GEOMETRIE	Trigonométrie – les radians

Compétences	
Savoir calculer une longueur ou un angle en utilisant la trigonométrie dans un triangle rectangle	
Savoir convertir des angles (degré - radians)	Application 1
Savoir déterminer la mesure principale d'un angle	Application 2
Connaitre les propriétés du sinus et du cosinus	Application 3
Savoir placer un point sur un cercle trigonométrique en utilisant les angles associés	Application 4

I Retour sur la trigonométrie du collège :

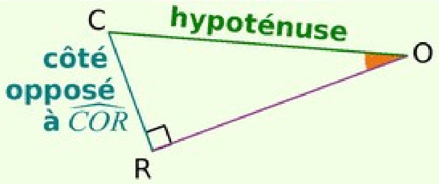
Définitions Dans un **triangle rectangle**,

le sinus d'un angle aigu est le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.

le cosinus d'un angle aigu est le quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.

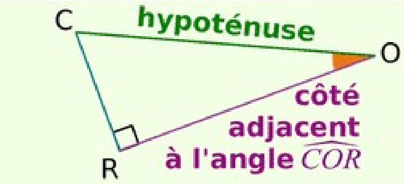
la tangente d'un angle aigu est le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur du côté adjacent à cet angle.

Exemple : Le triangle COR est rectangle en R. Écris les formules donnant le sinus et le cosinus de l'angle $\widehat{COR}$ puis la formule donnant la tangente de l'angle $\widehat{OCR}$.



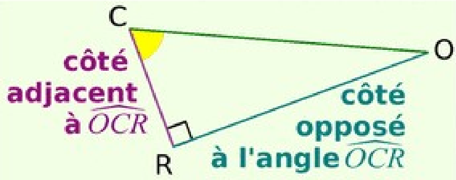
$$\text{Sin } \widehat{COR} = \frac{\text{côté Opposé à } \widehat{COR}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\sin \widehat{COR} = \frac{RC}{CO}$$



$$\text{Cos } \widehat{COR} = \frac{\text{côté Adjacent à } \widehat{COR}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\cos \widehat{COR} = \frac{RO}{CO}$$



$$\text{Tan } \widehat{OCR} = \frac{\text{côté Opposé à } \widehat{OCR}}{\text{côté Adjacent à } \widehat{OCR}}$$

$$\tan \widehat{OCR} = \frac{RO}{RC}$$

Remarques :

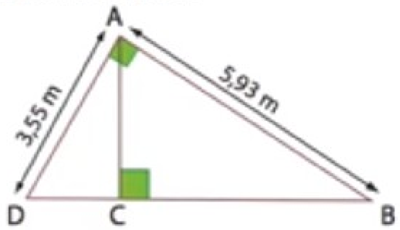
- Le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont toujours compris entre 0 et 1.
- La tangente d'un angle aigu est un nombre strictement positif.

Pour revoir tout le cours de trigonométrie du collège en vidéo : ici

Un exercice à maitriser :

pour voir sa correction : ici

M. Moreira veut construire un cabanon dans son jardin. Il voudrait connaître la longueur AC des tasseaux de bois qu'il doit acheter.

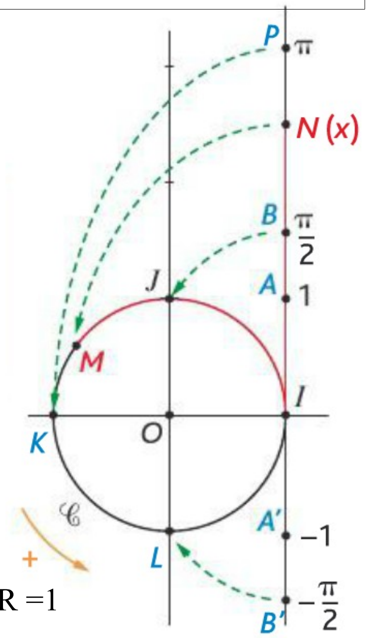


1. Déterminer un arrondi au centième de degré près de l'angle $\widehat{ABC}$.

2. En déduire un arrondi au centimètre près de la longueur AC.

II Principe de l'enroulement :

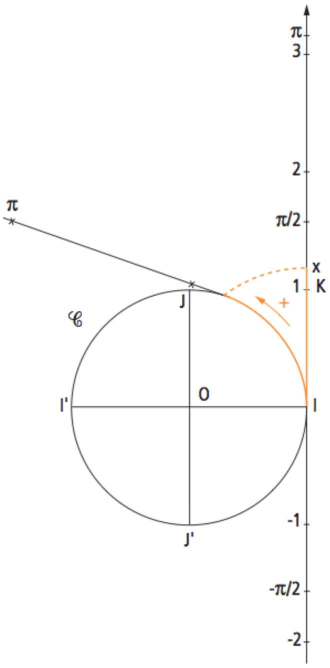
Définition : **On considère un repère du plan (O , I, J)**
On appelle cercle trigonométrique tout cercle de centre O et de rayon 1 sur lequel on fixe un sens de parcours anti-horaire appelé sens trigonométrique ou sens direct.



