

La trigonométrie

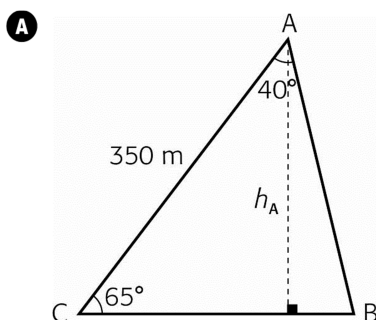
Chapitre

8

ACTIVITÉ

D'EXPLORATION **1** Voguer à Venise

Manuel • p. 180



$$\frac{b \cdot \sin C}{\sin B \cdot \sin C} = \frac{c \cdot \sin B}{\sin B \cdot \sin C}$$

En simplifiant les rapports, on obtient

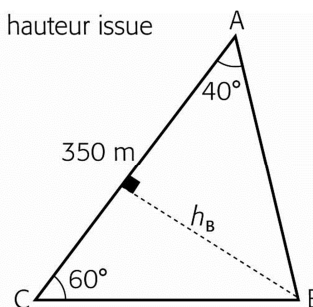
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

E
$$\frac{350}{\sin 75^\circ} = \frac{c}{\sin 65^\circ}$$

$$c = \frac{350 \cdot \sin 65^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 328,4$$

La distance qui sépare la demeure d'Adriano de la boulangerie est d'environ 328,4 m.

F On trace h_B , la hauteur issue du sommet B.



On a $\sin C = \frac{h_B}{a}$ et $\sin A = \frac{h_B}{c}$

$$a \cdot \sin C = h_B \quad \text{et} \quad c \cdot \sin A = h_B$$

Par comparaison, on a

$$a \cdot \sin C = c \cdot \sin A$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{\sin 40^\circ} \approx \frac{328,4}{\sin 65^\circ}$$

$$a \approx \frac{328,4 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 65^\circ} \approx 232,9$$

La distance qui sépare la demeure de Cecilia de la boulangerie est d'environ 232,9 m.

Réponse à la question **C**, page 180

Étape		Justification
1 ^{re} égalité	2 ^e égalité	
1. $\sin C = \frac{h_A}{b}$	$\sin B = \frac{h_A}{c}$	Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle est le rapport entre la mesure de son côté opposé et la mesure de l'hypoténuse.
2. $b \cdot \sin C = h_A$	$c \cdot \sin B = h_A$	On isole h_A dans chacune des équations.
3. $b \cdot \sin C = c \cdot \sin B$		On pose une égalité entre les deux expressions équivalentes à h_A .

G Dans un triangle, les rapports entre la mesure d'un côté et le sinus de l'angle qui lui est opposé sont équivalents.

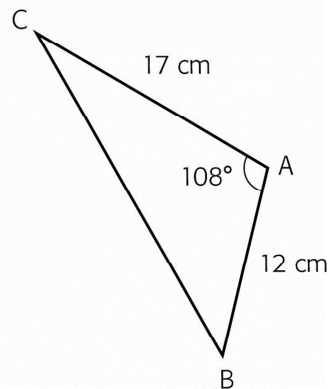
H ① $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$
 $\frac{a}{\sin 56^\circ} = \frac{40}{\sin 71^\circ}$
 $a = \frac{40 \cdot \sin 56^\circ}{\sin 71^\circ} \approx 35,1 \text{ m}$

② L'angle **D** mesure 59° .
 $\frac{d}{\sin D} = \frac{e}{\sin E}$
 $\frac{57}{\sin 59^\circ} = \frac{e}{\sin 49^\circ}$
 $e = \frac{57 \cdot \sin 49^\circ}{\sin 59^\circ} \approx 50,2 \text{ m}$

③ $\frac{y}{\sin Y} = \frac{w}{\sin W}$
 $\frac{27,8}{\sin 67^\circ} = \frac{16}{\sin W}$
 $\sin W = \frac{16 \cdot \sin 67^\circ}{27,8} \approx 0,5298$

$m \angle W \approx 32^\circ$

I 1) Non. Voici un exemple de triangle pour lequel ce n'est pas possible :



En substituant les valeurs connues dans la formule $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, on obtient $\frac{a}{\sin 108^\circ} = \frac{17}{\sin B} = \frac{12}{\sin C}$. On n'a donc jamais un des trois rapports complet, et il est donc impossible de trouver la valeur des autres inconnues.

