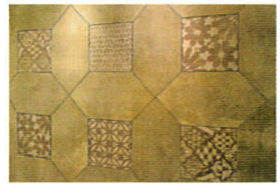
Travailler autrement

Utilisable en AP

À chacun sa méthode !

Deux énoncés pour un exercice

Voici un carrelage mural constitué par :
- des carreaux à motifs de forme carrée de 20 cm de côté espacés de 20 cm ;
- des carreaux dorés de forme hexagonale.



Exercice 1

1. Faire un dessin à main levée du carrelage ci-dessus vu de face. Nommer HEXAGO un des carreaux hexagonaux sur le dessin.
2. Déterminer, au millimètre près, toutes les longueurs des côtés de l'hexagone HEXAGO.
Justifier les calculs s'il y en a.
3. Déterminer tous les angles de l'hexagone HEXAGO. Justifier.
4. Démontrer que l'aire d'un carreau hexagonal est égale à une fois et demie l'aire d'un carreau carré.

Exercice 2

1. a. Tracer quatre rectangles différents : EFGH, IJKL et MNOP. Tracer leurs diagonales.
   b. La propriété suivante est-elle vraie ? Justifier.
   « Les quatre sommets d'un rectangle sont situés sur un cercle de centre le point d'intersection de ses diagonales. »
2. a. Tracer un cercle de rayon 5 cm.
   Placer quatre points A, B, C et D sur ce cercle (ils se suivent dans cet ordre sur le cercle).
   Tracer le quadrilatère ABCD.
   b. La propriété suivante est-elle vraie ? Justifier.
   « Si les quatre sommets d'un quadrilatère sont situés sur un cercle, alors c'est un rectangle. »

Exercice 1

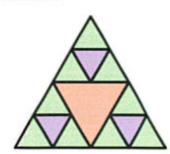
1. Faire un plan à l'échelle 1/10 du carrelage ci-dessus (avec six carrés visibles et sept hexagones visibles).
2. Déterminer toutes les longueurs réelles des côtés d'un carreau hexagonal, au millimètre près.
Justifier les calculs s'il y en a.
3. Démontrer que l'aire d'un carreau carré est égale aux deux tiers de celle d'un carreau hexagonal.

Exercice 2

1. La propriété suivante est-elle vraie ? Justifier.
« Les quatre sommets d'un rectangle sont situés sur un cercle de centre le point d'intersection de ses diagonales. »
2. La propriété suivante est-elle vraie ? Justifier.
« Si les quatre sommets d'un quadrilatère sont situés sur un cercle, alors c'est un rectangle. »
Si elle est fausse, la modifier afin qu'elle devienne vraie.

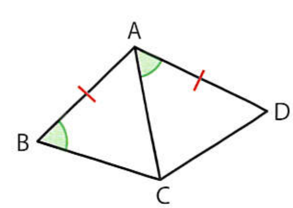
Écriture d'un énoncé

1. Inventer l'énoncé d'un exercice utilisant la figure ci-contre.
2. Échanger cet énoncé avec son binôme et résoudre l'exercice.



Analyse d'une production

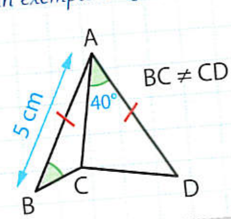
En utilisant les informations codées sur la construction ci-contre, les triangles ABC et ADC sont-ils égaux ?



Voici les réponses de trois élèves à l'exercice ci-dessus.

Élise

J'ai trouvé un exemple où ça ne marche pas.



Florian

Dans les triangles ABC et ACD,
$\widehat{ABC} = \widehat{CAD}$ et AB = AD.
Or si deux triangles ont deux côtés de même longueur et un angle de même mesure, alors ils sont égaux.
Donc les triangles ABC et ADC sont égaux.

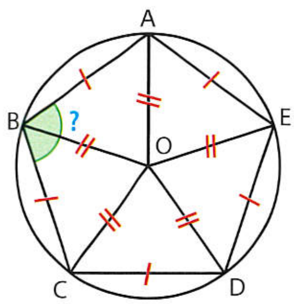
Mathilde

Les triangles ne sont pas égaux car l'angle de même mesure doit être compris entre deux côtés de même longueur.

- Analyser ces trois réponses et corriger les erreurs s'il y en a.

59 Pentagone régulier

1. En utilisant le codage de la figure ci-dessous, que peut-on dire des cinq triangles OAB, OBC, OCD, ODE et OEA ?
2. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

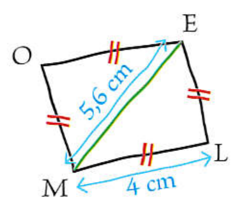


D'après DNB Métropole, 2013.

60 Losange ou carré ?

Voici la figure à main levée d'un quadrilatère :

1. Reproduire en vraie grandeur ce quadrilatère.
2. Pourquoi peut-on affirmer que OELM est un losange ?

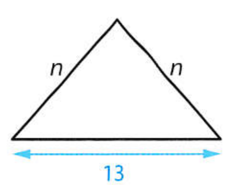


3. Marie soutient que OELM est un carré, mais Charlotte est sûre que ce n'est pas vrai. Qui a raison ? Pourquoi ?

D'après DNB Pondichéry, 2015.

61 Triangle isocèle

Dans la figure ci-contre, n est un nombre positif.



1. Quelle est la plus petite valeur possible pour n ?
2. Pour quelle valeur de n le triangle est-il rectangle ? Justifier.

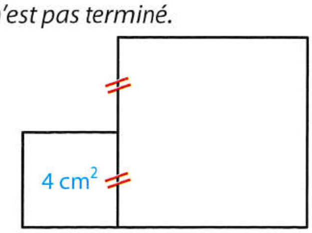
Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche.

D'après Khanacademy.

62 Problème de construction

Construire un carré dont l'aire est égale à la somme des aires des deux carrés représentés ci-dessous.

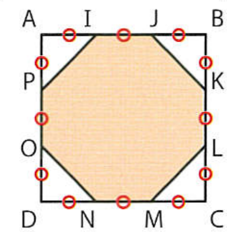
Vous laisserez apparentes toutes vos recherches, même si le travail n'est pas terminé.



D'après DNB Amérique du Nord, 2012.

63 Avec un octogone

Dans la figure ci-dessous, ABCD est un carré de côté 12 cm et les segments de même longueur sont codés.



1. Justifier que les triangles API, JBK, ODN et MCL sont des triangles égaux.
2. Calculer JK puis dire si l'octogone est un octogone régulier.
3. Calculer l'aire de l'octogone IJKLMNOP.

Un octogone régulier est un polygone à 8 côtés dont tous les côtés sont de même longueur.

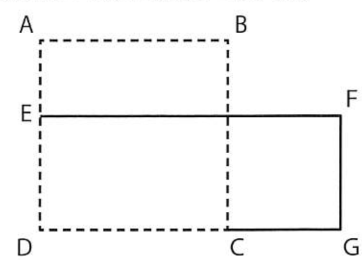
4. Les diagonales du carré ABCD se coupent en S. Construire la figure en vraie grandeur et tracer le cercle de centre S et de diamètre 12 cm.
5. Le disque de centre S et de diamètre 12 cm a-t-il une aire supérieure à l'aire de l'octogone ? Justifier la réponse.

D'après DNB Métropole, 2010.

64 Aires égales

Prise d'initiative

Le dessin ci-dessous représente une figure composée d'un carré ABCD et d'un rectangle DEFG.
E est un point du segment [AD].
C est un point du segment [DG].
Dans cette figure, la longueur AB peut varier mais on a toujours : AE = 15 cm et CG = 25 cm.



1. Dans cette question, on suppose que AB = 40 cm.
   a. Calculer l'aire du carré ABCD.
   b. Calculer l'aire du rectangle DEFG.
2. Peut-on trouver la longueur AB de sorte que l'aire du carré ABCD soit égale à l'aire du rectangle DEFG ? Si oui, calculer AB. Si non, expliquer pourquoi.

Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche.

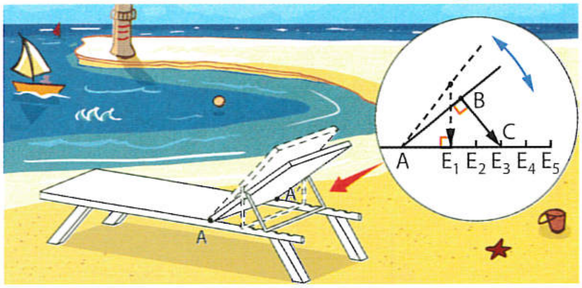
D'après DNB Métropole, 2012.

Problèmes

57 Transat

Prise d'initiative

TECH



Voici le fonctionnement d'un transat. Le dossier du transat pivote autour de l'axe [AA']. Une barre de soutien permet de régler l'inclinaison. Cette barre [BC] est liée au dossier en B et pivote autour de ce point.
Pour choisir l'inclinaison du dossier, on cale la barre [BC] dans une des encoches E_1, E_2, E_3, E_4 ou E_5 qui sont régulièrement espacées.
Si C est dans l'encoche E_3, alors [BC] est perpendiculaire à [AB].
Si C est dans l'encoche E_1, alors [BC] est perpendiculaire à $[AE_1]$.
On donne $AE_3 = 50$ cm et $BC = 30$ cm.

- Est-il possible de caler la barre [BC] dans l'encoche E_4 ? et dans l'encoche E_5 ? Justifier les réponses.

D'après Rallye mathématique sans frontières, 2008.