C est le cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1
On trace la tangente d en I au cercle C
On munit d d'un repère (I,A) avec IA = IO = 1
Cette droite d graduée représente les nombres réels.

Propriété :

- **On associe à tout réel x abscisse du point N, un unique point M du cercle trigonométrique.**
- **Mais attention : au point M sont associés une infinité de réels x ; $x + 2\pi$; $x - 2\pi$; $x + 4\pi$; $x - 4\pi$.**



Rappel : le périmètre d'un cercle est 2π R soit 2π puisque R =1

L'arc IJ mesure …..... ; l'arc II' mesure …..... ; l'arc JJ' mesure …......

Compléter le tableau suivant :

Graduation	-2π	-π	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π	3π	4π	5π	6π	7π	8π
Point												

A tout réel x est associé le point M du Cercle et au point M sont associés une infinité de réels x ; $x + 2\pi$; $x - 2\pi$; $x + 4\pi$; $x - 4\pi$

Remarque : la mesure de l'arc IM est appelée mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ en radian

III Mesure d'un angle en radian :

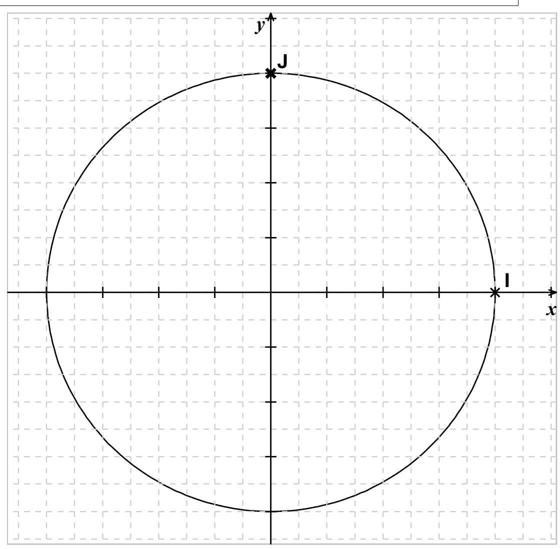
Définition :

- **Un angle de 1 radian, noté 1 rad, est un angle interceptant, sur un cercle, un arc de longueur égale au rayon du cercle.**
- **Autrement dit : Sur le cercle trigonométrique, la mesure en radian d'un angle correspond à la longueur de l'arc intercepté par cet angle.**

Application 1 : Convertir des angles en degré en radians :

Tableau de conversion : tableau proportionnel :

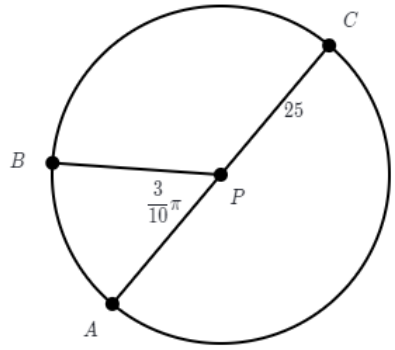
radian	0	2π								
degré	0	360	30	45	60	90	120	135	150	180



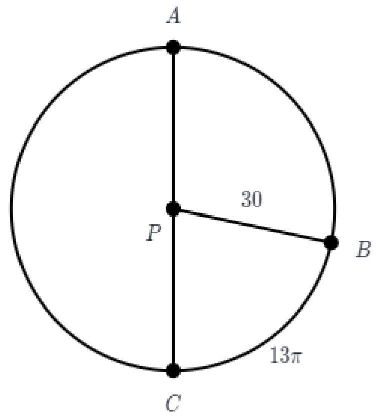
Sur le cercle trigonométrique, placer les points correspondants aux angles précédents.

www.lewebpedagogique.com/mvallelian

Application : Calcul de la longueur d'un arc de cercle :



Exemple 1 : [AC] est un diamètre du cercle de centre P et PC = 25.
Quelle est la longueur du petit arc AB ?
Quelle est la longueur du petit arc BC ?



