe de symétrie ainsi que sur le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

2. **a.** Montrer que, pour tout réel x : $f'(x) = \dfrac{4e^{x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}$

b. Quelles conjectures pouvez-vous valider ?

Expliquer votre raisonnement.

3. **a.** Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

b. Interpréter graphiquement ces limites.

c. Etudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y = 3$.

4. **a.** Montrer que, pour tout réel x : $f(x) = 3 - \dfrac{4}{e^{x}+e^{-x}}$

b. Calculer $f(x) - f(-x)$.

Que peut-on déduire du résultat trouvé ?

5. On admet l'existence d'un unique point A d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec la droite d'équation:

$y = 2$, ayant une abscisse positive.

a. Conjecturer une valeur arrondie de α, l'abscisse de A.

b. Prise d'initiatives : montrer que $e^{\alpha} = 2 + \sqrt{3}$. ***(aide sur mathasion si besoin)***
Pouvez-vous en déduire la valeur exacte de c ? ou retrouver une valeur arrondie ?

DNS 6 : Aide n°1 :

Traduire l'intersection de Cf avec la droite d'équation

$y = 2$, puis poser $c = e^{\alpha}$

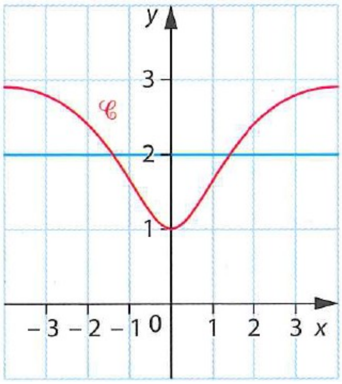
DNS 6 : Aide n°2 :

1) Montrer que « *c* » est solution de l'équation :

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

2) En déduire que $e^{\alpha} = 2 + \sqrt{3}$.

On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur IR par : $f(x) = 3 - \dfrac{4e^x}{e^{2x}+1}$



1. À l'aide du graphique, émettre des conjectures sur une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0, sur la présence d'un axe de symétrie ainsi que sur le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

D'après le graphique :

- une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 semble être : $y = 1$,
- la courbe semble avoir pour axe de symétrie l'axe des ordonnées,
- la fonction f semble être strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

2. a. Montrer que, pour tout réel x : $f'(x) = \dfrac{4e^x(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}$

$f = 3 + \dfrac{u}{v}$ donc $f' = 0 - \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$u(x) = 4e^x$ $u'(x) = 4e^x$ $v(x) = e^{2x}+1$ $v'(x) = 2e^{2x}$

donc pour tout réel x, $f'(x) = -\dfrac{4e^x(e^{2x}+1) - 2e^{2x}(4e^x)}{(e^{2x}+1)^2}$

$$f'(x) = -\frac{4e^x(e^{2x}+1-2e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{4e^x(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4e^x(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}$$

b. Quelles conjectures pouvez-vous valider ?

Expliquer votre raisonnement.

En étudiant le signe de $f'(x)$, on peut déterminer le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.

Pour tout réel x, $e^x > 0$, donc $4e^x > 0$ et $(e^{2x}+1)^2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $e^{2x} - 1$.

$e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow e^{2x} = e^0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

et $e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > e^0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	

Variations de f	$\searrow$ 1 $\nearrow$

$f(0) = 3 - \dfrac{4e^0}{e^0 + 1} = 3 - \dfrac{4}{1+1} = 3 - 2 = 1$

D'après le tableau de variation de f, on peut donc confirmer que :

- la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est bien : $y = 1$, puisque $f'(0) = 0$ et $f(0) = 1$

3. a. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

- **Limite en $-\infty$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} 4e^x = 0 \\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0\end{array}\right\} \text{ donc par composée, } \lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0 \quad \text{d'où } \lim\limits_{x \to -\infty} (e^{2x} + 1) = 1 \end{array}\right\} \text{Par quotient, } \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4e^x}{e^{2x}+1} = 0$$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(3 - \dfrac{4e^x}{e^{2x}+1}\right) = 3$ $\quad$ $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3}$

- **Limite en $+\infty$:**

$$\frac{4e^x}{e^{2x}+1} = \frac{4e^x}{e^x\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{4}{e^x + \frac{1}{e^x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0 \end{array}\right\} \text{ donc par somme, } \lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x + \frac{1}{e^x}\right) = +\infty$$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{e^x + \frac{1}{e^x}} = 0$ $\quad$ puis que $\quad$ $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3}$

b. Interpréter graphiquement ces limites.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ donc **la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale, d'équation $y = 3$, en $-\infty$ et en $+\infty$.**

c. Etudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite d'équation $y = 3$.

