Manuel numérique

Bordas Maths Indice Term S Enseignement spécifique – Version Premium Enseignant

50 Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$.

1. Déterminer la dérivée de la fonction F sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$.
3. Donner la valeur $F(0)$, en déduire le signe de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

1- F est une primitive de f d'aprés sa définition, donc

$F'(x) = f(x)$ $\quad$ $\underline{F'(x) = e^{x^2}}$

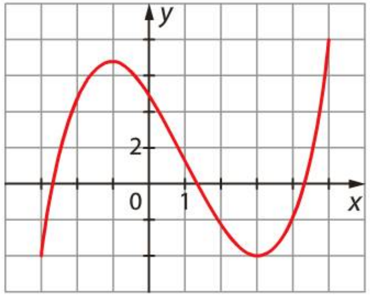
2- $f(x) = e^{x^2}$ $\quad$ $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3- $F(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$ d'où le signe de $F(x)$:

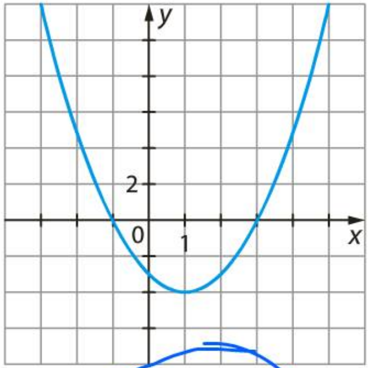
x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $F(x)$		$-$	0	$+$	

car $F \nearrow$ sur $\mathbb{R}$.

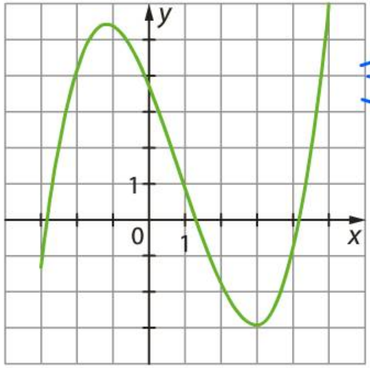
75 Soit f une fonction définie sur $[-3 ; 5]$.
La courbe ci-dessous représente une primitive F de f.



Parmi les deux courbes représentées ci-dessous, laquelle représente la fonction f ? Justifier la réponse.



Courbe ①



Courbe ②

x	-3		-1		3		5
variatº de F		↗		↘		↗	
signe de $f(x) = F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

63 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x+4}.$$

Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{x+4}$ soit une primitive de la fonction f.

AIDE : Exprimer $f'(x)$ à l'aide de a, b et x puis remplacer x par deux valeurs (voir l'exercice 62).

$F(x) = (ax+b)e^{x+4}$

$F = uv$ avec $u(x) = ax+b$ $\quad v(x) = e^{x+4}$

$u'(x) = a$ $\quad v'(x) = e^{x+4}$

$F' = u'v + v'u$

$F'(x) = a e^{x+4} + e^{x+4}(ax+b)$

$\underline{F'(x)} = e^{x+4}(a + ax + b) = \underline{(ax+a+b)e^{x+4}}$

F est une primitive de f $\iff F'(x) = f(x)$

$\iff (ax+a+b)e^{x+4} = xe^{x+4}$

$\iff ax+a+b = x$

$\iff \begin{cases} a = 1 \\ a+b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

donc $\underline{F(x) = (x-1)e^{x+4}}$

56 **1.** Démontrer que la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=x\ln x-x$ est une primitive de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln x$.

2. Déterminer la primitive de f qui s'annule pour $x=1$.

1) $F(x) = x\ln x - x$

$F = uv + w$ $\quad u(x) = x \quad v(x) = \ln x$

$F' = u'v + uv' + w'$ $\quad u'(x) = 1 \quad v'(x) = \frac{1}{x}$

$w(x) = -x \quad w'(x) = -1$

$F'(x) = 1 \times \ln x + \frac{1}{x} \times x - 1$

$F'(x) = \ln x + 1 - 1$

$\underline{F'(x) = \ln x = f(x)}$ donc F est une <u>primitive de f</u>.

2) Soit G, la primitive de f telle que $G(1) = 0$.

on sait que $G(x) = F(x) + C$ où C est une constante.

donc $G(1) = F(1) + C$ d'où $G(1) = 0 \Leftrightarrow F(1) + C = 0$

$\Leftrightarrow 1\ln 1 - 1 + C = 0$

$\Leftrightarrow -1 + C = 0$

$\Leftrightarrow \underline{C = 1}$

donc $\boxed{G(x) = x\ln x - x + 1}$