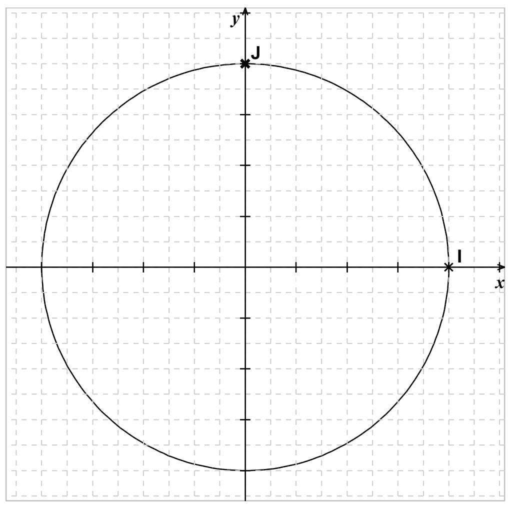
Exemple 2 :[AC] est un diamètre du cercle de centre P et de rayon 30.
La longueur du petit arc BC est égal à 13π.
Quelle est la mesure en radian de l'angle $\widehat{APB}$?

2. **Mesure principale d'un angle en radian :**

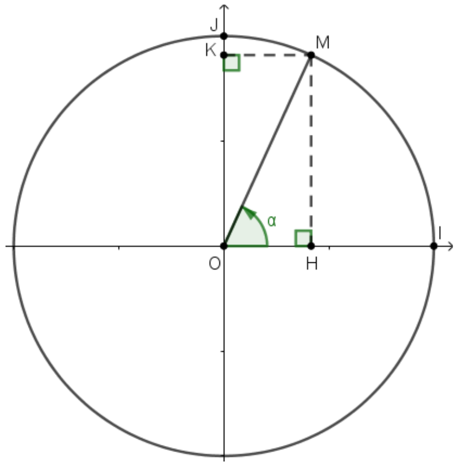
Définition - propriété :
- **Un angle possède en radians, une infinité de mesures distantes de 2 π (= périmètre du cercle)**

Ainsi $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{17\pi}{4}$ ($= \frac{16\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 4\pi + \frac{\pi}{4}$) représente deux mesures du même angle en radians.
- **Un angle aura une mesure négative en radian lorsque le sens de parcours sur le cercle se fait dans le sens contraire du sens trigonométrique.**
- **La mesure principale d'un angle est sa mesure en radians dans l'intervalle] - π ; π].**

Application 2 : Déterminer la mesure principale d'un angle donné :
Donner la mesure principale des angles de mesures respectives : $\frac{37\pi}{6}$; $\frac{29\pi}{4}$; $\frac{-25\pi}{3}$ et $\frac{-15\pi}{12}$ puis les placer sur le cercle trigonométrique.



IV. Cercle trigonométrique et repérage :



On considère un repère (O;I;J) et le cercle de centre O passant par I.

Soit M(x ; y) un point du cercle , on a alors OH = ……. et OK = ……...

Dans le triangle OMH rectangle en H, on a :

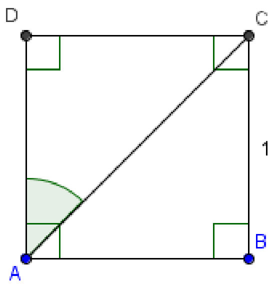
cos α = …........ or OM = …. donc cos α = …......... .

sin α = …........ or OM = ….. et HM = OK donc sin α = …......... .

Bilan : On considère un repère du plan (O , I, J)
On appelle cercle trigonométrique tout cercle de centre O et de rayon 1 sur lequel on fixe un sens de parcours anti-horaire appelé sens trigonométrique ou sens direct.

Pour tout point M(x ; y) appartenant au cercle trigonométrique , en notant α = $\widehat{IOM}$: $\begin{cases} x = \text{............} \\ y = \text{..........} \end{cases}$

Détermination de quelques mesures de référence :



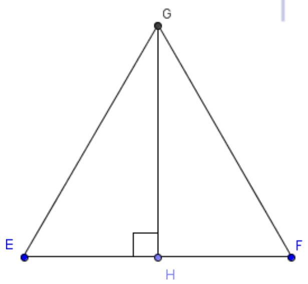
On considère un carré ABCD de côté 1.

La longueur AC vaut ….. l'angle $\widehat{DAC}$ = …...............

Dans le triangle ADC rectangle en D, on a :
cos $\widehat{DAC}$ = …... = …... donc …..........................

sin $\widehat{DAC}$ = …...... = ….. donc …........................

On considère un triangle équilatéral EFG de côté 1.

