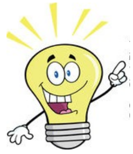
Les nombres complexes (II)
Équations dans $\mathbb{C}$

Compétences	*Exercices corrigés*
Résoudre une équation du 1er degré dans $\mathbb{C}$	*Savoir Faire 3 page 203, énoncé 2*
Résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du second degré à coefficients réels	*Savoir Faire 4 page 203 ;* *83 page 214*

I Résolution d'équations du 1er degré dans $\mathbb{C}$.

Exemple 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $3iz-2+i=z-3i$



On procède comme dans $\mathbb{R}$: on regroupe les termes comprenant l'inconnue z dans l'un des membres de l'équation et les termes constants dans l'autre membre.

(E) : $3iz-2+i=z-3i \Leftrightarrow 3iz-z=-3i+2-i \Leftrightarrow z(3i-1)=-4i-2 \Leftrightarrow z=\dfrac{-4i-2}{3i-1}$

L'équation(E) admet une unique solution : le complexe $z=\dfrac{-4i-2}{3i-1}$.

La forme algébrique de z est $-1+i$.

Exemple 2 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z-2\overline{z}=2i$

L'équation (E) contient des z et des $\overline{z}$. La méthode précédente ne fonctionne plus.
On pose $z=x+iy$, *on a* alors $\overline{z}=x-iy$.
On revient à la forme algébrique puis on applique la propriété sur l'égalité des nombres complexes.

(E) devient $x+iy-2(x-iy)=2i$

$x+iy-2(x-iy)=2i \Leftrightarrow x-2x+2iy+iy=2i \Leftrightarrow -x+3iy=2i \Leftrightarrow -x=0$ et $y=\dfrac{2}{3}$

L'équation(E) admet une unique solution : le complexe $z=\dfrac{2}{3}i$

Ex 9 à 11 page 210 ; 78 (1 et 3) p214 - 72 à 74 p 213

II Équation du second degré à coefficients réels :

a. Équation du type $z^2=a$

Propriété : soit a un réel non nul.
L'équation $z^2=a$ admet deux solutions dans $\mathbb{C}$:
- si $a>0$ alors les solutions sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
- si $a<0$ alors les solutions sont $i\sqrt{|a|}$ et $-i\sqrt{|a|}$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2=-4$

(E) admet deux solutions complexes : $2i$ et $-2i$

Ex 11 p211

b. Équation du type $az^2+bz+c=0$, a, b et c réels, $a\neq 0$

Propriété : Soit l'équation $az^2+bz+c=0$ d'inconnue z, où a, b et c sont des nombres réels, $a \neq \mathbf{0}$.
Le discriminant de cette équation est le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $z_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution réelle : $z=-\dfrac{b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $4z^2+16z+25=0$.

$\Delta=-144$; Δ est négatif donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées.

La formule ci-dessus donne $z_1=\dfrac{-16-i\sqrt{|-144|}}{8}=\dfrac{-16-12i}{8}$ et $z_2=\dfrac{-16+12i}{8}$

Autre méthode : $\Delta=-144=(12i)^2$, les solutions de (E) sont $z_1=\dfrac{-16-12i}{8}$ et $z_2=\dfrac{-16+12i}{8}$.

Exercices : 78 à 89 page 214

Pour s'auto-évaluer (brouillon indispensable) :
https://euler.ac-versailles.fr/baseeuler/lexique/notion.jsp?id=98

Une lecture*, accessible en TS, pour en savoir plus sur la méthode de Cardan :*
Article de Daniel Perrin, professeur à l'université Paris-Sud-Orsay :
https://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/algebre/Cardan10.pdf

III Exercices corrigés en vidéo :

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : **a)** $3iz+1=i$ **b)** $z-3i=iz+2$ La correction : ici

---

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $(z-2i)(2z+1-i)=0$ **b)** $4z^2=z$ **c)** $z-\dfrac{4}{z}=0$ **d)** $(2-i)z=2z+i$ La correction : ici

---

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $i(z+3)=2+i$ **b)** $\dfrac{z-5}{z+5}=z$ **c)** $\dfrac{z+3}{z}=\dfrac{z+1}{z+2}$ **d)** $z^2=9$ La correction : ici

---

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2=4z+5$ **b)** $z^2=4z$ **c)** $20z-25=4z^2$ **d)** $4z^2+12z=-10$ **e)** $z^2+2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)z+1=0$

--- La correction : ici

Exercice 5 : On souhaite résoudre l'équation $z^3+3z^2+11z+9=0$.
1. Vérifier que -1 est solution de cette équation.
2. Déterminer a, b, c tels que $z^3+3z^2+11z+9=(z+1)(az^2+bz+c)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3+3z^2+11z+9=0$. La correction : ici

---

Exercice 6 : Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.
a) L'équation $z^2+5z+2=0$ a deux solutions dans $\mathbb{C}$.
b) $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ est solution de l'équation $z^2+z+1=0$.
c) $2-3i$ et $-2+3i$ sont solutions de l'équation $z^2-4z+3=0$.
d) L'inverse de $3-4i$ est $0{,}6+0{,}8i$. La correction : ici