

Suites Numériques (IV) : limites des suites monotones

Compétences	Exercices corrigés
Savoir montrer qu'une suite est minorée, majorée	Savoir-faire 8 p 21 ; 93 p28
Savoir utiliser le théorème de convergence des suites croissantes majorées	Application 1 Savoir-faire 9 p 21 ; 93 p28

1. Suites majorées, minorées, bornées

Définitions

La suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M supérieur à tous les termes de la suite.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M. \quad M \text{ est un } \textbf{majorant} \text{ de la suite}$$

La suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m inférieur à tous les termes de la suite.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m \quad m \text{ est un } \textbf{minorant} \text{ de la suite}$$

La suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée.

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$$



Exemple 1 :

Soit (u_n) définie par $u_n = \sin(n)$.

$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq u_n \leq 1$ donc (u_n) est une suite minorée par -1 et majorée par 1 ; elle est donc bornée.

Soit (u_n) définie par $u_n = n^2$.

$\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \geq 0$ donc (u_n) est une suite minorée par 0 . Par contre elle n'est pas majorée.

Soit (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$ donc (u_n) est bornée.

Exercices 32 à 38 page 23 et 81 à 90 page 27

2. Théorème de convergence des suites monotones

Théorème (admis) : convergence d'une suite monotone

Si une suite est croissante **et** majorée alors elle est convergente.

Si une suite est décroissante **et** minorée alors elle est convergente.



Propriétés :

Si une suite est croissante et admet pour limite L alors elle est majorée par L .

Si une suite est décroissante et admet pour limite L alors elle est minorée par L .



Exercice 1 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}u_n$.

a) Montrer par récurrence que la suite est croissante et majorée par 2 .

b) En déduire que (u_n) converge vers un réel L .

ATTENTION : vous avez montré que (u_n) converge et que sa limite L vérifie $L \leq 2$.

Vous n'avez pas trouvé la limite de (u_n) . Le théorème du point fixe peut permettre de conclure.

Soit E un ensemble et f une fonction définie dans E . On dit que x est un **point fixe** de f si $f(x) = x$.

Théorème du point fixe (pas au programme) :

Soit f une fonction **continue** et (u_n) une suite récurrente définie par son 1^{er} terme et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si la suite (u_n) converge vers une limite finie l alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$.

Autrement dit : si (u_n) converge vers l alors l est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Application à la détermination d'une limite

Suite de l'exercice 1 : la suite (u_n) converge vers une limite finie L , $L \leq 2$.

Pour tout entier n , $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}u_n = f(u_n)$ avec f définie par $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x$.

La fonction f est continue (c'est une fonction affine).

L est donc solution de l'équation $f(x) = x$ donc $L = 1 + \frac{1}{2}L$. On en déduit que $\frac{1}{2}L = 1$ soit $L = 2$.

2. Divergence des suites monotones

Propriété : Si une suite est croissante et non majorée alors elle a pour limite $+\infty$.
Si une suite est décroissante et non minorée alors elle a pour limite $-\infty$.



Preuve (ROC) dans le cas d'une suite croissante et non majorée

Pour tout réel A , on veut montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n \in]A; +\infty[$.

La suite n'est pas majorée donc il existe un entier p tel que pour tout $n \geq p$, $u_n > A$.

La suite est croissante donc pour tout $n \geq p$, $u_n > u_p$.

On en déduit que : $u_n > u_p > A$ donc qu'à partir d'un rang p , tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]A; +\infty[$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exemple 2 : Montrer que la suite de terme général $u_n = n^2$ diverge vers $+\infty$.

La suite (u_n) est croissante et non majorée donc d'après la propriété précédente, elle diverge.

ex 39 à 41 page 23 et 91 à 95 page 28

Exercices 124 ; 125 page 37

Exercices pour réviser l'ensemble du chapitre sur les suites : <http://homeomath2.immingo.net/qcmsuites.htm>

Exercice 2 : Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 16$ et pour tout entier n , $v_{n+1} = \sqrt{1 + 3v_n}$.

- Construire les termes v_1 ; v_2 et v_3 sur le graphique fourni puis conjecturer la monotonie et la convergence de la suite.
- Montrer par récurrence que (v_n) est décroissante et minorée par 0.
- En déduire que (v_n) converge vers une limite L .
- Déterminer la valeur exacte de L .

Exercice n°3 :

EXERCICE 3 (5 points) (candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité)

On considère la suite numérique (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}.$$

Partie A : Conjecture

- Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de u_1 et u_2 .
- Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4 .
- Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) .

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n , par : $v_n = u_n - 3$.

- Montrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.
- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $-1 \leq v_n \leq 0$.
- a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n = -v_n \left(\frac{1}{2}v_n + 1 \right)$.
b) En déduire le sens de variation de la suite (v_n) .
- Pourquoi peut-on affirmer que la suite (v_n) converge ?
- On note ℓ la limite de la suite (v_n) .
On admet que ℓ appartient à l'intervalle $[-1; 0]$ et vérifie l'égalité $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$.
Déterminer la valeur de ℓ .
- Les conjectures faites dans la partie A sont-elles validées ?