1 2 [f (n + m) − (f (n) + f (m))]

FONCTIONS	Fonctions de référence	2de

Dans ce chapitre nous allons étudier certaines fonctions particulières que vous devrez connaître (représentation graphique, sens de variation, signe sur leur ensemble de définition…).
Par la suite, on utilisera leur particularités pour étudier d'autres fonctions auxiliaires (cette année et bien sûr l'an prochain).
N'oubliez pas que nous avons déjà vu les fonction affines .

0) Sens de variation d'une fonction et signe d'une fonction

● Étudier le **sens de variation** d'une fonction sur un intervalle I consiste **à montrer** qu'elle est soit croissante, soit décroissante, soit constante (ou « rien du tout ») sur l'intervalle I.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soient deux réels x_1 et x_2 appartenant à I.

Dire que f est **croissante** sur I signifie que : si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$
(on dit que f « conserve l'ordre »).

Dire que f est **décroissante** sur I signifie que : si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$
(on dit que f « renverse l'ordre »).

● Déterminer le signe d'une fonction f c'est déterminer l'intervalle (l'ensemble des x) sur lequel f est positive et déterminer l'intervalle sur lequel f est négative.

I) La fonction carré

Préambule :

► Calculer :

$4\times 3^2 =$……………….…….. $\qquad (4\times 3)^2 =$………………

$(-3)^2\times 4 =$ …………………. $\qquad -3^2\times 4 =$ ………………

► Exprimer en fonction de x :

$(3x)^2 =$……….. $\qquad 2(-x)^2 =$………..

$-5x\times x =$ ………. $\qquad 5\times(-x)^2 =$……….

► Déterminer la valeur des expressions pour la valeur de x proposée :

$x = -1$: $4x^2 =$……….… $\qquad x = \frac{3}{4}$: $-2x^2 =$………….. $\qquad x = -3$: $-x^2+3x =$…………..

1. Définition et propriétés:

- **La fonction définie sur ℝ par $x \longmapsto x^2 = x\times x$ s'appelle la fonction carré.**
- **Tableau de valeurs :**

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = x^2$									

2. Variations de la fonction carré :

Propriétés : **La fonction carré est strictement décroissante sur] - ∞ ; 0 [.**

La fonction carré est strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [.

Tableau de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de $f(x) = x^2$		

Preuve : ……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

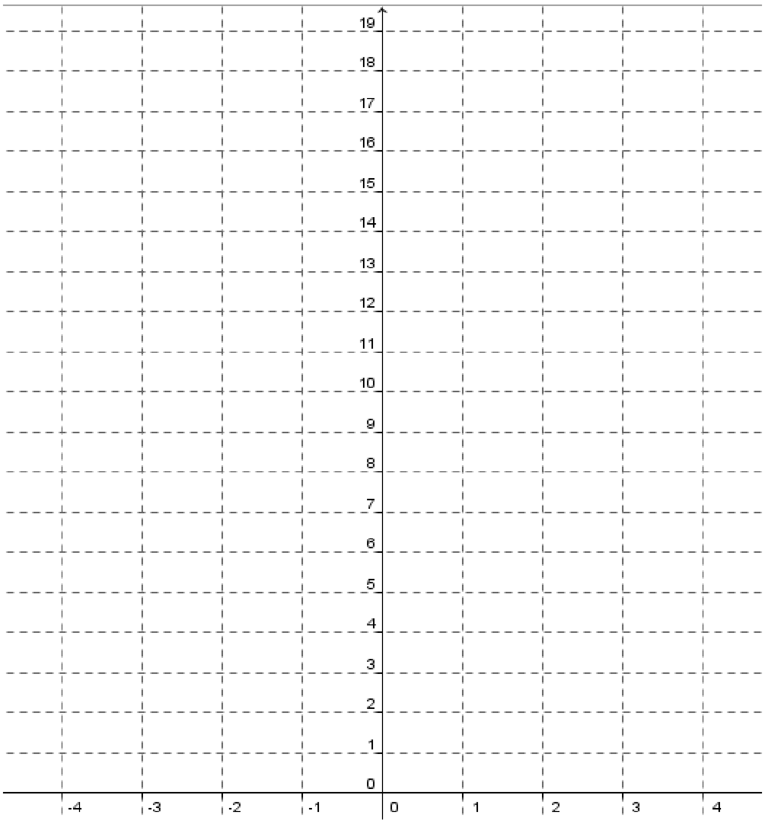
……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