58 La pyramide du Louvre (Paris)

Prise d'initiative

PEAC

Léo prépare son voyage à Paris et cherche quelques informations sur la pyramide du Louvre avant de partir.
Voici ce qu'il lit sur deux sites Internet différents :

Site A :

> La pyramide est constituée de 675 losanges en verre dont les diagonales mesurent 2,9 m et 1,9 m. Sa hauteur est de 21,6 m et sa base fait 1 000 m².

Site B :

> La pyramide est constituée de 603 losanges et 70 triangles en verre. Sa hauteur est de 21,6 m et sa base est un carré de côté 35,4 m.

1. Léo est intrigué par les informations données par les sites A et B. Qu'est-ce qui le gène et pourquoi ?

Une semaine plus tard, Léo visite le Louvre. Il observe bien la grande pyramide, il prend des notes et fait deux photos.

Notes

– La grande pyramide du Louvre a une base carrée et quatre faces triangulaires.
– Trois faces sont parfaitement identiques et exclusivement constituées de losanges et de triangles équilatéraux.
– Une face est identique aux autres mais elle contient la porte d'entrée (photo 2).
– La base de la pyramide est un carré dont les côtés mesurent 35,4 m (j'ai mesuré à l'extérieur).
– Les diagonales des losanges en verre font 2,9 m et 1,9 m.
– Les triangles équilatéraux en verre ont trois côtés de 1,9 m.

Photo 1

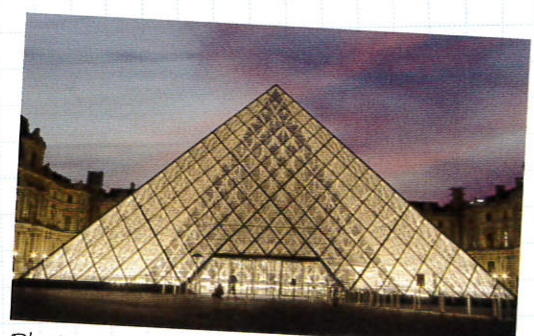


Photo 2

2. a. En se fiant à ce qu'a photographié et relevé Léo, trouver le nombre exact de losanges et de triangles équilatéraux sur cette pyramide. Détailler la méthode de calcul.

b. Comment peut-on expliquer que la pyramide ait une base carrée de côté 35,4 m alors que chaque triangle équilatéral en verre a pour côté 1,9 m ?

c. Finalement, quelles informations données par les sites A et B sont conformes à ce qu'a observé Léo ?

3. En ne tenant pas compte de la porte d'entrée, quel pourcentage de la surface de la pyramide du Louvre est en verre ? Justifier.

Pour prolonger ce problème, tu peux réaliser une maquette de la grande pyramide du Louvre à l'échelle 1/500 en représentant les losanges, les triangles et la porte.

La devanture du magasin est représentée par le rectangle ABDC avec AB = 7,5 m et BD = 3,3 m.

Le boulanger souhaite que le nom de son enseigne soit sur une pancarte rectangulaire centrée sur la façade qui occuperait $\frac{1}{9}$ de la surface de celle-ci. La pancarte serait soutenue par des câbles à chacune de ses extrémités.

1. Déterminer les dimensions de la pancarte que le boulanger doit commander auprès de son imprimeur.
2. Déterminer la longueur nécessaire de câbles, au mètre près, pour soutenir la pancarte.

53 Pentagon

LV

This is a picture of the Pentagon in the United States of America. It's the ministry of American defense. In the picture above, we can see five rectangles whose length is the internal side of the smallest pentagon and whose width is the distance between the two pentagons.

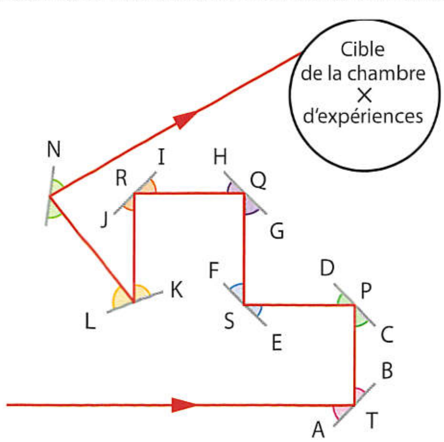
échelle $\frac{1}{10000}$

1. Calculate the surface of this building.
2. Make a plan of the Pentagon on a scale of $\frac{1}{5000}$.

54 Laser mégajoule

PC

Le laser mégajoule est un bâtiment situé en Gironde, inauguré en 2014. Il permet de simuler des essais nucléaires grâce à la création et l'amplification de faisceaux laser de très grande puissance qui convergent vers une cible contenue dans une chambre d'expérience sphérique située au centre du bâtiment.
Le transport des faisceaux se fait à l'aide de miroirs et de lentilles afin que ces derniers puissent pénétrer dans la chambre d'expérience.
On a modélisé ci-dessous le chemin d'un faisceau.

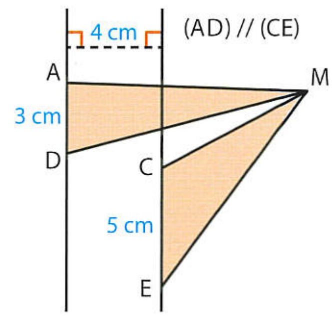


Les segments [AB], [CD], [EF], [GH], [IJ], [KL] et [MN] sont des miroirs. Les angles de même couleur sont de même mesure.
Les miroirs [CD], [EF] et [GH] sont parallèles.

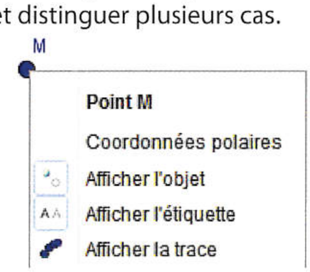
1. Montrer que les angles verts, bleus et roses sont de même mesure.
2. Montrer que les droites (RQ) et (SP) sont parallèles.

55 À la recherche du point inconnu

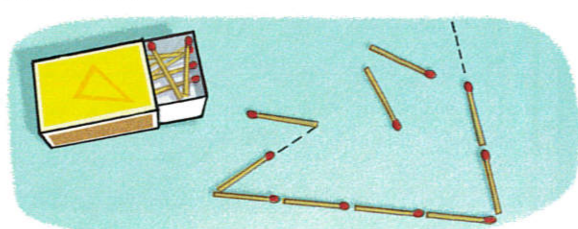
Dans la figure ci-dessous, (AD) et (CE) sont deux droites parallèles distantes de 4 cm telles que AD = 3 cm et CE = 5 cm.



1. Construire cette figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique et placer un point M mobile dans le plan.
2. Déterminer les points M tels que les aires des deux triangles soient égales. On pourra utiliser la trace du point M et distinguer plusieurs cas.



56 Les allumettes



On dispose de 10 allumettes de 3,5 cm chacune.
On veut former des triangles en utilisant ces 10 allumettes exactement.

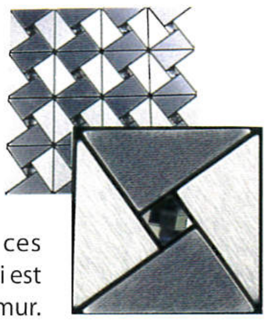
1. Avec ces allumettes, peut-on former un triangle dont les côtés mesurent :
   a. 10,5 cm, 10,5 cm et 14 cm ?
   b. 3,5 cm, 10,5 cm et 21 cm ?
   Justifier les réponses.
2. Combien de triangles non égaux entre eux peut-on former avec ces 10 allumettes ? Écrire toutes les solutions possibles.

D'après Rallye mathématique sans frontières.

Problèmes

Pour mieux cibler les compétences			
Chercher	48 55 56 57	Raisonner	50 54 55 61
Modéliser	50 53 57 62	Calculer	51 53 57
Représenter	53 55 60	Communiquer	49 54 57 58

48 Mosaïque carrée



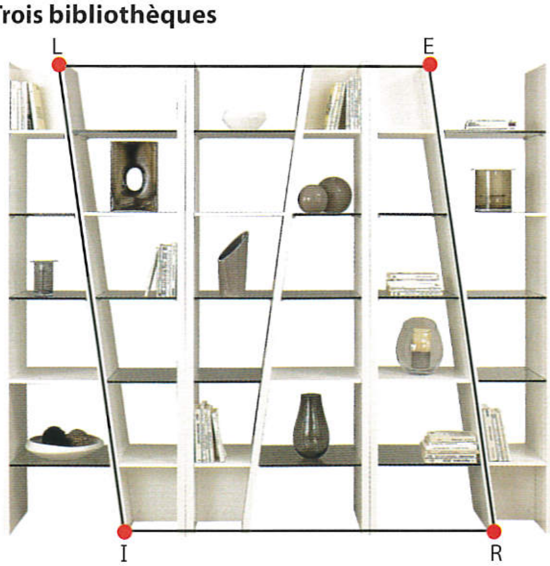
Ce carrelage est constitué de triangles rectangles égaux de couleurs blanche ou grise dont les côtés de l'angle droit mesurent 6 cm et 8 cm.

Assemblés par quatre, ces triangles forment un motif, qui est ensuite répété pour paver le mur.

Le vide laissé par les quatre triangles au centre du motif est comblé par des petits cristaux brillants.

1. Montrer que les quatre triangles ainsi placés forment un carré.
2. Montrer que le vide resté au centre du motif a également la forme d'un carré.
3. Combien faudra-t-il de triangles blancs et de triangles gris pour carreler un mur de 3 m de long sur 2,40 m de haut (on négligera la place occupée par les joints entre les carreaux) ?
4. Quelle surface devra être comblée par les petits cristaux ?

49 Trois bibliothèques



Cet ensemble de rangements a été construit à partir de trois bibliothèques identiques, l'étagère du centre ayant été retournée.

• Montrer que LIRE est un parallélogramme.

