Fonctions (III)	Les fonctions trigonométriques

Compétences	*Exercices corrigés*
Calculer la dérivée d'une fonction trigonométrique	4 page 81
Utiliser la parité et la périodicité d'une fonction	Application 1 et 5 page 81
Étudier la limite d'une fonction trigonométrique	Application 2 et 6 page 83
Étudier le signe d'une expression trigonométrique	7 page 83 et 98 page 89
Étudier une fonction trigonométrique	8 page 83 et 111 page 90

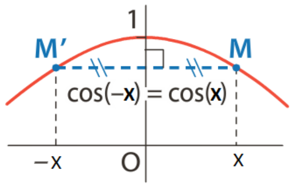
Un autre cours en vidéo Mathrix : https://www.youtube.com/watch?v=OnBW3Rl2ipc
Une carte mentale (site Rallymaths.fr) : : http://rallymaths.free.fr/terminale/TS_CM_TRIGO.pdf

I - La fonction cosinus

a. Définition

La fonction qui à tout réel x, associe le réel $\cos(x)$ est appelée fonction cosinus : $\cos : \ x \to \cos(x)$.

b. Propriétés



- Pour tout réel x, **$\cos(-x) = \cos(x)$**.
On dit que la fonction cosinus est une **fonction paire**.
Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

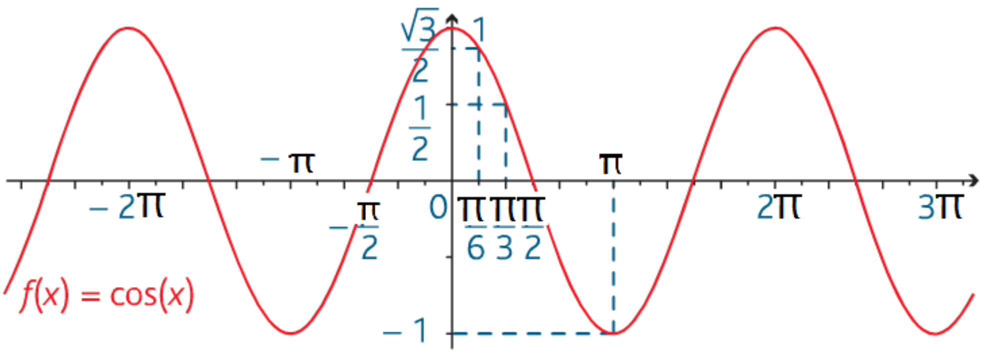
- Pour tout réel x, **$\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$.**
On dit que la fonction cosinus est **2π-périodique ou périodique de période 2π**.
Sa courbe représentative est donc invariante par translation de vecteur 2π ou -2π.

- La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$

- Son tableau de variations :
La fonction étant 2π-périodique, on l'étudie sur un intervalle de longueur 2π, $[-\pi ; \pi]$ par exemple

x	$-\pi$		0		π
$\cos' x = -\sin x$		$+$	0	$-$	
$\cos x$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

Sa courbe représentative : on la trace sur $[-\pi ; \pi]$ puis on la complète par translation de vecteur 2π.

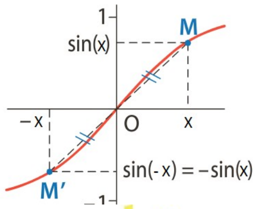


II - La fonction sinus

a. Définition

La fonction qui à tout réel x, associe le réel sin(x) est appelée fonction sinus : sin : $x \to \sin(x)$.

b. Propriétés



- Pour tout réel x, $\mathbf{\sin(-x)=-\sin(x)}$.
On dit que la fonction sinus est une **fonction impaire**.
Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'origine du repère.

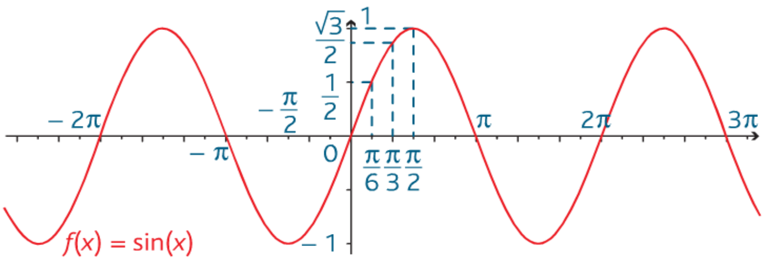
- Pour tout réel x, **sin(x) = sin(x + 2π).**
On dit que la fonction sinus est **2π-périodique ou périodique de période 2π**.
Sa courbe représentative est donc invariante par translation de vecteur 2π ou -2π .

- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x)=\cos(x)$

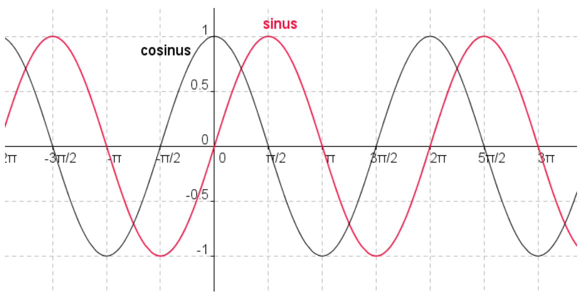
- Son tableau de variations :
la fonction étant 2π-périodique, on l'étudie sur un intervalle de longueur 2π , [- π ; π] par exemple

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin' x = \cos x$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\sin x$	0	↘	-1	↗	1	↘	0

Sa courbe représentative : on la trace sur [- π ; π] puis on la complète par translation de vecteur 2π .



Les courbes des fonctions sinus et cosinus sur un même graphique :



Exercices

Dérivation : 68 à 72 page 87

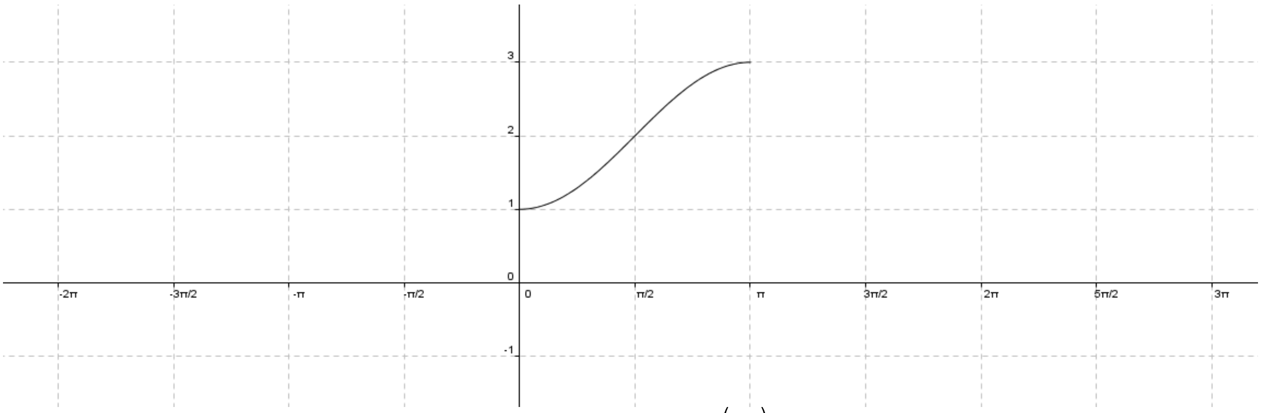
***Rappel :* Si $u(x)=v(ax+b)$ alors $u'(x)=a\,v'(ax+b)$ (voir chapitre dérivation)**

Parité : 79 page 87 + fiche

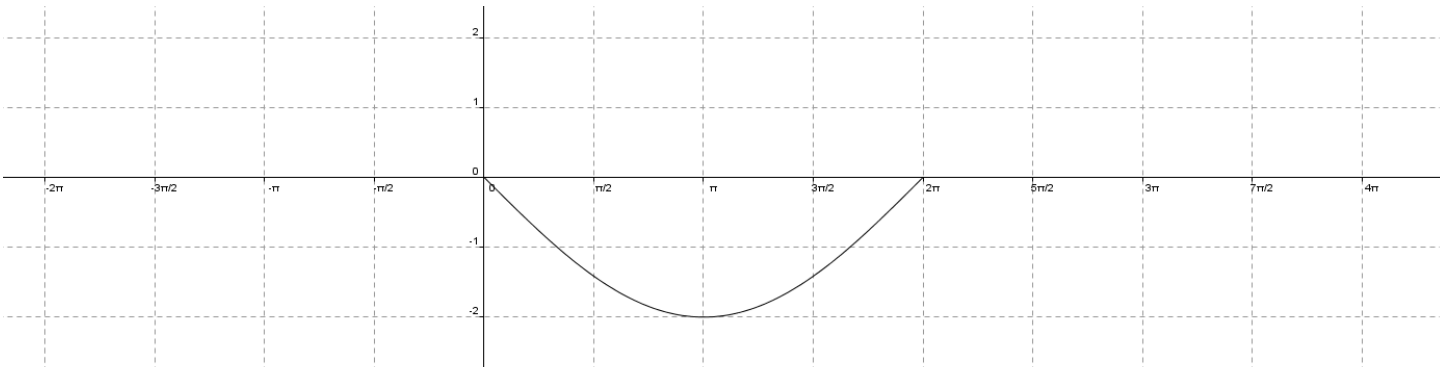
Signe d'une fonction trigonométrique : 93 à 96 page 88

<u>Application 1 :</u> Utiliser la parité et la périodicité d'une fonction trigonométrique :

Exemple 1. Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x)=2-\cos(x)$.
Sa courbe C_f est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal, sur l'intervalle [0 ; π].
a) Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. Compléter C_f en sur [- π ; 0] en justifiant.
b) Exprimer $f(x+2\pi)$ en fonction de $f(x)$. Compléter C_f sur [π ; 3π] en justifiant.