3. Représentation graphique de la fonction carrée :

- Sa courbe représentative dans un repère (O, I, J) s'appelle une **parabole**

d'équation **y =** $\boldsymbol{x^2}$ et de **sommet** le point **O** de coordonnées $(0;0)$ **.**



Remarques :

- La parabole représentant la fonction carré est entièrement située au dessus de l'axe des abscisses .
  (un carré est toujours positif) !

- L'axe des ordonnées est un axe de symétrie de cette parabole
  C'est normal car deux nombres opposés ont le même carré : $x^2 = (-x)^2$

Application 1: Comparer les carrés de deux nombres :

$5{,}1^2$ et $5{,}03^2$: …………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………………………
$(-2{,}5)^2$ et $(-9)^2$: …………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………………………
$(\sqrt{(5)}+1)^2$ et $(\sqrt{(5)}-1)^2$: …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………………………
$7{,}3^2$ et $(-7{,}2)^2$: …………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………………………

Application 2 : Encadrer x^2 sur un intervalle :

encadrer x^2 sur $[5 ; 10]$: ………………………………………………………………………... …………………………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………………………
encadrer x^2 sur $[-5 ; -3]$: …………………………………………………………………………… …………………………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………………………

4. Équation carrée :

Propriétés:	► **deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ si $a > 0$,**
Une équation du type $x^2=a$ admet :	► **une solution unique 0 si $a = 0$,**
	► **aucune solution si $a < 0$.**

Preuve : on raisonne par disjonction des cas :
……………………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………….
………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………….

Exemples : résoudre $x^2 = 9$ résoudre $x^2 = 6$ résoudre $x^2 = -4$

S = ………... S = ………… S = …………

Exercice 1 :

1. Calculer les images par la fonction carrée *f* des nombres suivants :

a) -2 **b)** $\frac{2}{5}$ **c)** $\frac{3}{4}$ **d)** 10^3 **e)** 10^{-4} **f)** 0,7

2. Calculer les antécédents par la fonction carrée *f*, lorsque c'est possible, des réels :

a) 1 **b)** -16 **c)** 95 **d)** 25 **e)** 0,01 **f)** 0,36

Exercice 2 : Soit f la fonction carré définie $sur\ \mathbb{R}\ par\ f(x)=x^2$.

Pour chacune des phrases suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

1. Tous les nombres réels ont exactement une image par *f*.
2. Il existe un nombre réel qui n'a pas d'antécédent par *f*.
3. Tous les nombres réels ont, au plus, un antécédent par *f*.
4. Il existe au moins un nombre réel qui a deux antécédents par *f*.

Exercice 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2$.

On considère deux nombres réels *n* et *m* quelconques.

Calculer en fonction de *n* et *m*, l'expression suivante : $\frac{1}{2}[f(n+m)-(f(n)+f(m))]$.

Simplifier l'expression.

Exercice 4 : En vous inspirant de la méthode utilisée pour déterminer le sens de variation de la fonction carrée, déterminer le sens de variation sur]- ∞ ; 0] puis sur [0 ; +∞ [de la fonction : $f(x)=-3x^2$.

Exercice 5 : En utilisant les variations de la fonction carrée, comparer les nombres suivants :

a) $(-3)^2$ et $(-4)^2$ **b)** $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ et 3^2 **c)** $(\pi-3)^2$ et $(\pi+3)^2$

Exercice 6 : Afficher à l'écran de la calculatrice la courbe de la fonction carrée sur l'intervalle I suivant en précisant la fenêtre utilisée : **a)** I = [−0, 3; 0, 3] **b)** I = [100; 1 000] .