50 Encadrer

Wafa a fait encadrer un dessin rectangulaire de 12 cm sur 16 cm par la société d'encadrement de M. Carré.

Elle estime que le cadre réalisé n'est pas rectangulaire et le fait savoir à M. Carré.

Celui-ci prend une équerre dans son bureau et la met contre un coin du cadre, ils constatent tous les deux qu'il y a bien un angle droit et que les deux côtés de cet angle droit mesurent 12 cm et 16 cm.

1. Cette vérification permet-elle à M. Carré d'affirmer que le cadre est rectangulaire ? Justifier.
2. Wafa demande à M. Carré de mesurer les deux diagonales du cadre. Il trouve 20 cm et 20,3 cm.
   Que peut en conclure Wafa ? Justifier.
3. M. Carré mesure les deux autres côtés : ils font 12,2 cm et 16,2 cm. Mais il ajoute que le devis signé au moment de la commande stipule qu'une erreur de 1° sur les angles du cadre est considérée comme négligeable et que le contrat est donc respecté.
   a. Modéliser cette situation à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
   b. Wafa peut-elle exiger que M. Carré recommence le travail ? Pourquoi ?

51 Mosaïque tressée

Un carreleur a réalisé une mosaïque carrée de 1 mètre de côté en utilisant :

• des carreaux noirs de forme carrée ;
• des carreaux rouges de forme rectangulaire de 10 cm de longueur et de 5 cm de largeur.

Il n'y a aucun espace entre les carreaux.

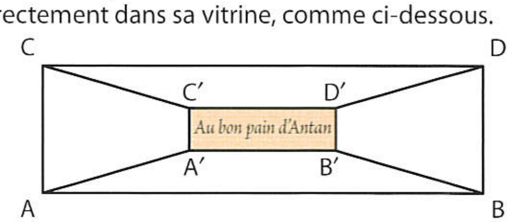
Voici une photo d'une partie de sa réalisation :

Les carreaux rectangulaires sont vendus par paquets de 40 carreaux et les carreaux carrés sont vendus par paquets de 50 carreaux.

1. Combien mesure le côté des carreaux noirs ?
2. Combien de paquets de carreaux rouges et de carreaux noirs a-t-il dû acheter ? Écrire les étapes du raisonnement.

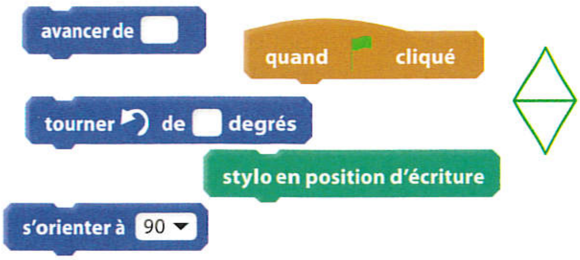
52 Enseigne de boulangerie

Une boulangerie souhaite mettre son nom d'enseigne directement dans sa vitrine, comme ci-dessous.

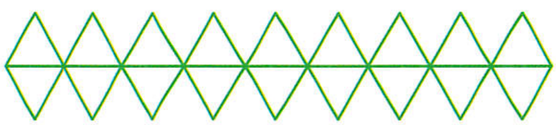


46 Pavage

1. À l'aide des instructions ci-dessous, écrire un script afin de tracer la figure verte composée de deux triangles équilatéraux.



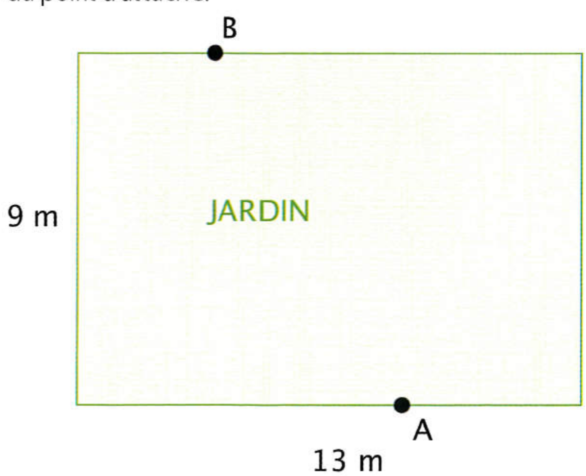
2. Compléter le script précédent afin de tracer cette frise.



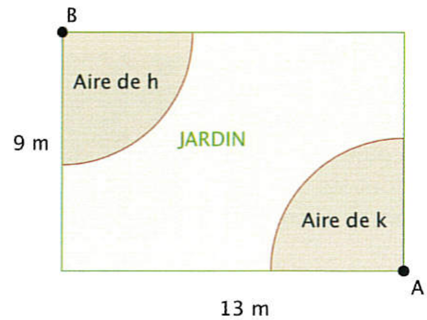
3. Compléter le script précédent afin de réaliser un pavage en reproduisant plusieurs fois cette frise.

47 Attention chiens méchants !

Mathieu a deux chiens qui se bagarrent tout le temps. Il veut pouvoir les laisser dehors, dans son jardin rectangulaire de 9 m sur 13 m. Il décide de les attacher chacun avec une corde le long d'un des quatre murs de son jardin. La corde leur permet d'aller jusqu'à 5 m du point d'attache.

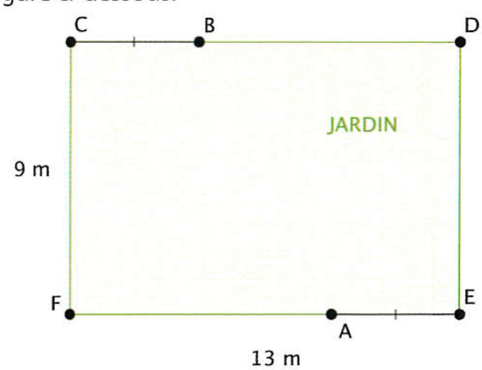


1. Avec un logiciel de géométrie dynamique :
   a. modéliser le jardin par un rectangle et les points d'attache des cordes par deux points A et B pouvant se déplacer sur les murs ;
   b. calculer l'aire dont disposent les chiens si les points d'attache des cordes se trouvent chacun dans un coin du jardin à l'aide de la création d'un secteur circulaire et de l'aire (outils : et).



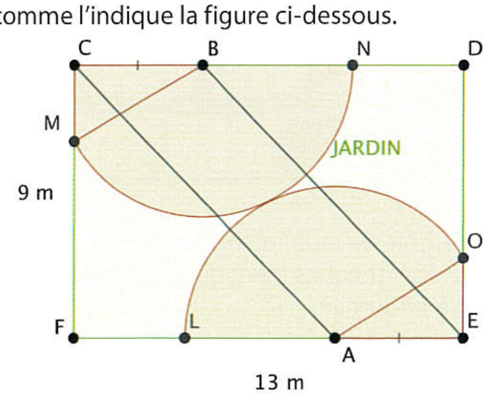
   c. Expliquer pourquoi la distance entre les deux points d'attache des cordes doit être supérieure à 10 m.

2. Mathieu décide de placer les points d'attache des cordes sur les deux murs les plus longs, à la même distance des coins du jardin, comme l'indique la figure ci-dessous.



   a. Construire le quadrilatère CBEA et montrer que c'est un parallélogramme.
   b. À l'aide du logiciel, déterminer les emplacements possibles pour les points d'attache des cordes.
   c. Démontrer la réponse donnée à la question précédente par le calcul.

3. Mathieu s'est finalement décidé et a fixé les cordes comme l'indique la figure ci-dessous.



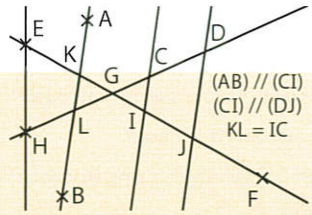
   a. Justifier que les triangles BCM et AEO sont des triangles égaux.
   b. À l'aide du logiciel, calculer la surface dont dispose chaque chien pour cette position.

Faire le point

Vérifie tes connaissances.

QCM

Donner la seule réponse correcte parmi les trois proposées.



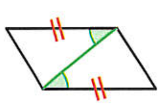
1 Utiliser les propriétés des angles et des triangles	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Sur la figure ci-dessus, citer deux angles alternes-internes de même mesure :	$\widehat{LKG}$ et $\widehat{IJD}$	$\widehat{KLH}$ et $\widehat{LKI}$	$\widehat{EKA}$ et $\widehat{GCI}$
2 Reconnaitre des triangles égaux et des triangles semblables			
1. Sur la figure ci-dessus, citer deux triangles égaux :	GIC et GDJ	GLK et GDJ	GLK et GCI
2. Sur la figure ci-dessus, citer deux triangles semblables mais non égaux :	GLK et GDJ	GLK et GCI	GCI et GEH
3 Reconnaitre un parallélogramme			
Un parallélogramme possède :	deux diagonales de même longueur.	deux diagonales qui se coupent en leur milieu.	deux côtés consécutifs de même longueur.
4 Reconnaitre un parallélogramme particulier			
Un losange possède :	deux diagonales de même longueur.	deux diagonales perpendiculaires en leur milieu.	quatre angles droits.

Pour t'aider à retenir le cours.*

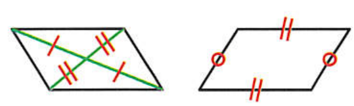
Carte mentale

Reproduire et compléter cette carte mentale.

Parallélogramme

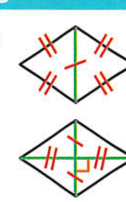


constitué de deux triangles égaux

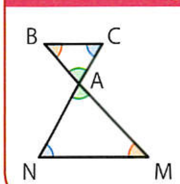


Losange

constitué de deux triangles isocèles égaux ou de quatre triangles rectangles égaux



Triangles semblables

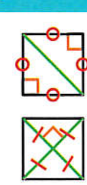


Les angles sont ....