2) Oui. Sachant que la somme des angles dans un triangle est de 180° , on peut connaître la valeur de **A**, **B** et **C** dans la formule $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. On connaît aussi la valeur de *a*, de *b* ou de *c*. On a donc toujours un des trois rapports complet et, en s'en servant, on peut trouver la valeur des deux autres inconnues.

Ai-je bien compris ?

- a) $m \overline{AB} \approx 79,5 \text{ cm}$ c) $m \overline{HJ} \approx 7,65 \text{ m}$
 b) $m \angle E \approx 45^\circ$ d) $m \angle M = 15^\circ$
- Le périmètre du triangle **RST** est d'environ 40,72 cm.

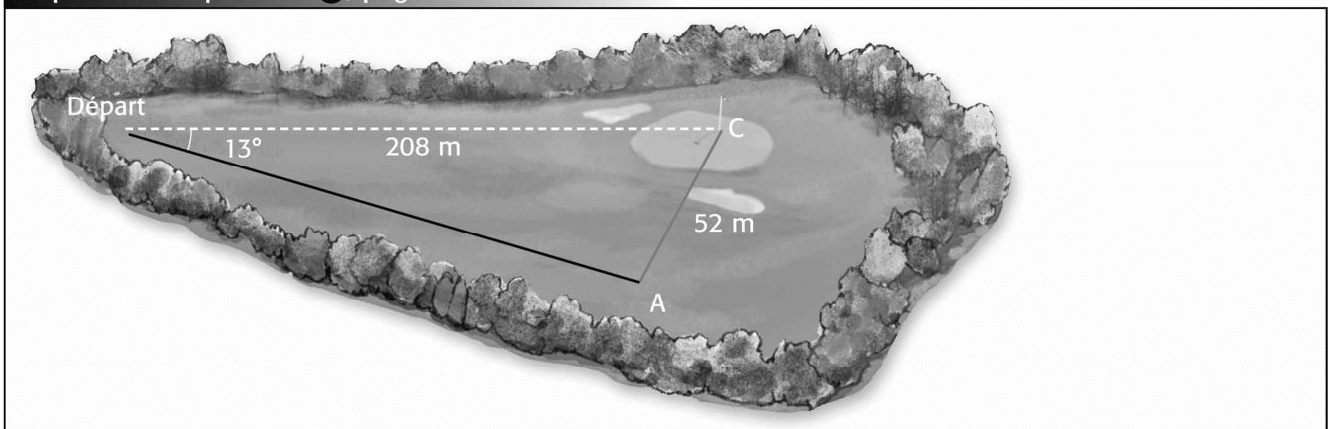
ACTIVITÉ D'EXPLORATION ② Oiselet

Remarque: Une portion de la deuxième phrase du premier paragraphe de l'activité d'exploration 2, *Oiselet*, devrait se lire comme suit: «... la balle a emprunté une trajectoire formant un angle de 13° avec la trajectoire optimale...»

A (voir au bas de la page)

B $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
 $\frac{208}{\sin A} = \frac{52}{\sin 13^\circ} = \frac{c}{\sin C}$
 $\sin A = \frac{208 \cdot \sin 13^\circ}{52} \approx 0,8998$
 $m \angle A \approx 64,1^\circ$

Réponse à la question **A**, page 182



Puisque l'angle **A** est un angle obtus, on calcule la mesure de cet angle :

$$180^\circ - 64,1^\circ \approx 115,9^\circ$$

L'angle formé par les trajectoires des deux coups de Patrice mesure environ $115,9^\circ$.

C Dans la section 1 de ce chapitre, on a vu que

$$\sin A = \sin (180^\circ - A).$$

Ainsi, la mesure d'angle d'environ $64,1^\circ$ satisfait aussi à la loi des sinus.