Exercice 7 :

Construction d'une parabole

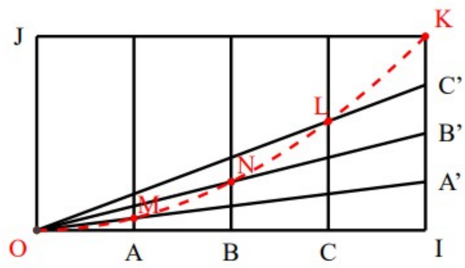
Voici un procédé utilisé par les tailleurs de pierres pour tracer une parabole sur un bloc rectangulaire.

Les points A, B, C du segment [OI] sont tels que :

OA = AB = BC = CI

Les points A', B', C' du segment [IK] sont tels que :

IA' = A'B' = B'C' = C'K



Justifier que les points O, M, N, L et K appartiennent à la courbe de la fonction carrée. (On pourra utiliser le théorème de Thalès)

II) La fonction inverse

1. **Définition :**

La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$

Remarques : - L'intervalle $]-\infty\ ;0[\ \cup\ ]0;+\infty[$ se note $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (« $\mathbb{R}$ privé de 0) .

- La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ car : ……………………………………………………

……

2. **Variations de la fonction inverse :**

Propriété : La fonction inverse est : ► strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;0[$;

► strictement décroissante sur l'intervalle $]0\ ;+\infty\ [$.

Tableau de variations de la fonction inverse :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variation de $\dfrac{1}{x}$	↘	‖	↘

Preuve : ……………………………………………………………………………………………

……

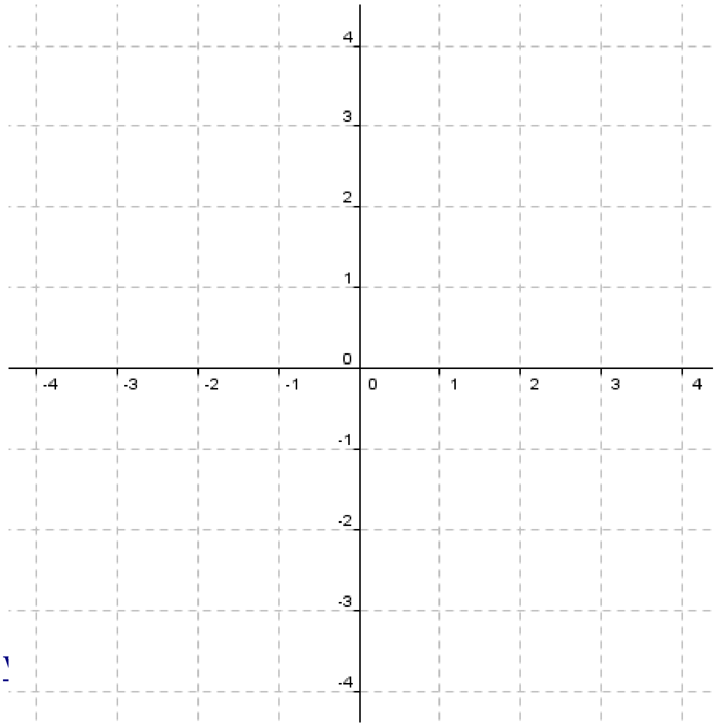
……

……

……

3. **Représentation graphique de la fonction inverse :**

x	-4	-3	-2	-1	- 0,5	-0,25	0,25	0,5	1	2	3	4
$f(x)=\dfrac{1}{x}$												



Remarque :
La représentation graphique de la fonction inverse est une **hyperbole** de centre O l'origine du repère .
Elle est **symétrique par rapport O** le centre du repère, ce qui est normal puisque $f(-x) = -\dfrac{1}{x} = -\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$

Applications :

► Comparer $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$: …………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

► Comparer $\frac{-1}{5}$ et $\frac{-1}{3}$: ……………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………..

► Encadrer la fonction inverse sur l'intervalle]2 ; 5] : ……………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………….

► Encadrer la fonction inverse sur l'intervalle]-13 ; -2[: ……………………………………

……………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………….

► En vous inspirant de la méthode utilisée pour déterminer le sens de variation de la fonction inverse, déterminer le sens de variation sur]0 ; +∞ [de la fonction : $f(x)=-3+\frac{2}{x}$.

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………….