Les longueurs des côtés sont ....

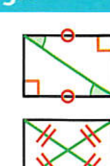
Carré

constitué de deux ou quatre triangles ....



Rectangle

constitué de deux triangles rectangles égaux



*Tu peux aussi construire ta propre carte mentale.

Reconnaitre un parallélogramme particulier

Savoir-faire p. 215

Questions flash

diapo

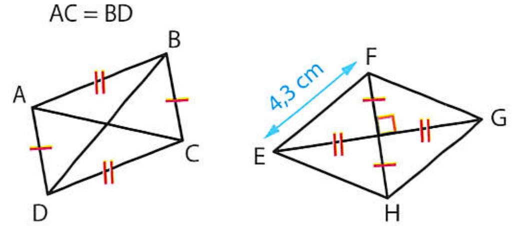
39 Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Un parallélogramme peut être un carré.
2. Si un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.
3. Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle.
4. Si un rectangle a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un carré.
5. Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles et deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un losange.
6. Si un quadrilatère a ses côtés opposés de même longueur et un angle droit, alors c'est un rectangle.

40 On considère les deux énoncés ci-dessous.

1. Déterminer l'angle $\widehat{ADC}$.
2. Déterminer la longueur de [FG].

AC = BD



Remettre dans l'ordre les réponses de Léa et Tom.

Léa

Alors $\widehat{ADC}$ = 90°
Donc ABCD est un parallélogramme.
AC = BD
Un rectangle a quatre angles droits.
AB = DC et AD = BC
Donc ABCD est un rectangle.

Tom

ses diagonales se coupent en leur milieu perpendiculairement

EFGH est un losange
car
Les quatre côtés de EFGH sont de même longueur et EF = 4,3 cm.

FG = 4,3 cm

41 1. Tracer :
- un cercle de centre I et de rayon 3,5 cm ;
- deux diamètres [MD] et [OE] de ce cercle ;
- le quadrilatère MODE.

2. Le quadrilatère MODE est-il un parallélogramme ?
3. Le quadrilatère MODE est-il un rectangle ?

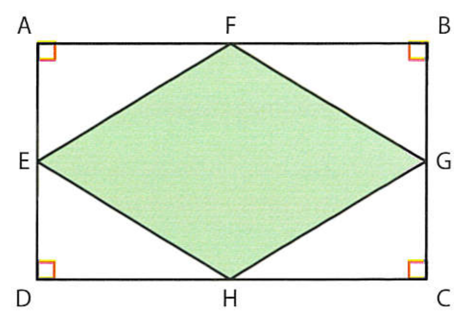
42 VRAC est un parallélogramme dont les diagonales se coupent en S. De plus $\widehat{RAS}$ = 41°, $\widehat{ARS}$ = 50° et RA = 5,1 cm.

1. Faire une construction en vraie grandeur.
2. VRAC est-il un losange ? Justifier.

43 TROP est un parallélogramme de centre Z tel que TR = 4,2 cm, $\widehat{TRZ}$ = 45° et $\widehat{RTZ}$ = 46°.

1. Faire une construction en vraie grandeur.
2. TROP est-il un rectangle ? Justifier.

44 Dans la figure ci-dessous, les points E, F, G et H sont les milieux des côtés [AD], [AB], [BC] et [CD].



1. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier.
2. Que peut-on dire des triangles AEF, BGF, CGH et DEH ? Justifier.
3. Quelle est la nature du quadrilatère EFGH ? Justifier.

45 PAGE est un rectangle de centre O tel que PA = 5 cm et PG = 6 cm.

1. Faire un dessin à main levée.
2. Que peut-on dire des longueurs OA, OG, OP et OE ? Justifier.
3. Faire une construction en vraie grandeur du rectangle PAGE.
4. a. Tracer le cercle de centre P passant par E : il coupe [PA] en L.
   b. Tracer le cercle de centre E passant par P : il coupe [EG] en I.
   c. Tracer le quadrilatère PLIE.

Code les informations sur ta construction, cela t'aidera pour la suite.

   d. Quelle est la nature du quadrilatère PLIE ? Justifier.

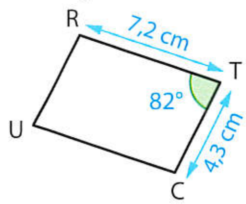
Exercices

Reconnaitre un parallélogramme

Savoir-faire p. 213

Questions flash diapo

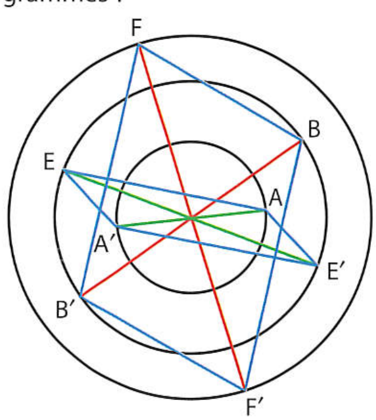
33 TRUC est un parallélogramme.



1. Déterminer les longueurs UC et RU.

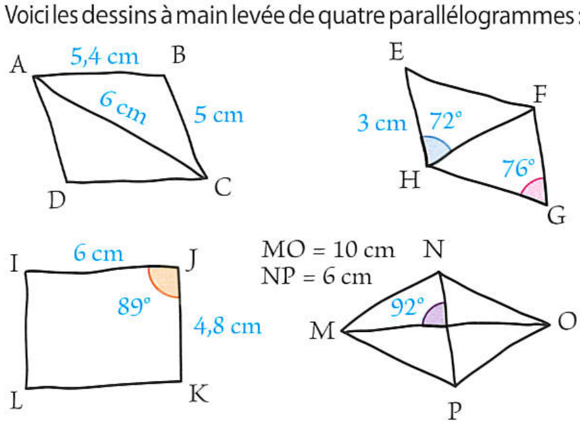
2. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{RUC}$.

34 Dans la figure ci-dessous, quelle propriété permet de prouver que les deux quadrilatères bleus sont des parallélogrammes ?



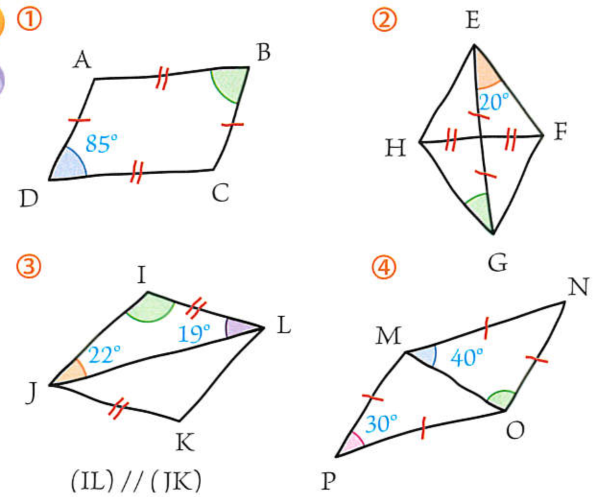
35 En utilisant le quadrillage d'une feuille à grands carreaux, tracer un parallélogramme EFGH tel que EF = 3,2 cm.

36 Voici les dessins à main levée de quatre parallélogrammes :



- Construire ces quatre parallélogrammes en vraie grandeur.

37



1. Associer chacun des dessins à main levée ci-dessus à la propriété qui permet d'affirmer que c'est un parallélogramme.

ⓐ Si un quadrilatère a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

ⓑ Si un quadrilatère a ses côtés opposés deux à deux de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

ⓒ Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.

2. Associer chaque dessin à main levée ci-dessus à la (ou les) propriété(s) qui permet(tent) de déterminer la mesure de l'angle vert.

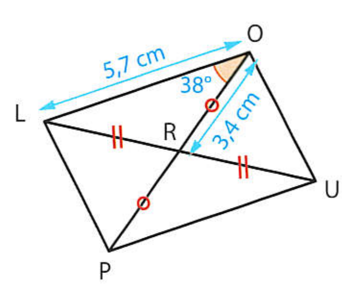
ⓓ Dans un triangle, la somme des mesures des angles est égale à 180°.

ⓔ Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors ces droites forment des angles alternes-internes de même mesure.

ⓕ Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses angles opposés sont de même mesure.

ⓖ Un parallélogramme a ses côtés opposés deux à deux parallèles.

38



1. Démontrer que le quadrilatère LOUP est un parallélogramme.

2. Déterminer les longueurs des segments [OP] et [PU]. Justifier les réponses.

3. Pourquoi peut-on affirmer que les angles $\widehat{LOP}$ et $\widehat{OPU}$ sont de même mesure ?

4. Construire en vraie grandeur le parallélogramme LOUP.

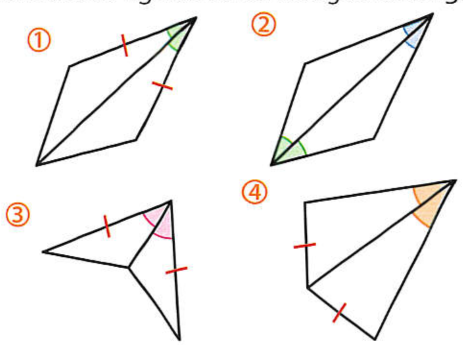
Reconnaitre des triangles égaux et des triangles semblables

Savoir-faire p. 211

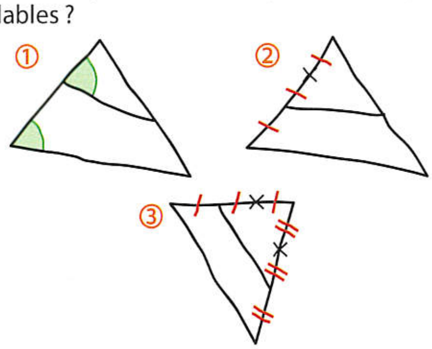
Questions flash

diapo

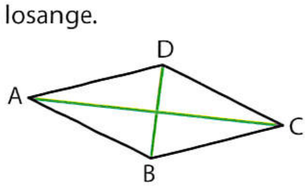
26 Quelles sont les figures où les triangles sont égaux ?