D (voir au bas de la page)

E Première représentation :

On trouve la mesure de l'angle **C** :

$$180^\circ - (13^\circ + 115,9^\circ) \approx 51,1^\circ$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{52}{\sin 13^\circ} = \frac{c}{\sin 51,1^\circ}$$

$$c \approx \frac{52 \cdot \sin 51,1^\circ}{\sin 13^\circ} \approx 180$$

La distance parcourue par la balle de Patrice au premier coup est d'environ 180 m.

Seconde représentation :

On trouve la mesure de l'angle **C** :

$$180^\circ - (13^\circ + 64,1^\circ) \approx 102,9^\circ$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{52}{\sin 13^\circ} \approx \frac{c}{\sin 102,9^\circ}$$

$$c \approx \frac{52 \cdot \sin 102,9^\circ}{\sin 13^\circ} \approx 225,4$$

La distance parcourue par la balle de Patrice au premier coup est d'environ 225,4 m.

Ai-je bien compris ?

1. En utilisant la loi des sinus, on obtient

$$\frac{10}{\sin A} = \frac{7}{\sin 35^\circ}$$

$$\sin A = \frac{10 \cdot \sin 35^\circ}{7}$$

$$m \angle A \approx 55^\circ$$

Pour trouver la mesure de l'angle obtus, on doit donc effectuer le calcul suivant :

$$m \angle A \approx 180 - 55 \approx 125^\circ$$

2. Triangle 1 :

$$m \angle D = 12^\circ$$

$$m \angle E \approx 16,5^\circ$$

$$m \angle F \approx 151,5^\circ$$

$$m \overline{EF} = 135 \text{ cm}$$

$$m \overline{DF} = 184 \text{ cm}$$

$$m \overline{DE} = 309,45 \text{ cm}$$

Triangle 2 :

$$m \angle D = 12^\circ$$

$$m \angle E \approx 163,5^\circ$$

$$m \angle F \approx 4,5^\circ$$

$$m \overline{EF} = 135 \text{ cm}$$

$$m \overline{DF} = 184 \text{ cm}$$

$$m \overline{DE} = 50,51 \text{ cm}$$

ACTIVITÉ

D'EXPLORATION

③ Triangulation planétaire

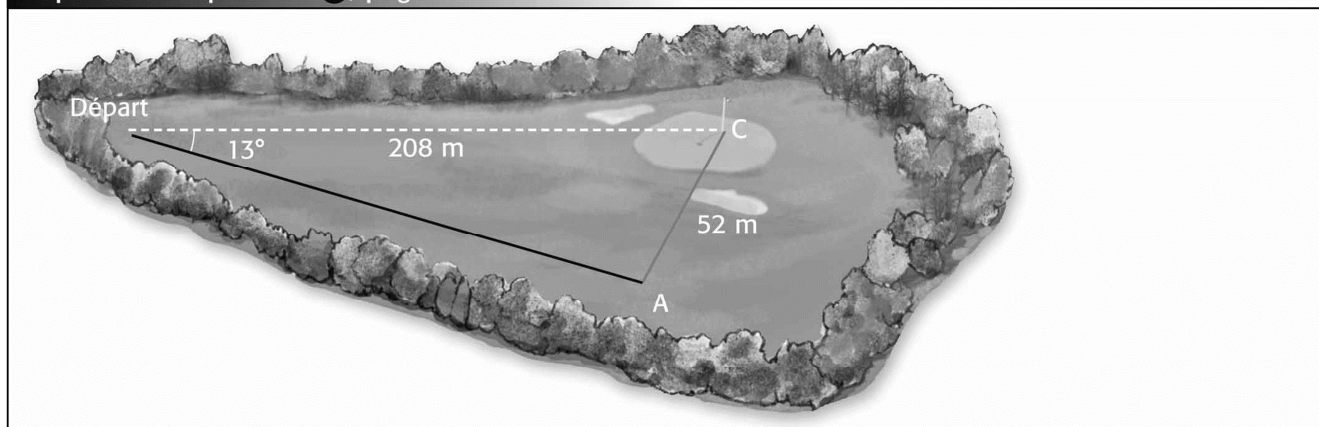
Manuel • p. 183

A Non, c'est impossible. La loi des sinus permet de résoudre un triangle, si l'on connaît la mesure d'un angle et celle du côté qui lui est opposé ainsi qu'une autre mesure d'angle ou de côté. Ici, pour le seul angle dont on connaît la mesure, la mesure du côté qui lui est opposé n'est pas connue.