III) La fonction racine carrée

Rappel : Pour tout réel positif a, $\sqrt{a}$ est le seul nombre positif dont le carré vaut a : $(\sqrt{a})^2 = a$.

Exemple : $(\sqrt{3})^2$ = ….

Définition : La fonction racine carrée est la fonction f définie sur [0 ; +∞[par $f(x)=\sqrt{x}$

Propriété : La fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; +∞ [.

Preuve : …………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

Pour la fonction racine carrée

Tableau de variation

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)=\sqrt{x}$	0 $\nearrow$ $+\infty$

Représentation graphique

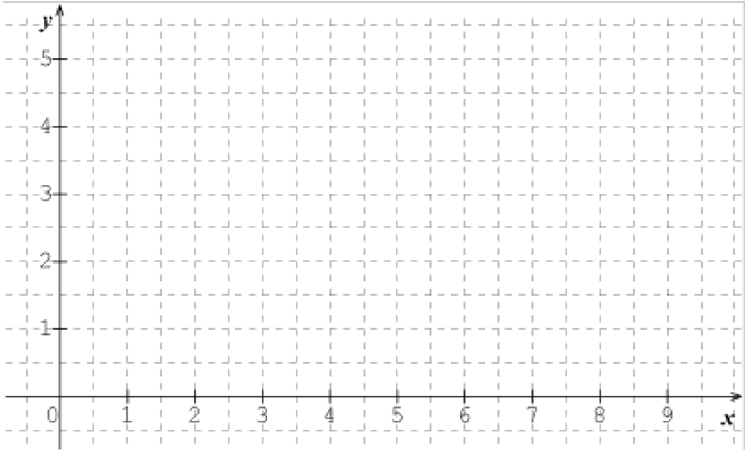


Tableau de valeurs

x	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9
$\sqrt{x}$					

À retenir : pour tous réels *x* et *y* positifs, $\sqrt{x}=y \Leftrightarrow x=y^2$

Applications :

► Comparer $\sqrt{3{,}12}$ et $\sqrt{3{,}113}$: ………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

► Comparer $\sqrt{2}$ et $\sqrt{\pi-1}$: ……………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

► Résoudre dans ℝ l'équation $\sqrt{x}=2$: ……………………………………………………

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

► En vous inspirant de la méthode utilisée pour déterminer les variations de la fonction racine carré, déterminer les variations de la fonction $f(x)=3-2\sqrt{x}$ sur [0 ; + ∞[

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

IV) La fonction cube

1. Définition :

La fonction cube est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

Exemples : $(-2)^3 = \ldots\ldots$ $8^3 = \ldots\ldots\ldots$ $(\sqrt{2})^3 = \ldots\ldots$ $(-5\sqrt{3})^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. Variations de la fonction cube :

Propriété : La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Autrement dit si $a < b$ alors $a^3 < b^3$

Preuve : ……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Tableau de variation

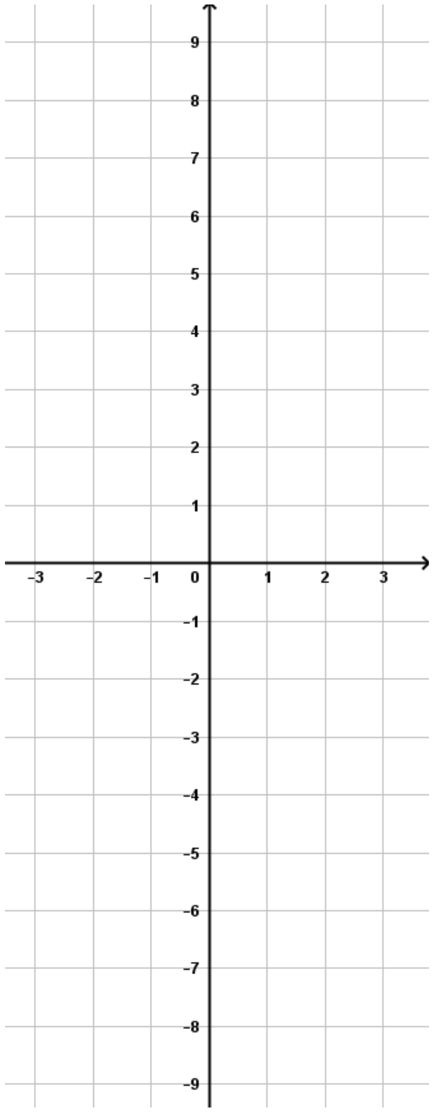
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)=x^3$	$-\infty$	$+\infty$

Tableau de valeurs

x	-3	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	3
x^3											

Remarque : $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

La courbe représentative de la fonction cube est donc symétrique par rapport au point O le centre du repère.