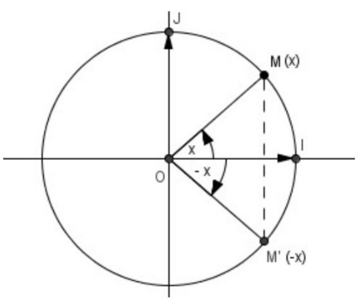
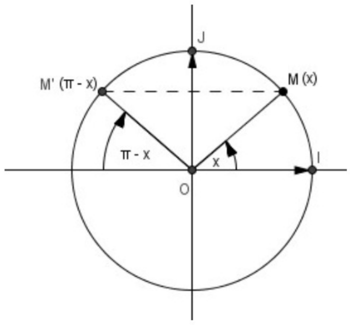
Exemple 2. Soit g la fonction définie sur ℝ par $g(x)=-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$.
Sa courbe C_g est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal sur [0 ; 2π].
a) Exprimer $g(-x)$ en fonction de $g(x)$. Compléter C_g sur [-2π ; 0] en justifiant.
b) Exprimer $g(x+4\pi)$ en fonction de $g(x)$. Compléter C_g sur [2π : 4 π] en justifiant.



<u>IV Inéquations trigonométriques :</u>

<u>a) Équation trigonométrique :</u>

On cherche à se ramener à une équation de la forme sin (α)=sin (β) ou cos (α)=cos (β) .
Il faut penser à utiliser le cercle trigonométrique .

Équation	$\cos x = \cos a$	$\sin x = \sin a$
Représentation graphique		
Interprétation	$\begin{cases} M \text{ et } M' \text{ ont même abscisse} \\ \cos a=\cos x \text{ ou } \cos a=\cos(-x) \end{cases}$	$\begin{cases} M \text{ et } M' \text{ ont même ordonnée} \\ \sin a=\sin x \text{ ou } \sin a=\sin(\pi-x) \end{cases}$
Solutions :	L'équation $\cos x = \cos a$ a pour solutions les nombres réels $x = a$ [2π] et $x = - a$ [2π] .	L'équation $\sin x = \sin a$ a pour solutions les nombres réels $x = a$ [2π] et $x = \pi - a$ [2π].

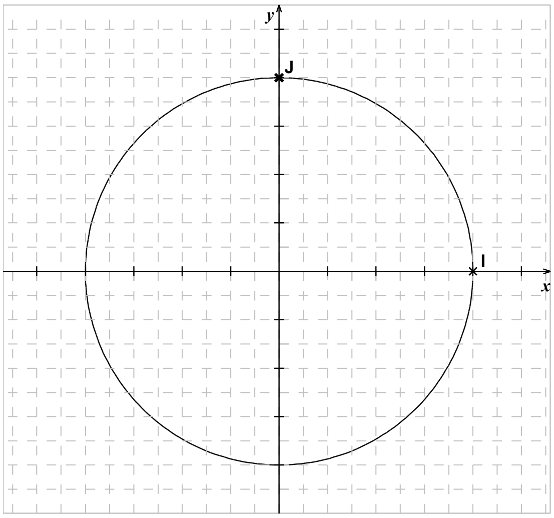
Application : Résoudre l'équation $\cos x = \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)$ dans $]-\pi ; \pi]$.

Dans] - π ; π] , les solutions sont $\frac{-\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$.

- Résoudre $\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ dans $[0 ; 2\pi[$ On a : $\cos \frac{5\pi}{6} = \cos x$ donc $x = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$

b) Inéquations trigonométriques (sur un exemple) :

Résoudre l'inéquation $\sin(x) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans]-π ; π] puis dans [0 ; 2π[:



1e étape : on repère les solutions de l'équation $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur le cercle trigonométrique .

2e étape : On colorie en rouge la partie du cercle trigonométrique solution de l'inéquation $\sin(x) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3e étape :

► On donne l'ensemble solution dans]-π ; π] :

► On donne l'ensemble solution dans [0; 2π[:

Exercice 1 : soit *f* la fonction définie sur $[0 ; 2\pi]$ par $f(x) = (1 - \cos x)\sin x$

1. Calculer $f(-x)$ et interpréter le résultat géométriquement.
2. Calculer $f'(x)$
3. Montrer que $f'(x) = (1 + 2\cos x)(1 - \cos x)$
4. En déduire les variations de *f*.

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$ b) $\cos(4x) = \frac{1}{2}$ c) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Exercice 3 : L'intensité I dans un circuit électrique exprimée en ampère (A) est une fonction du temps donné en millisecondes (ms). On suppose que l'on a $\mathrm{I}(t) = \sqrt{3}\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$

1. Montrer que π est une période de la fonction I. Quelle interprétation géométrique peut-on faire ?
2. Déterminer les variations de I sur $[0 ; +\pi]$
3. Tracer C_f sur $[0 ; +\pi]$ puis sur $[0 ; 2\pi]$.

Exercices 106 ; 108 ; 109 ; 110 p 89 ; 119 p 90
Fonction Tangente : n°112 page 90