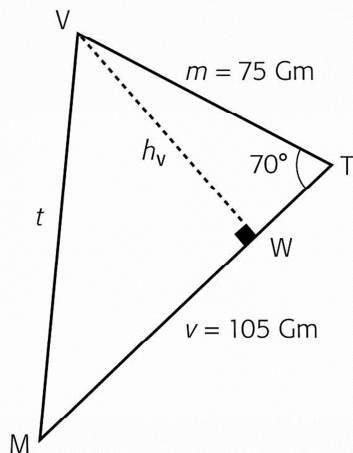
B Si le triangle était rectangle en **T**, la mesure de t serait égale à $\sqrt{(75)^2 + (105)^2}$. Puisque l'angle **T** mesure moins de 90° , la mesure du côté opposé à cet angle doit mesurer moins de $\sqrt{(75)^2 + (105)^2}$.

La distance séparant Vénus de Mars sera plus petite que $\sqrt{(75)^2 + (105)^2}$.

Réponse à la question **A**, page 182



- C** On nomme cette hauteur h_V :



$$\sin 70^\circ = \frac{h_V}{75}$$

$$m \ h_V = 75 \cdot \sin 70^\circ$$

$$m \ h_V \approx 70,48$$

La hauteur issue de **V** mesure environ 70,48 Gm.

- D** En appliquant la relation de Pythagore dans le triangle rectangle **VTW**, on trouve que le segment **TW** mesure environ 25,65 m.

On calcule la mesure du segment **MW**:

$$105 - 25,65 \approx 79,35$$

Le segment **MW** mesure environ 79,35 m.

En appliquant la relation de Pythagore dans le triangle rectangle **VMW**, on trouve que le segment **MV** mesure environ 106,13 m.

La distance séparant Mars de Vénus est d'environ 106,13 Gm.

Manuel • p. 184

- E** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$
- F** $h_c^2 = b^2 - x^2$ et $h_c^2 = a^2 - (c - x)^2$
- G**
- $$b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$$
- $$b^2 - x^2 = a^2 - (c^2 - 2cx + x^2)$$
- $$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$$
- $$b^2 + c^2 - x^2 + x^2 - 2cx = a^2$$
- $$b^2 + c^2 - 2cx = a^2$$

Dans le triangle rectangle **ACH**, on a $\cos A = \frac{x}{b}$. On a donc $b \cdot \cos A = x$. En substituant la valeur de x dans l'équation $b^2 + c^2 - 2cx = a^2$, on arrive à

$$b^2 + c^2 - 2cx = a^2$$

$$b^2 + c^2 - 2cb \cdot \cos A = a^2.$$

H 1) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$

2) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

I $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

$$(75,14)^2 = (75)^2 + (0,384)^2 - 2 \cdot 75 \cdot 0,384 \cdot \cos A$$

$$(75,14)^2 - (75)^2 - (0,384)^2 = -2 \cdot 75 \cdot 0,384 \cdot \cos A$$

$$\frac{(75,14)^2 - (75)^2 - (0,384)^2}{-2 \cdot 75 \cdot 0,384} = \cos A$$

$$-0,362 \approx \cos A$$

$$111,2^\circ \approx m \angle A$$

L'angle formé par les lignes de visée de la Lune et de Vénus à partir de la Terre est d'environ $111,2^\circ$.

Ai-je bien compris ?

- a) $m \overline{RS} \approx 13,91$ m c) $m \angle C \approx 50,1^\circ$
 b) $m \overline{KH} \approx 9,34$ cm d) $m \angle E \approx 61,3^\circ$

Mise en pratique

Manuel • p. 187

1. Niveau de difficulté : faible

- a) $m \overline{AB} \approx 5,64$ m c) $m \overline{AB} = 140$ cm
 b) $m \overline{AB} \approx 13,6$ cm d) $m \overline{AB} \approx 1,82$ m

2. Niveau de difficulté : moyen

On détermine la mesure du troisième angle:
 $180^\circ - (42^\circ + 64^\circ) = 74^\circ$

Dans un triangle, le plus grand angle est opposé au plus grand côté. Ici, l'angle de 74° est opposé au côté mesurant 50 cm.