Applications :

comparer $(-3{,}12)^3$ et $(-3{,}118)^3$: ……………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Exemple commenté : Résoudre l'équation $x^3 = 1000$.

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc il existe un unique réel a tel que $a^3 = 1000$.

Ce nombre a s'appelle la racine cubique de 1000.

Or $10^3 = 1000$ ce que l'on peut aussi écrire $\sqrt[3]{1000} = 10$

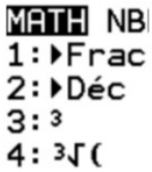
Autrement dit si $x^3 = 1000 \Leftrightarrow x^3 = 10^3 \Leftrightarrow x = 10$

S = {10}.

sur T I

menu Math

Puis taper 4



sur Casio

taper 3

puis taper shift

puis ^

Résoudre $x^3 = 125$: ……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

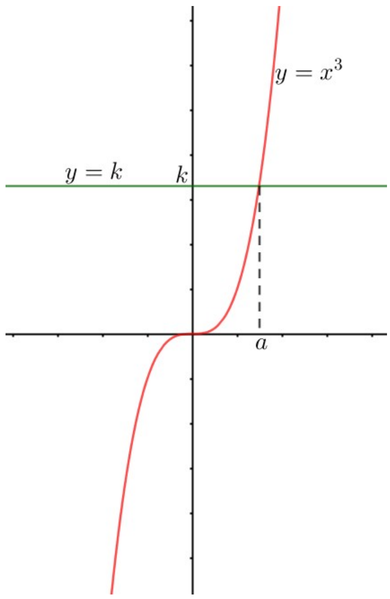
● Résoudre l'inéquation $x^3 \leq 8$. *on cherche quel nombre au cube donne* 8
la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi $x^3 \leq 8 \Leftrightarrow x^3 \leq 2^3 \Leftrightarrow x \leq 2$.
L'ensemble solution de cette inéquation sont donc tout les nombres inférieurs ou égaux à 2.
S = ……………..

Synthèse :

Pour résoudre une équation ou une inéquation « cubique » , on utilise le fait que la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Soit k un réel. Il existe alors un unique réel a tel que $k = a^3$.

- $x^3 = k \Leftrightarrow x = a$
- $x^3 \leq k \Leftrightarrow x \leq a \quad \Leftrightarrow S =]-\infty; a]$
- $x^3 \geq k \Leftrightarrow x \geq a \quad \Leftrightarrow S = [a ; +\infty[$



Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^3 > -64$:
……………………………………………………………

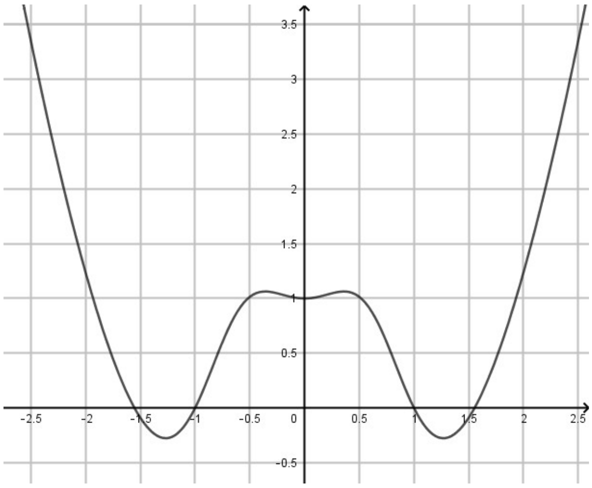
……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

V) Parité d'une fonction

Activité 1 (« la molaire »)



1) On donne ci-contre la courbe représentant une fonction f. Par lecture graphique :

1.a) comparer $f(2)$ et $f(-2)$: …………………...