27 D'après le codage, quelles sont les figures pour lesquelles on peut conclure que les triangles sont semblables ?

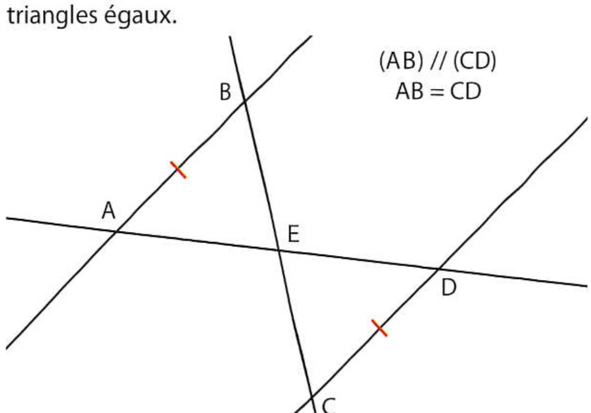


28 ABCD est un losange.

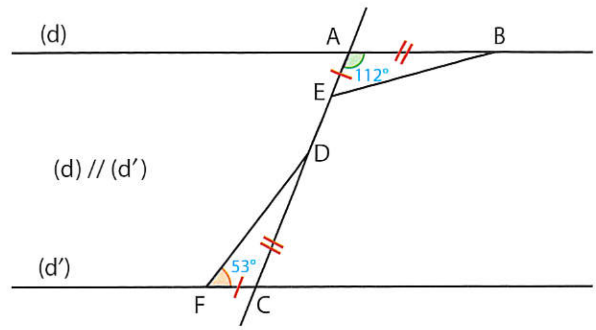


- Montrer que les quatre triangles formés par les diagonales du losange sont des triangles égaux.

29 Expliquer pourquoi les triangles ABE et EDC sont des triangles égaux.

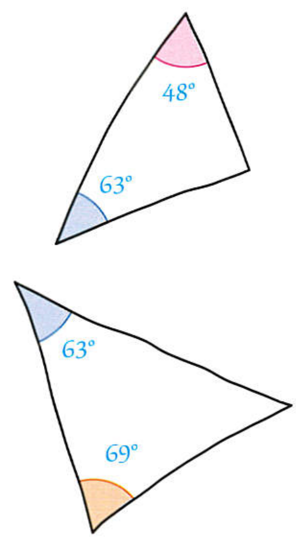


30 On donne la figure ci-dessous.

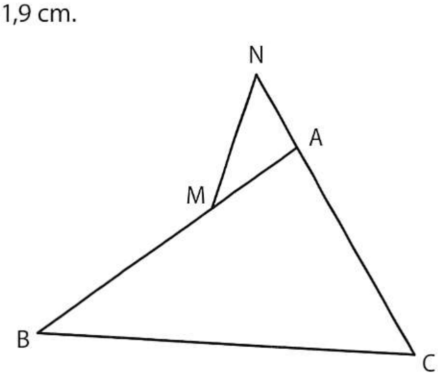


1. Montrer que les triangles ABE et DCF sont des triangles égaux.
2. Déterminer les mesures des angles du triangle AEB.

31 Est-ce que ces deux triangles sont semblables ? Justifier.



32 Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle tel que AB = 4,8 cm ; AC = 3,6 cm et BC = 5,7 cm.
Soit N le point tel que N ∈ (AC) et AN = 1,2 cm.
Soit M le point tel que M ∈ [AB], AM = 1,6 cm et MN = 1,9 cm.



1. Expliquer pourquoi les triangles ABC et AMN sont des triangles semblables.
2. Déterminer le rapport de réduction pour passer du triangle ABC au triangle AMN.

Exercices

2 pages d'exercices supplémentaires dans le manuel numérique

Utiliser les propriétés des angles et des triangles

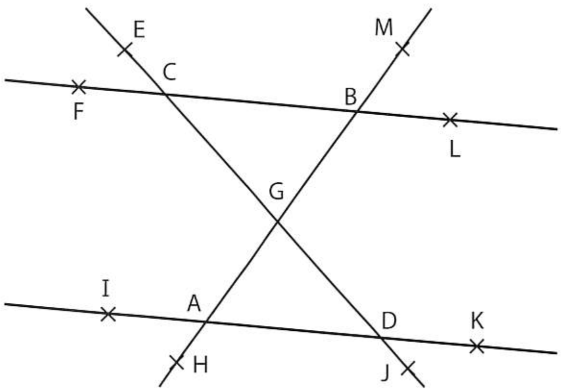
Savoir-faire p. 209

Questions flash

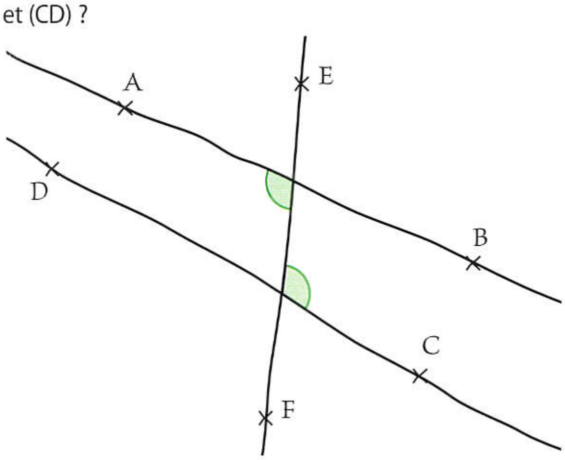
diapo

20 Les droites (FL) et (IK) sont parallèles.

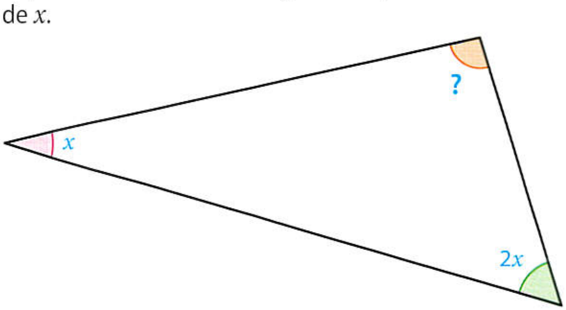
- Citer quatre couples d'angles alternes-internes de même mesure.



21 D'après le codage, que peut-on dire des droites (AB) et (CD) ?

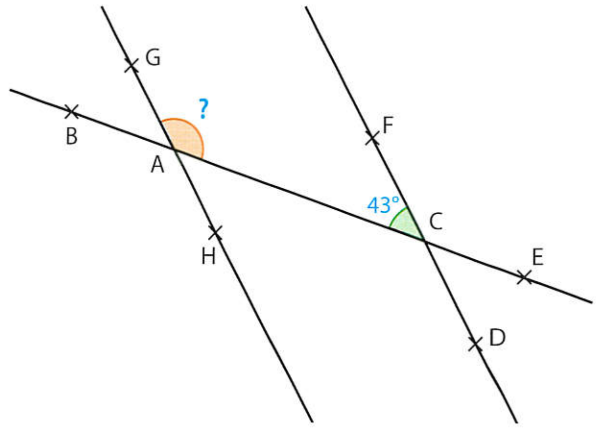


22 Exprimer la mesure de l'angle manquant en fonction de x.

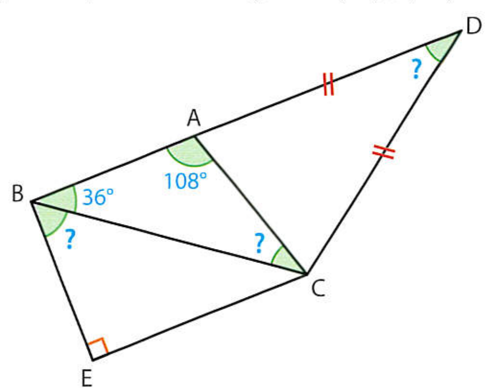


23 Les droites (AC) et (FD) sont sécantes en C.

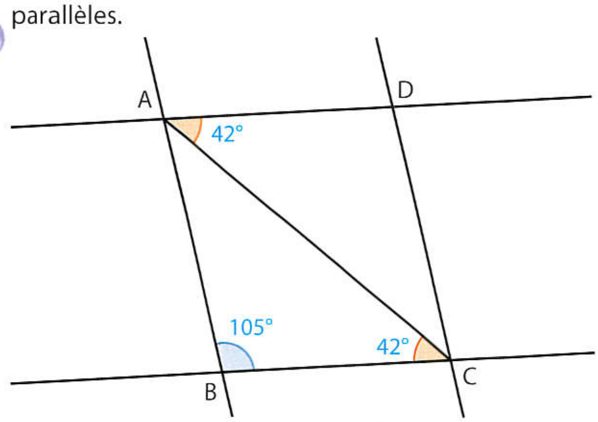
- Quelle est la valeur de l'angle manquant pour que les droites (FD) et (GA) soient parallèles ?



24 Déterminer la mesure des angles notés par un point d'interrogation.
Les points B, A et D sont alignés et (BA) // (EC)



25 Dans le quadrilatère ABCD, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



1. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.
2. Justifier que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
3. Démontrer que ABCD est un parallélogramme.
4. Déterminer les mesures des angles du triangle ADC.