On utilise la loi des sinus pour déterminer les mesures x et y des deux autres côtés:

$$\frac{50}{\sin 74^\circ} = \frac{x}{\sin 42^\circ}$$

$$x \approx 34,8 \text{ cm}$$

$$\frac{50}{\sin 74^\circ} = \frac{y}{\sin 64^\circ}$$

$$y \approx 46,75 \text{ cm}$$

On détermine le périmètre du triangle:

$$50 + 46,75 + 34,8 \approx 131,55$$

Le périmètre de ce triangle est d'environ 131,55 cm.

3. Niveau de difficulté : moyen

Dans le triangle **ABD**,

$$m \angle D = 180^\circ - (51^\circ + 54^\circ) = 75^\circ$$

On détermine la mesure du segment **BD** à l'aide de la loi des sinus :

$$\frac{100}{\sin 75^\circ} = \frac{m \overline{BD}}{\sin 51^\circ}$$

$$m \overline{BD} \approx 80,46 \text{ m}$$

On utilise le rapport trigonométrique tangente afin de déterminer la hauteur du rocher Percé :

$$\tan 41^\circ \approx \frac{m \overline{CD}}{80,46}$$

$$m \overline{CD} \approx 69,94$$

La hauteur du rocher Percé est d'environ 69,94 m.

4. Niveau de difficulté : faible

a) $m \angle C \approx 37,3^\circ$

b) $m \angle C \approx 37,3^\circ$

c) $m \angle C \approx 79^\circ$

d) $m \angle C \approx 119,7^\circ$

Manuel • p. 188

5. Niveau de difficulté : faible

a) $m \angle A \approx 51^\circ$ c) $m \angle K \approx 115,7^\circ$

$m \overline{AB} \approx 20,4 \text{ m}$ $m \angle L \approx 32,3^\circ$

$m \overline{BC} \approx 16,7 \text{ m}$ $m \overline{KM} \approx 10,1 \text{ m}$

b) $m \angle E = 54^\circ$

$m \overline{EF} \approx 64,3 \text{ mm}$

$m \overline{DF} \approx 52,6 \text{ mm}$

6. Niveau de difficulté : moyen

a) On détermine la mesure de l'angle **B** qui est l'angle homologue à l'angle **E** :

$$\frac{25}{\sin B} = \frac{5,4}{\sin 12^\circ}$$

$$m \angle B \approx 74,3^\circ$$

On trouve la mesure de l'angle obtus :
 $m \angle B \approx 180^\circ - 74,3^\circ \approx 105,7^\circ$

L'angle **E** mesure environ $105,7^\circ$.

b) On détermine la mesure de l'angle **C** :

$$m \angle ACB = \angle DCE \approx 180^\circ - (105,7^\circ + 12^\circ) \approx 62,3^\circ$$

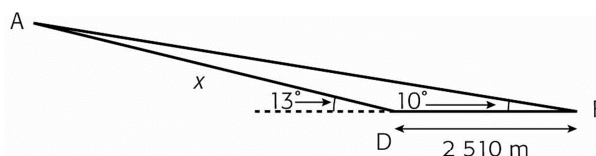
On détermine la mesure du segment **DE** à l'aide de la loi des sinus :

$$\frac{60}{\sin 105,7^\circ} \approx \frac{m \overline{DE}}{\sin 62,3^\circ}$$

$$m \overline{DE} \approx \frac{60 \cdot \sin 62,3^\circ}{\sin 105,7^\circ} \approx 55,2$$

Le segment **DE** mesure environ 55,2 cm.

7. Niveau de difficulté : élevé



On détermine d'abord les mesures des angles intérieurs du triangle :

$$m \angle D = 180^\circ - 13^\circ = 167^\circ$$

$$m \angle A = 180^\circ - (167^\circ + 10^\circ) = 3^\circ$$

On détermine la valeur de x à l'aide de la loi des sinus :

$$\frac{2\,510}{\sin 3^\circ} = \frac{x}{\sin 10^\circ}$$

$$x \approx 8\,328$$

La distance qui sépare l'avion du début de la piste d'atterrissage est d'environ 8 328 m.