1.b) comparer $f(-1)$ et $f(1)$: ……………………

1.c) comparer $f(-2,5)$ et $f(2,5)$: ………………

1. d) comparer $f(-x)$ et $f(x)$: ………………

1.e) Quelle propriété géométrique possède cette courbe ? ………………………………………
……………………………………………………………………………………………

2) l'expression générale de la fonction représentée ci-dessous est : $f(x)=\frac{4}{x^4+1}+x^2-3$

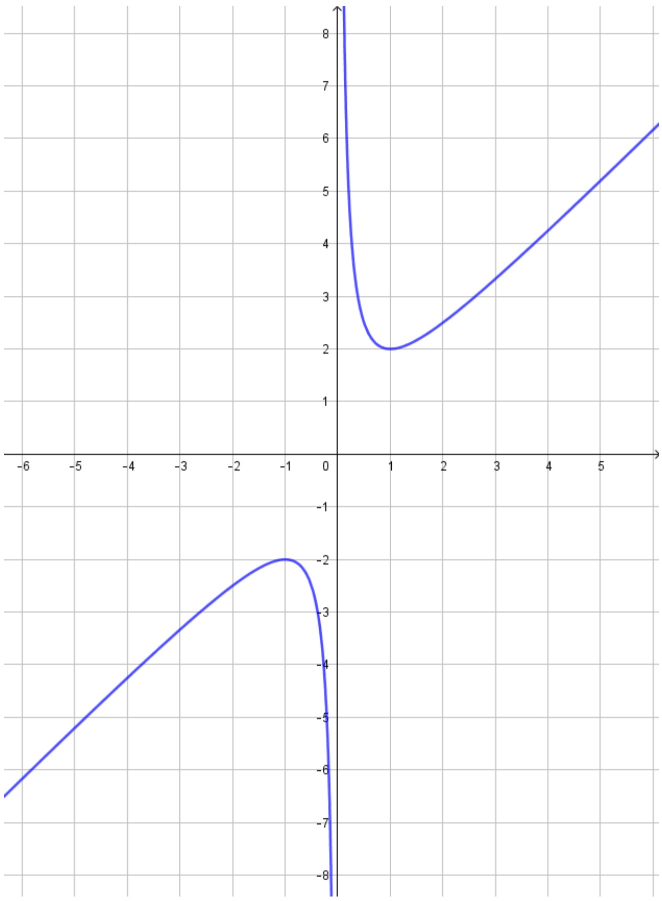
2.a) Quelle est le domaine de définition de f ? : ………………………

2.b) Retrouve par le calcul le résultat du 1.b : ………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

2.c) Retrouve par le calcul le résultat du 1.d : ………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

2.d) Comment pourrait-on qualifier cette fonction f ? …………………………………..

Activité 2



1) On donne ci-contre la courbe représentant une fonction g. Par lecture graphique :

1.a) comparer $g(2)$ et $g(-2)$: …………………...

1.b) comparer $g(-1)$ et $g(1)$: ……………………

1. c) comparer $g(-x)$ et $g(x)$: …………………...

1.d) Quelle propriété géométrique possède cette courbe ? ……………………………………
……………………………………………..

2) l'expression générale de la fonction représentée ci-contre est : $g(x)=\frac{x^3+x}{x^2}$

2.a) Quelle est le domaine de définition de g ? :
……………………………………………

2.b) Retrouve par le calcul le résultat du 1.b :
……………………………………………

2.c) Retrouve par le calcul le résultat du 1.c :
……………………………………………
……………………………………………………………………………………………

2.d) Comment pourrait-on qualifier cette fonction g ? …………………………………..

<u>Définition</u> : On dit que I, une partie de $\mathbb{R}$, est centrée en zéro si :
pour tout x de I alors $-x$ appartient aussi à I.

<u>Par exemple :</u>
Les intervalles I = [-3 ; 3] et J =]-100 ; 100 [sont centrés en zéro.
$\mathbb{R}$ est un intervalle centré en zéro car il peut s'écrire]-∞ ; + ∞[
L'intervalle [0 ; 10] n'est pas un intervalle centré en zéro.