Savoir-faire

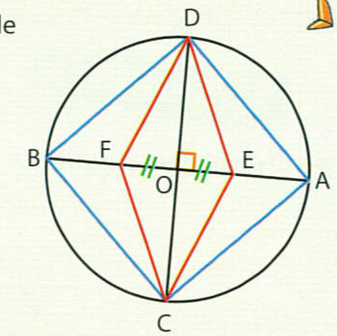
Apprends à l'aide des exercices résolus puis entraine-toi !

4 Reconnaitre un parallélogramme particulier

15 [CD] et [AB] sont deux diamètres perpendiculaires d'un même cercle de centre O.
F et E sont deux points de [AB] tels que OF = OE.

1. Montrer que DECF est un losange.

2. Quelle est la nature de ACBD ? Justifier.



Solution

1. D'après la figure, on peut conjecturer que DECF est un losange.
On commence par démontrer que DECF est un parallélogramme. Pour cela, on montre que ses diagonales se coupent en leur milieu.
On sait d'après l'énoncé que OF = OE.
De plus, O est le centre du cercle passant par D et C, alors OD = OC.
Les diagonales [EF] et [CD] se coupent en leur milieu, donc DCEF est un parallélogramme.
On démontre ensuite que DECF est un losange.
On sait que DECF est un paralléogramme. De plus [FE] $\perp$ [DC].
Comme DECF est un parallélogramme et que ses diagonales sont perpendiculaires, alors DECF est un losange.

2. D'après la figure, on peut conjecturer que ACBD est un carré.
On commence par démontrer que ACBD est un parallélogramme.
[AB] et [CD] sont deux diamètres du cercle de centre O. Donc O est le milieu de [AB] et de [CD].
Comme les diagonales du quadrilatère ACBD se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.
On montre ensuite que ACBD est un carré.
On sait que ACBD est un parallélogramme. De plus, ses diagonales [AB] et [CD] sont de même longueur et perpendiculaires.
Comme ACBD est un parallélogramme et que ses diagonales ont même longueur et sont perpendiculaires, alors ACBD est un carré.

16 GRIM est un rectangle tel que GI = 6,1 cm et IR = 3,9 cm.

1. Déterminer les longueurs MG et RM. Justifier.

2. Construire ce rectangle en vraie grandeur.

17 EFGH est un quadrilatère tel que EF = GH ; FG = HE ; EG = FH.

1. Montrer que EFGH est un parallélogramme.

2. Montrer que EFGH est un rectangle.

18 PLUS est un losange tel que PL = 6,2 cm et $\widehat{PLU} = 37°$.

1. Construire ce losange en vraie grandeur.

2. Que peut-on dire des segments [PU] et [SL] ? Justifier.

3. Calculer les mesures des angles des triangles PLU et PSU. Justifier.

19 RATE est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en Z de telle façon que les triangles RZA, AZT, TZE et EZR sont tous isocèles rectangles en Z.

1. Faire un dessin à main levée.

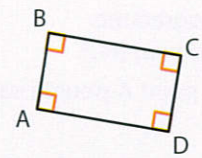
2. Démontrer que RATE est un carré.

4e 4 Reconnaitre un parallélogramme particulier

Vidéo

Définition

Un **rectangle** est un quadrilatère qui a quatre angles droits.

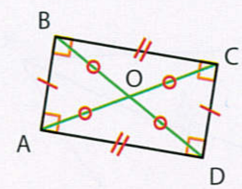


Propriétés

Si ABCD est un rectangle, alors :

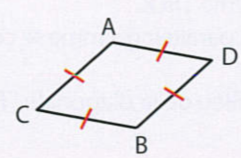
- ABCD est un parallélogramme ;
- les diagonales [AC] et [BD] ont même longueur.

Si ABCD est un parallélogramme et que ses diagonales ont même longueur, alors c'est un rectangle.



Définition

Un **losange** est un quadrilatère qui a quatre côtés de même longueur.

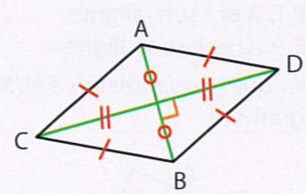


Propriétés

Si ABCD est un losange, alors :

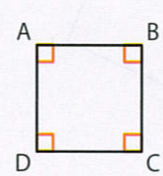
- ABCD est un parallélogramme ;
- les diagonales [AC] et [BD] sont perpendiculaires.

Si ABCD est un parallélogramme et que ses diagonales sont perpendiculaires, alors c'est un losange.



Définition

Un **carré** est un quadrilatère qui a quatre angles droits et quatre côtés de même longueur.

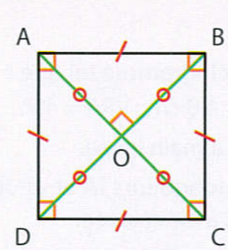


Propriétés

Si ABCD est un carré, alors :

- ABCD est un parallélogramme ;
- les diagonales [AC] et [BD] ont même longueur ;
- les diagonales [AC] et [BD] sont perpendiculaires.

Si ABCD est un parallélogramme et que ses diagonales ont même longueur et sont perpendiculaires, alors c'est un carré.



Un carré est à la fois un parallélogramme, un rectangle et un losange !

Savoir-faire

Apprends à l'aide des exercices résolus puis entraine-toi !

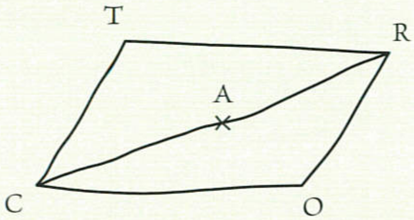
3 Reconnaitre un parallélogramme

9 TROC est un parallélogramme.
A est le milieu du segment [RC].

- Que représente le point A pour le segment [TO] ? Justifier.

Solution

On commence par faire une figure à main levée.



On remarque que A est le milieu de la diagonale [RC] du parallélogramme TROC.
Or les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
Donc A est aussi le milieu de la diagonale [TO].

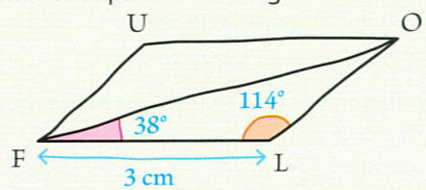
10 FLOU est un parallélogramme tel que LF = 3 cm ; $\widehat{LFO} = 38°$; $\widehat{FLO} = 114°$.

1 Déterminer $\widehat{FUO}$.

2. Déterminer $\widehat{FOU}$.

Solution

On commence par faire une figure à main levée.

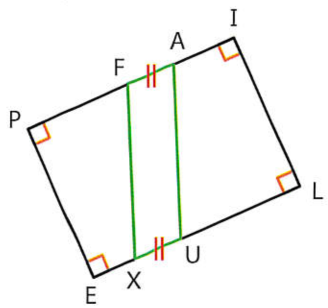


1. On remarque que $\widehat{FUO}$ est un des angles du parallélogramme.
Comme FLOU est un parallélogramme, ses angles opposés sont de même mesure.
Donc $\widehat{FUO} = \widehat{FLO} = 114°$.

2. On remarque que $\widehat{FOU}$ et $\widehat{LFO}$ sont alternes-internes.
Or FLOU est un parallélogramme, donc ses côtés opposés sont parallèles : (FL) // (OU).
Les droites (FL) et (OU) sont parallèles et coupées par la sécante (FO).
Donc les angles alternes-internes $\widehat{LFO}$ et $\widehat{FOU}$ sont de même mesure.
Alors $\widehat{LFO} = \widehat{FOU} = 38°$.

11 Les points P, F, A et I sont alignés.
Les points E, X, U et L sont alignés.

- Démontrer que le quadrilatère FAUX est un parallélogramme.



12 MONT est un quadrilatère tel que :
MO = TN = 4,2 cm ; ON = MT = 3 cm ; MN = 4 cm.

1. Faire un dessin à main levée et le coder.

2. Quelle est la nature de MONT ? Justifier.

3. Construire ce quadrilatère en vraie grandeur.

13 VRAI est un parallélogramme tel que :
VR = 6,4 cm ; RA = 4,8 cm ; $\widehat{VRA} = 49°$.

1. Faire un dessin à main levée.

2. Déterminer les longueurs IA et VI. Justifier. Coder le dessin à main levée.

3. Construire ce parallélogramme en vraie grandeur.

14 **1.** Tracer :

- deux cercles ($\mathscr{C}_1$) et ($\mathscr{C}_2$) de centre O et de rayons respectifs 3,2 cm et 4,5 cm ;
- un diamètre [WA] du cercle ($\mathscr{C}_1$) ;
- un diamètre [HT] du cercle ($\mathscr{C}_2$) ;
- le quadrilatère WHAT.

2. Quelle est la nature de WHAT ? Justifier.

5e 3 Reconnaitre un parallélogramme Vidéo

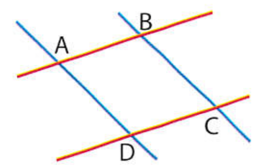
Définition

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont deux à deux parallèles.

Exemple

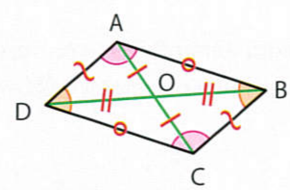
- Les droites (AB) et (DC) sont parallèles.
- Les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.



Propriétés

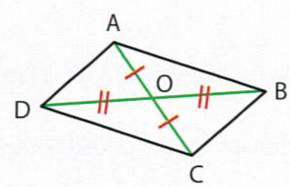
Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors :
- ses diagonales se coupent en leur milieu ;
- ses côtés opposés sont de même longueur ;
- ses angles opposés sont de même mesure.