Il s'agit d'étudier le signe de la différence : $f(x) - 3 = 3 - \dfrac{4e^x}{e^{2x}+1} - 3 = -\dfrac{4e^x}{e^{2x}+1}$

Pour tout réel x, $4e^x > 0$ et $e^{2x} > 0$, donc $e^{2x} + 1 > 0$.

Par conséquent, $\dfrac{4e^x}{e^{2x}+1} > 0$ et, pour tout réel x, $f(x) - 3 < 0$ $\quad$ soit $f(x) < 3$

On en déduit que **la courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de la droite d'équation $y = 3$ sur $]-\infty ; +\infty[$.**

4. a. Montrer que, pour tout réel x : $f(x) = 3 - \dfrac{4}{e^x + e^{-x}}$

$$\boldsymbol{f(x)} = 3 - \frac{4e^x}{e^{2x}+1} = 3 - \frac{4e^x \times e^{-x}}{(e^x \times e^x + 1) \times e^{-x}} = 3 - \frac{4e^0}{e^x \times e^0 + e^{-x}} = 3 - \frac{4 \times 1}{e^x \times 1 + e^{-x}} = \boldsymbol{3 - \frac{4}{e^x + e^{-x}}}$$

b. Calculer $f(x) - f(-x)$.

$$f(x) - f(-x) = 3 - \frac{4}{e^x + e^{-x}} - \left(3 - \frac{4}{e^{-x} + e^{-(-x)}}\right) = 3 - \frac{4}{e^x + e^{-x}} - 3 + \frac{4}{e^{-x} + e^x} = 0$$

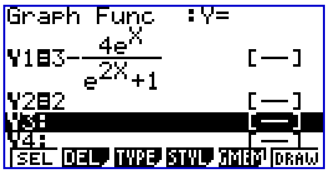
Que peut-on déduire du résultat trouvé ?

Pour tout réel x : $f(x) - f(-x) = 0$, donc $f(x) = f(-x)$

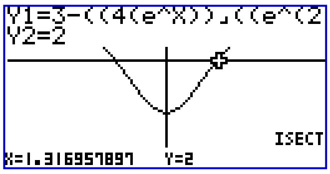
On en déduit que la fonction f est paire et que **la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour axe de symétrie l'axe des ordonnées.**

5. On admet l'existence d'un unique point A d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec la droite d'équation: $y = 2$, ayant une abscisse positive.

c. Conjecturer une valeur arrondie de α, l'abscisse de A.



DRAW puis G-Solv Isct



Grâce à la calculatrice, **on conjecture que $\alpha \approx 1{,}317$ arrondi au millième.**

d. On pose $c = e^{\alpha}$.
Montrer que c est solution de l'équation : $x^2 - 4x + 1 = 0$.

On sait que $f(\alpha) = 2$, donc

$$3 - \frac{4e^{\alpha}}{e^{2\alpha} + 1} = 2$$

$$3 - 2 = \frac{4e^{\alpha}}{e^{2\alpha} + 1}$$

$$1 = \frac{4e^{\alpha}}{e^{2\alpha} + 1}$$

$$e^{2\alpha} + 1 = 4e^{\alpha}$$

$$e^{2\alpha} - 4e^{\alpha} + 1 = 0$$

$$(e^{\alpha})^2 - 4e^{\alpha} + 1 = 0$$

Or $c = e^{\alpha}$, donc **$c^2 - 4c + 1 = 0$ et c est bien solution de l'équation : $x^2 - 4x + 1 = 0$.**