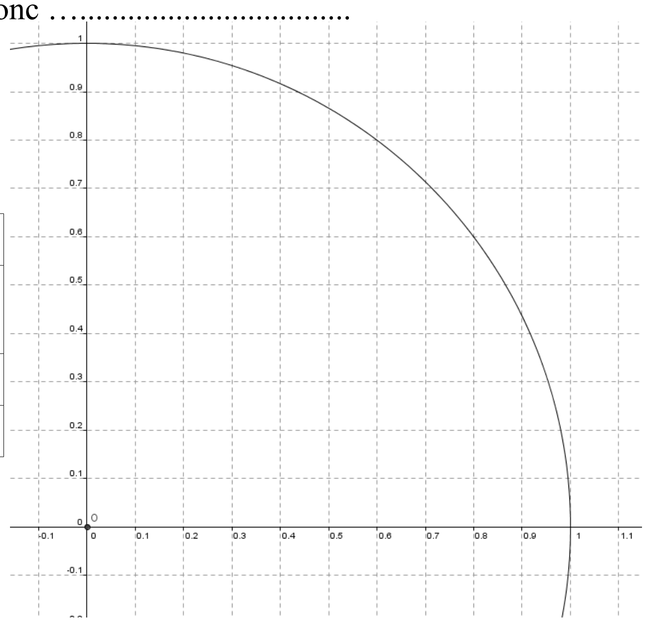


EH = …...... , HG = ….. et $\widehat{GEH}$ = ….................

Dans le triangle GEH rectangle en H, on a :

cos $\widehat{GEH}$ = ….... = …........ donc …...............................

sin $\widehat{GEH}$ = …....... = ….......... donc …...............................



Angle x	0°	30°	45°	60°	90°
Longueur exacte de l'arc correspondant					
Cos x					
Sin x					

V Propriétés du cosinus et du sinus :

Propriétés : Pour tout x réel,

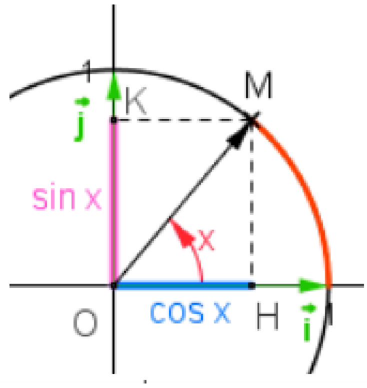
(1) $-1 \leq \sin x \leq 1$ **et** $-1 \leq \cos x \leq 1$

(2) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

(3) $\sin(-x) = \sin(x)$ **et** $\cos(-x) = \cos(x)$

(4) Pour tout entier k , $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos(x)$ *et* $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin(x)$

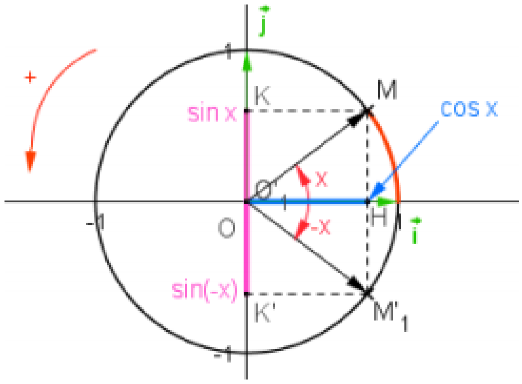
Remarque : $(\sin x)^2$ se note $\sin^2(x)$.



Preuve :

1) Le cercle trigonométrique est de rayon 1 donc :
$-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$

2) Dans le triangle OHM rectangle en H, le théorème de Pythagore permet d'établir que : $OH^2 + OK^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = OM^2 = 1$



3) Les angles de mesures x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc : $\sin(-x) = -\sin x$
et $\cos(-x) = \cos x$.

Application 3: utilisation de la relation des carrés :

- On donne cos $\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$. Calculer la valeur exacte de sin $\frac{\pi}{5}$.
- On donne cos $\alpha = \frac{-3}{5}$ et $\alpha \in [-\pi\ ;\ \frac{-\pi}{2}]$. Calculer la valeur de sin α.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

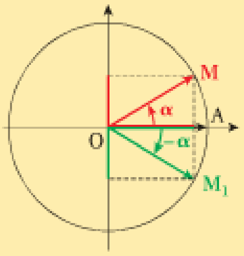
……………………………………………………………………………………………………

- ## **VI Angles associés :**

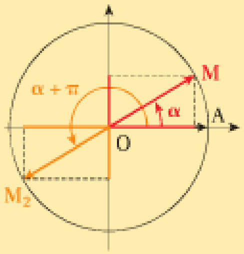
PROPRIÉTÉS

Pour tout nombre réel α, on a :

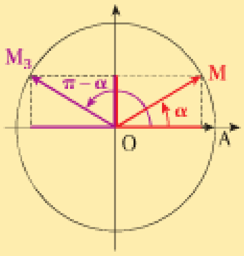
- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ et $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$



- $\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$ et $\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$



- $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ et $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$



- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$