Propriété

Avec les diagonales

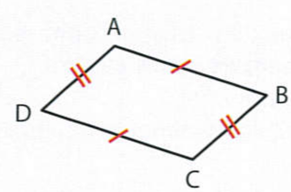
Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.



Propriété

Avec les quatre côtés

Si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés deux à deux de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

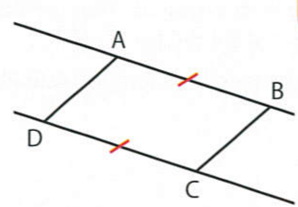


Si les côtés opposés sont deux à deux parallèles, on peut aussi conclure que c'est un parallélogramme (c'est la définition d'un parallélogramme !).

Propriété

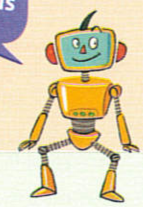
Avec deux côtés

Si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.



Savoir-faire

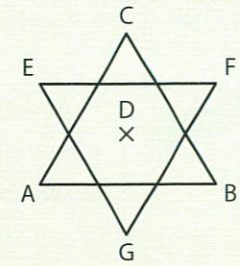
Apprends à l'aide des exercices résolus puis entraine-toi !



2 Reconnaitre des triangles égaux et des triangles semblables

5 L'étoile représentée ci-contre est constituée de deux triangles équilatéraux ABC et EFG. Le triangle EFG est le symétrique du triangle ABC par rapport au point D.

- Justifier que les deux triangles sont égaux.

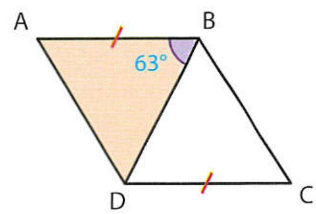


Solution

On utilise les propriétés de la symétrie centrale et la définition de deux triangles égaux.
Le triangle EFG est le symétrique du triangle ABC par rapport au point D.
Or la symétrie centrale conserve les longueurs, donc les triangles ABC et EFG ont leurs côtés deux à deux de même longueur : ce sont des triangles égaux.

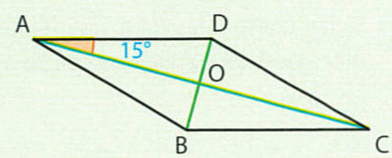
6 Dans le quadrilatère ABCD ci-contre, (AB) // (CD) et AB = CD.

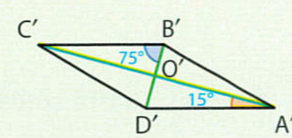
- Démontrer que les triangles ABD et BCD sont des triangles égaux.



7 Les quadrilatères ABCD et A'B'C'D' représentés ci-dessous sont des losanges.

- Montrer que les triangles OAD et O'A'D' sont semblables.



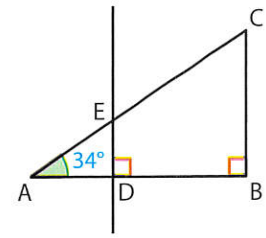


Solution

Comme on n'a aucune indication sur les longueurs, on s'intéresse aux mesures des angles.
Pour prouver que deux triangles sont semblables, il suffit de prouver que deux paires d'angles sont de même mesure.
ABCD est un losange.
Or les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.
Donc $\widehat{DOA} = 90°$.
Par analogie dans le losange A'B'C'D', on a $\widehat{A'O'D'} = 90°$.
Dans le triangle OAD, $\widehat{DOA} = 90°$ et $\widehat{DAO} = 15°$ et dans le triangle O'A'D', $\widehat{D'O'A'} = 90°$ et $\widehat{D'A'O'} = 15°$.
Les deux triangles OAD et O'A'D' ont deux paires d'angles de même mesure. Ce sont donc des triangles semblables.

8 Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est rectangle en B.
De plus, D ∈ [AB] et (DE) ⊥ (AB).

- Démontrer que les triangles ADE et ABC sont semblables.



4e 2 Reconnaitre des triangles égaux et des triangles semblables Vidéo

Définition

Deux triangles sont **égaux** lorsque leurs côtés sont deux à deux de même longueur.

Propriété

Si deux triangles ont, deux à deux :

- un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur

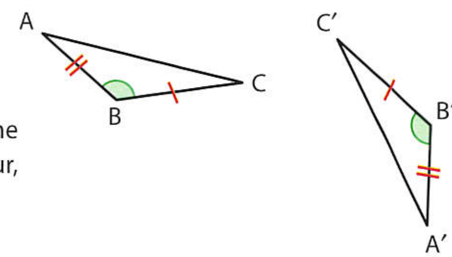
ou

- un côté de même longueur compris entre deux angles de même mesure,

alors ils sont égaux.

Exemple

$AB = A'B'$
$BC = B'C'$
$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$
Les triangles ABC et A'B'C' ont un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur, donc ce sont des triangles égaux.



Définition

Deux triangles sont **semblables** lorsque leurs angles sont deux à deux de même mesure.

- Si deux triangles sont égaux alors ils sont semblables. Par contre, deux triangles semblables ne sont pas forcément égaux.
- Pour démontrer que deux triangles sont semblables, il suffit de démontrer que deux paires d'angles sont de même mesure.

Propriété

Si deux triangles ABC et A'B'C' sont semblables, alors les longueurs des côtés opposés aux angles égaux sont proportionnelles. On a $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$.

Si $k < 1$, alors A'B'C' est une réduction de ABC de rapport k.
Si $k > 1$, alors A'B'C' est un agrandissement de ABC de rapport k.

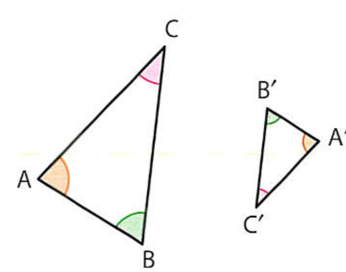
Exemple

Les triangles ABC et A'B'C' sont semblables car $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ et $\widehat{C} = \widehat{C'}$. Donc les longueurs des côtés du triangle ABC sont proportionnelles aux longueurs des côtés du triangle A'B'C'.

Longueurs du triangle ABC	AB	AC	BC
Longueurs du triangle A'B'C'	A'B'	A'C'	B'C'

$\times k$

Le tableau est un tableau de proportionnalité et k est le coefficient de proportionnalité.



Propriété

Si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnelles, alors ces triangles sont semblables.

Savoir-faire

Apprends à l'aide des exercices résolus puis entraine-toi !

1 Utiliser les propriétés des angles et des triangles

1 Soit ABC un triangle avec $\widehat{CAB} = 47°$.

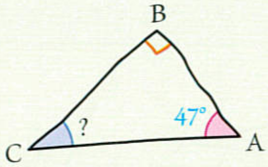
- Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ pour que le triangle soit rectangle en B.

Solution

On commence par faire une figure à main levée avec les informations du texte.

Dans le triangle ABC, $\widehat{CBA} = 90°$ et $\widehat{CAB} = 47°$.

Or dans un triangle, la somme des mesures des angles est égale à 180°.



$\widehat{CAB} + \widehat{CBA} + \widehat{ACB} = 180°$

$47° + 90° + \widehat{ACB} = 180°$

$137° + \widehat{ACB} = 180°$

$\widehat{ACB} = 180° - 137°$

$\widehat{ACB} = 43°$

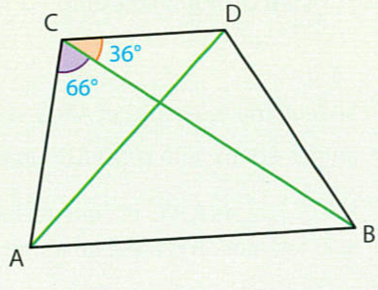
Pour que le triangle ABC soit rectangle en B, il faut que $\widehat{ACB} = 43°$.

2 Soit EFG un triangle avec $\widehat{EFG} = 28°$.

- Déterminer les mesures des angles $\widehat{FEG}$ et $\widehat{FGE}$ pour que le triangle soit isocèle en E.

3 Dans la figure ci-dessous, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

- Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{CBA}$?



Solution

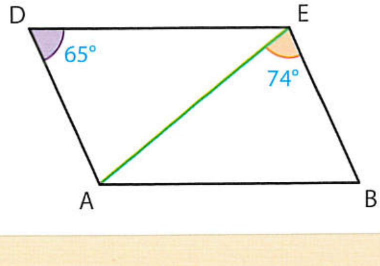
On reconnait deux droites parallèles : (CD) et (AB), une sécante (CB) et deux angles alternes internes : $\widehat{DCB}$ et $\widehat{CBA}$.

Or si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors ces droites forment des angles alternes-internes de même mesure.

Donc $\widehat{DCB} = \widehat{CBA} = 36°$.

4 ABED est un parallélogramme.

- Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{EAD}$.



Cours

5e 1 Utiliser les propriétés des angles et des triangles ▶Vidéo

Propriétés

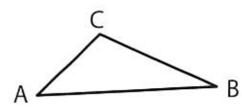
Dans un **triangle** :

- la somme des mesures des angles est égale à 180° ;
- la longueur de chaque côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés : pour vérifier qu'un triangle est constructible, on vérifie que la plus grande longueur est inférieure à la somme des deux autres.

Exemple

Dans un triangle ABC non aplati, on a :

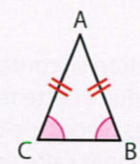
- $AB < AC + CB$ $\quad AC < AB + CB \quad$ et $\quad CB < AC + AB$
- $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180°$



Définitions et propriété

Un **triangle isocèle** est un triangle qui a deux côtés de même longueur.
On appelle **sommet principal** le point commun aux deux côtés de même longueur et **base** le côté opposé au sommet principal.