8. Niveau de difficulté : faible

a) $m \overline{AC} \approx 38,61 \text{ cm}$ d) $m \angle M \approx 22,6^\circ$

b) $m \overline{FG} \approx 16,53 \text{ m}$ e) $m \angle Q \approx 40,2^\circ$

c) $m \angle H \approx 110,2^\circ$ f) $m \overline{RS} \approx 32,65 \text{ cm}$

9. Niveau de difficulté : moyen

En utilisant la loi des sinus, on a les égalités suivantes pour un triangle donné **ABC**.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Dans un triangle isocèle, on a deux côtés isométriques ; par exemple, les côtés b et c . Le rapport devient donc le suivant :

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\sin C}$$

On cherche à trouver la mesure des angles. On peut multiplier par la même mesure sans changer l'égalité.

$$\frac{\sin B \cdot \sin C}{b} \cdot \frac{b}{\sin B} = \frac{\sin B \cdot \sin C}{b} \cdot \frac{b}{\sin C}$$

$$\sin C = \sin B$$

$$\sin^{-1}(\sin C) = \sin^{-1}(\sin B), \text{ donc } m \angle C = m \angle B.$$

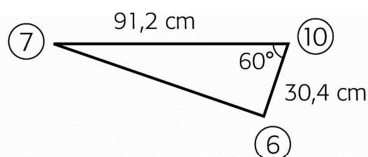
Manuel • p. 189

10. Niveau de difficulté : moyen

La distance entre chaque quille étant la même, la distance entre la quille ⑥ et la quille ⑩ est de 30,4 cm, car

$$\frac{91,2}{3} = 30,4.$$

Les trois angles du triangle équilatéral mesurent chacun 60° .



On détermine la distance qui sépare les quilles ⑥ et ⑦ à l'aide de la loi des cosinus :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$a = \sqrt{(91,2)^2 + (30,4)^2 - 2(91,2) \cdot (30,4) \cdot \cos 60^\circ}$$

$$a \approx 80,43$$

La distance entre les quilles ⑥ et ⑦ est d'environ 80,43 cm.

11. Niveau de difficulté : moyen

On détermine la hauteur du plus grand édifice à l'aide du rapport trigonométrique tangente.

$$90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$$

$$\tan 18^\circ = \frac{42}{h_G}$$

$$h_G \approx 129,26 \text{ m}$$

On détermine la différence de hauteur entre les deux édifices à l'aide du rapport trigonométrique tangente :

$$\tan 27^\circ = \frac{x}{42}$$

$$x \approx 21,4 \text{ m}$$

On détermine la hauteur du petit édifice :

$$h_p = 129,26 - 21,4 \approx 107,86$$

Le plus haut édifice mesure environ 129,26 m et le plus petit, environ 107,86 m.

12. Niveau de difficulté : faible

La distance qui séparerait la balle de la coupe avant le premier coup roulé de Bernard est de 11,54 m.

13. Niveau de difficulté : élevé

On détermine la mesure des angles B et E à l'aide de la loi des cosinus :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$\cos B = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}$$

$$\cos B = \frac{(10)^2 - (12)^2 - (4)^2}{-2 \cdot 12 \cdot 4}$$

$$m \angle B = m \angle E \approx 51,3^\circ$$

$$m \angle EAB = 180 - 2 \cdot 51,3 = 77,4^\circ$$

$m \overline{DE} = 4 \text{ cm}$ puisque $\triangle ADE \cong \triangle ABC$ (condition minimale d'isométrie CAC).

On trouve ensuite la mesure du segment BE en utilisant la loi des cosinus dans le triangle ABE.

$$a^2 = b^2 + e^2 - 2be \cdot \cos A$$

$$a^2 = (12)^2 + (12)^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cdot \cos 77,4^\circ$$

$$a = 15 \text{ cm}$$

$$m \overline{CD} = m \overline{BE} - m \overline{DE} - m \overline{BC} = 15 - 4 - 4 = 7$$

La mesure de \overline{CD} est de 7 cm.

