Correction devoir maison

Exercice 1 :

1)Si n est un nombre entier, comment exprimer l'entier qui suit n ?

On le note $n + 1$.

2)Démontrer que deux nombres entiers consécutifs sont premiers entre eux.

Soit n un entier naturel tel que $n > 0$. On considère donc n et $n + 1$ deux entiers consécutifs.

$n + 1 > n$ donc PGCD (n + 1 ; n) = PGCD (n ; n + 1 – n) = PGCD (n ; 1) = 1

3)Démontrer que deux nombres impairs consécutifs sont premiers entre eux.

Soit n un entier naturel. Si $n = 0$, alors $n+1 = 1$ et $n + 3 = 3$ or 1 et 3 sont premiers entre eux.
Un nombre impair peut s'écrire sous la forme $2n + 1$.
L'impair consécutif à $2n + 1$ sera donc $2n + 3$.
Si $n = 0$, alors $2n+1 = 1$ et $2n + 3 = 3$ or 1 et 3 sont premiers entre eux.
Maintenant, soit $n > 0$:
$2n + 3 > 2n + 1$ donc PGCD (2n + 3 ; 2n + 1) = PGCD (2n + 1 ; 2n + 3 - (2n + 1))
= PGCD (2n + 1 ; 2)
Or $n + 1$ est impair donc PGCD (2n + 1 ; 2) = 1

Exercice 2 :

1)a) Ecrire la liste des diviseurs de 28.

1 ; 2 ; 4 ; 7; 14 ; 28

b) Calculer la somme des diviseurs de 28 autres que lui-même. Que remarque-t-on ?

$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$. La somme des diviseurs de 28 autres que lui même est égale au nombre lui-même.

2) Un nombre entier positif N est dit parfait lorsqu'il est égal à la somme de ses diviseurs autres que lui-même.

a) Montrer que 6 et 496 sont des nombres parfaits.

Diviseurs de 6 : 1 ; 2 ; 3 ; 6 donc $1 + 2 + 3 = 6$; 6 est un nombre parfait.

Diviseurs de 496 : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 31 ; 62 ; 124 ; 248 ; 496 :

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$; 496 est un nombre parfait.

b) 120 est-il un nombre parfait ? Justifier la réponse.

Liste des diviseurs de 120 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 24 ; 30 ; 40 ; 60 ; 120

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 + 10 + 12 + 15 + 20 + 24 + 30 + 40 + 60 = 240 donc 120 n'est pas un nombre parfait.

3) Un nombre premier peut-il être parfait ? Justifier la réponse.

Soit n un nombre premier. Alors il est divisible uniquement par 1 et lui-même, donc la somme de ses diviseurs autres que lui est $1 \neq n$, donc il n'est pas parfait.