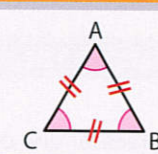
- Si un triangle ABC est isocèle en A, alors les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ ont même mesure.
- Si les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ ont même mesure, alors ABC est isocèle en A.



Définition et propriété

Un **triangle équilatéral** est un triangle qui a ses trois côtés de même longueur.

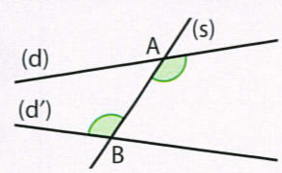
- Si un triangle est équilatéral, alors ses trois angles ont pour mesure 60°.
- Si les trois angles d'un triangle ont même mesure, alors il est équilatéral.



Définition

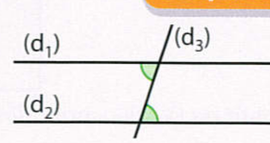
Soient deux droites (d) et (d') et une sécante (s) qui coupe (d) et (d') en deux points A et B.
Deux angles sont **alternes-internes** lorsque :

- ils ont pour sommet A et B ;
- ils sont situés de part et d'autre de la droite (s) ;
- ils sont entre les droites (d) et (d').



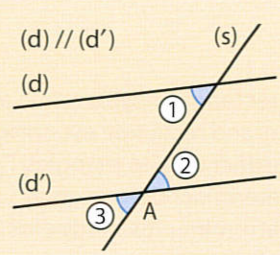
Propriété

- Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors ces droites forment des angles alternes-internes de même mesure.
- Si deux droites coupées par une sécante forment des angles alternes-internes de même mesure, alors ces deux droites sont parallèles.



!

Dans la figure ci-contre, les angles ① et ② ont même mesure. Les angles ② et ③ sont symétriques par rapport au point A. Ils ont donc également même mesure.
Ainsi, dans cette figure, les angles ①, ② et ③ ont même mesure.

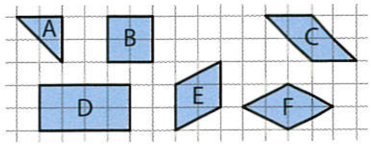


Les angles 2 et 3 sont appelés angles opposés par le sommet.
Les angles 1 et 3 sont appelés angles correspondants.

Mosaïques et pavements

4e Activité 2

Dans le Palais de la Porte Dorée, à Paris, on peut voir des mosaïques réalisées dans la lignée de céramistes tels qu'Émile Muller et Alexandre Bigot qui s'étaient illustrés lors des Expositions universelles de 1889 et 1890 et sur les façades d'immeubles parisiens.
Les mosaïques et les pavements sont constitués de petites pièces de formes élémentaires appelées « tesselles ». À partir de ces pièces, on peut fabriquer une multitude de motifs comme sur le pavement ci-contre.
Voici quelques pièces de mosaïque représentées sur un quadrillage :



1. Déterminer la nature de chacune d'elles.
2. Avec quelles pièces ci-dessus peut-on former chacune des figures suivantes ? Donner toutes les possibilités.

fig. 1

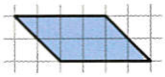


fig. 2

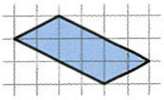
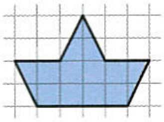
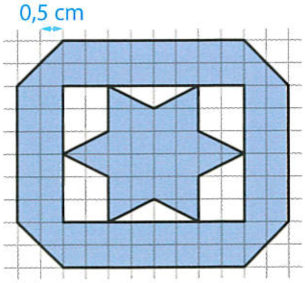


fig. 3



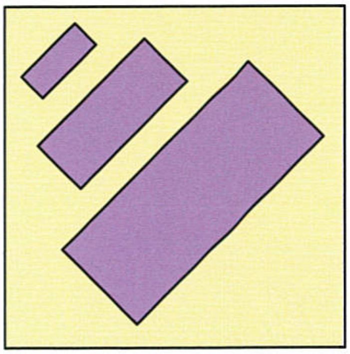


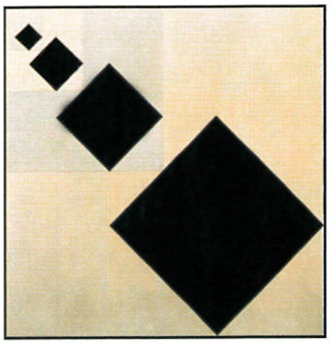
3. La réalisation ci-contre a nécessité exactement 18 pièces.
   a. Reproduire cette figure sur un quadrillage.
   b. Quelles pièces a-t-on utilisées et en combien d'exemplaires chacune ?
   c. Déterminer l'aire en cm^2 de la surface bleue de cette figure.
   d. Déterminer la longueur du contour extérieur de cette figure. Justifier.

À la manière de Théo van Doesburg

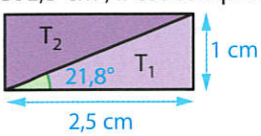
4e Activité 3 Prise d'initiative

Théo désire réaliser une œuvre en s'inspirant du tableau *Composition arithmétique* du peintre néerlandais Théo van Doesburg (1883-1931).
Théo a réalisé une figure comportant trois rectangles.





- Le petit rectangle a pour dimensions 1 cm et 2,5 cm ; il est composé de deux triangles, T_1 et T_2 :



- Le rectangle moyen est un agrandissement de rapport 2 du petit rectangle.
- Le grand rectangle est un agrandissement de rapport 1,7 du rectangle moyen.

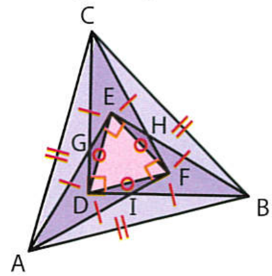
1. Justifier que les triangles T_1 et T_2 sont des triangles égaux.
2. Déterminer deux triangles semblables mais non égaux au triangle T_1.
3. Déterminer les longueurs et les angles dont on a besoin pour construire les deux triangles trouvés dans la question 2.
4. Reproduire en vraie grandeur la figure de Théo.

Activités

Questions flash

1. Quelles sont les figures géométriques qui constituent cette mosaïque ?

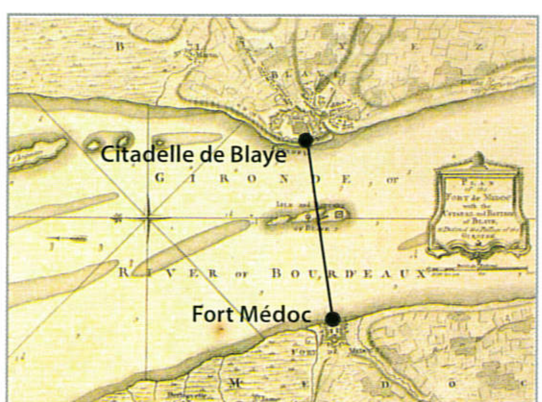
2. Dans la figure ci-dessous :
   a. citer trois triangles rectangles ;
   b. citer trois triangles isocèles non rectangles ;
   c. citer deux triangles équilatéraux ;
   d. citer deux triangles semblables ;
   e. citer deux triangles égaux.



Partez !

Le Verrou de l'estuaire de la Gironde — 4e Activité 1

À la fin du XVIII^e siècle, l'estuaire de la Gironde était contrôlé par le « Verrou » constitué par :
- la citadelle de Blaye, sur la rive droite ;
- Fort Médoc, sur la rive gauche.



Pour barrer l'accès du fleuve aux bateaux ennemis, des sentinelles étaient positionnées sur les remparts de la citadelle et du fort. Pour déterminer la position des bateaux, elles effectuaient des mesures d'angles à l'aide d'un appareil appelé « sextant ».
À l'arrivée d'un bateau ennemi, la sentinelle positionnée à la citadelle a mesuré un angle de 43° entre le bateau et le fort et celle positionnée au fort a mesuré un angle de 60° entre le bateau et la citadelle.
La distance entre la citadelle et le fort est de 3 250 m.

1. Faire une figure, soit avec un logiciel de géométrie dynamique, soit sur une feuille en prenant comme échelle $\frac{1}{25\,000}$.
2. À l'aide de la figure, déterminer la distance approximative entre le bateau et la Citadelle de Blaye, puis celle entre le bateau et Fort Médoc.
3. Si le bateau se trouvait à moins de 2 km de la citadelle, alors les soldats n'avaient pas le temps de charger les canons. Qu'en est-il dans ce cas précis ?

CHAPITRE 12

Ta mission

Utiliser les propriétés des triangles et des quadrilatères.

Triangles et quadrilatères

Jeux

Mots croisés

① Nature d'un triangle ayant un angle droit.

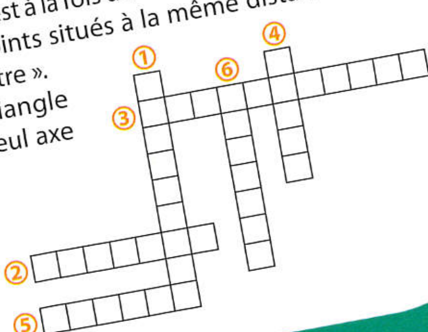
② Quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires en leur milieu.

③ Nature d'un triangle dont tous les angles ont même mesure.

④ Quadrilatère qui est à la fois un rectangle et un losange.

⑤ Ensemble de points situés à la même distance d'un point appelé « centre ».

⑥ Nature d'un triangle qui possède un seul axe de symétrie.



INFOS

Les **Sangaku** sont des énigmes géométriques japonaises gravées sur des tablettes en bois. Ce sont des problèmes de géométrie faisant intervenir des figures simples telles que les quadrilatères, les triangles et les cercles, où l'esthétique des formes est déterminante dans le choix des problèmes.