14. Niveau de difficulté : faible

Oui, car pour un triangle donné ABC, rectangle en C, et en utilisant la loi des cosinus, on obtient

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 90^\circ.$$

Mais, comme le cosinus d'un angle droit vaut 0, on obtient donc l'égalité suivante : $c^2 = a^2 + b^2$.

Manuel • p. 190

15. Niveau de difficulté : moyen

a) $m \angle C = 180^\circ - (57^\circ + 48^\circ) = 75^\circ$

On trouve la mesure du segment DE en utilisant la loi des cosinus dans le triangle DEF.

$$(m \overline{DE})^2 = (2,5)^2 + (3,9)^2 - 2 \cdot 2,5 \cdot 3,9 \cdot \cos 97^\circ$$

$$m \overline{DE} \approx 4,88 \text{ m}$$

Avec la loi des sinus, on trouve la mesure du segment CD.

$$\frac{\sin 75^\circ}{4,88} = \frac{\sin 57^\circ}{m \overline{CD}}$$

$$m \overline{CD} = 4,24 \text{ m}$$

b) On trouve la mesure du segment BD avec la loi des cosinus dans le triangle ABD.

$$(m \overline{BD})^2 = (21)^2 + (25)^2 - 2 \cdot 21 \cdot 25 \cdot \cos 70^\circ$$

$$m \overline{BD} \approx 26,59 \text{ mm}$$

Avec la relation de Pythagore, on obtient

$$(m \overline{CD})^2 = (16)^2 + (26,59)^2$$

$$m \overline{CD} \approx 31,03 \text{ mm}$$

16. Niveau de difficulté : moyen

On trouve la mesure des segments en utilisant la formule de la distance entre deux points :

$$d(P, Q) = 13$$

$$d(R, Q) = \sqrt{128} \approx 11,31$$

$$d(P, R) = 5$$

On détermine la mesure d'un des trois angles avec la loi des cosinus :

$$q^2 = r^2 + p^2 - 2rp \cdot \cos Q$$

$$(5)^2 = (13)^2 + (\sqrt{128})^2 - 2 \cdot 13\sqrt{128} \cdot \cos Q$$

$$m \angle Q \approx 22,4^\circ$$

En utilisant la loi des sinus, on trouve la mesure des deux autres angles.

L'angle **R** est un angle obtus.

$$\frac{q}{\sin Q} = \frac{p}{\sin P} = \frac{r}{\sin R}$$
$$\frac{5}{\sin 22,38^\circ} \approx \frac{11,31}{\sin P} \approx \frac{13}{\sin R}$$
$$m \angle P \approx 59,5^\circ$$

$$m \angle R \approx 180^\circ - (59,5^\circ + 22,4^\circ) \approx 98,1^\circ$$

Les mesures des angles **P**, **Q** et **R** sont les suivantes : environ $59,5^\circ$, environ $22,4^\circ$ et environ $98,1^\circ$ respectivement.

17. Niveau de difficulté : moyen

- a) On trouve la distance entre le point de départ et l'arrivée en utilisant la loi des cosinus.

$$b^2 = (200)^2 + (250)^2 - 2 \cdot 200 \cdot 250 \cdot \cos 140^\circ$$
$$b \approx 423,21$$

Sean doit marcher environ 423,21 m.

- b) On trouve le temps total pour la durée d'un parcours.

$$\text{Temps total} \approx 0,75 + \frac{423,21}{\frac{6\,000}{60}}$$
$$\approx 0,75 + 4,2321$$
$$\approx 4,9821$$
$$\approx 5 \text{ min}$$

Si l'entraînement dure une heure, Sean pourra faire le parcours 12 fois.

$$(m \overline{GL})^2 = (21,5)^2 + (10)^2 - 2 \cdot (21,5) \cdot (10) \cdot \cos 53^\circ$$
$$m \overline{GL} \approx 17,42 \text{ km}$$

Les coordonnées de **G** sont (7,99, 6,01).

On détermine la distance entre **G** et **L**:

$$m \overline{GL} = \sqrt{(12,1 - 7,99)^2 + (21,5 - 6,01)^2}$$
$$m \overline{GL} = \sqrt{277,03}$$
$$m \overline{GL} \approx 16,64$$

La distance que le deuxième troupeau devra parcourir pour rejoindre le premier troupeau est de 16,64 km.