<u>Définition</u> : Soit f une fonction **définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ <u>centré en zéro.</u>**

► On dit que f est **paire** lorsque pour tout x de I : $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$.

► On dit que f est **impaire** lorsque pour tout x de I : $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$.

<u>Étudier la parité</u> d'une fonction c'est <u>montrer si elle est paire</u>, <u>impaire</u> ou <u>ni l'un ni l'autre</u>.

Citer des fonctions paires que l'on a déjà rencontrées: ……………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

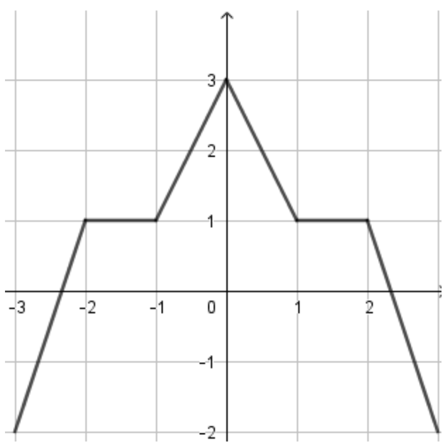
Citer des fonctions impaires que l'on a déjà rencontrées : ………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

<u>Remarque</u> : <u>Interprétation graphique de la parité</u> :

► Lorsqu'une fonction f est **paire** alors ……………………………………….… est un axe de symétrie de sa courbe représentative $\mathcal{C}f$ dans un repère orthogonal.

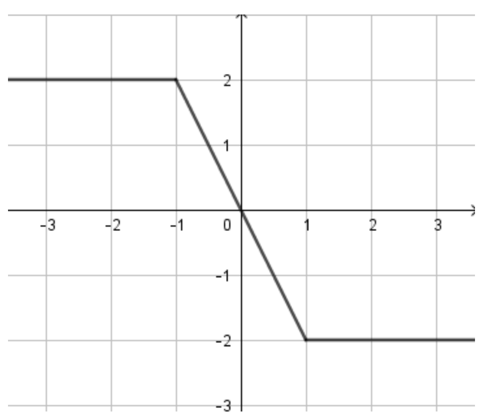
► Lorsqu'une fonction g est **impaire** alors ………………………………………..… est le centre de symétrie de sa courbe représentative $\mathcal{C}g$.

Exemple :



La fonction représentée est …………………
car ………………………………………………..
…………………………………………………

Exemple :



La fonction représentée est …………………
car ………………………………………………..
…………………………………………………

Point méthode : lorsqu'on veut étudier la parité d'une fonction :

► Il faut en premier vérifier que l'ensemble de définition de la fonction est centré en zéro si ce n'est pas le cas elle ne peut-être ni paire ni impaire.

► Si c'est le cas, quand on veut montrer qu'elle est paire ou impaire, il faut montrer, pour tout nombre appartenant à l'ensemble de définition, que soit $f(-x) = f(x)$ (elle est paire) ou que soit $f(-x) = -f(x)$ (elle est impaire). (principe de l'égalité pour tout x, calcul littéral).

► Si on pressent au contraire qu'elle ne peut être ni l'un ni l'autre, il suffit de trouver un contre-exemple pour lequel on a ni $f(-x) = f(x)$ et ni $f(-x) = - f(x)$ (principe du contre-exemple).

Exemples : Étudier la parité des fonctions suivantes :

$f(x) = 2x^2 - 3$ …………………………… $g(x) = \dfrac{-3}{x}$ ……………………………………..

…………………………………….. ……………………………………..

$h(x) = 2x + 1$ …………………………… $k(x) = x^3 + 1$ ……………………………

…………………………………….. ……………………………………..

$u(x) = x^2 - x$ …………………………… $v(x) = \sqrt{x}$ ……………………………

…………………………………….. ……………………………………..

Exemples :

1) Compléter la courbe ci-contre en **rouge** pour que la courbe alors obtenue soit représentative d'une fonction f **paire** .

2) Compléter la courbe ci-contre en **vert** pour que la courbe alors obtenue soit représentative d'une fonction g **impaire**.

3) Établir le tableau de variations de f .