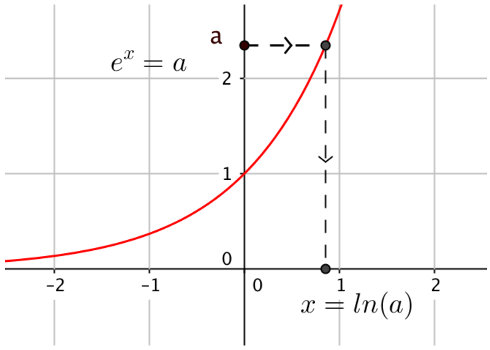
Logarithme Népérien

Compétences	*Exercices corrigés*
Connaître le sens de variation, les limites et la représentation graphique de la fonction logarithme népérien.	*Savoir-faire 2 p 137*
Savoir utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture	*Savoir-faire 3 et 4 p 139 ; 4p 139*
Savoir résoudre des équations ou inéquations avec ln Savoir résoudre des équations du type $a^n=b$, $a>0$ et $b>0$	*Savoir-faire 1 p 137 ; 48 p 146* *Application 1 et 2*
Connaître et exploiter les limites liées à la fonction ln	*Savoir-faire 5 et 6 p141*
Savoir étudier une fonction de la forme $\ln(u)$	*Savoir-faire 7 p 143 ; 96 p 150*

I. La fonction logarithme népérien

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0;+\infty[$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel a de $]0;+\infty[$, l'équation $e^x=a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.



Définition : On appelle **logarithme népérien d'un réel strictement positif *a***, l'unique solution de l'équation $e^x=a$ que l'on note **ln *a***.

La **fonction ln** est définie sur $]0;+\infty[$.

Elle associe à tout réel x strictement positif le nombre y, noté $\ln(x)$, dont l'exponentielle est x.

Conséquences

1. Pour tout réel $x>0$, $e^{\ln(x)}=x$ par définition.

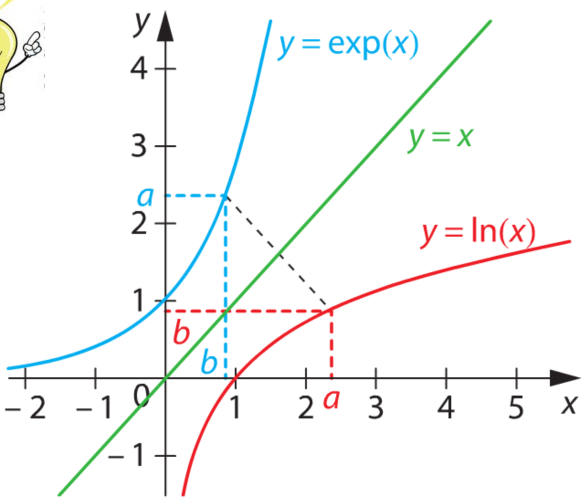
2. Pour tout x, $\ln(e^x)=x$

3. $\ln(1)=0$ et $\ln(e)=1$

Théorème : Pour tout réel a strictement positif et pour tout nombre b, $\ln(a)=b \Leftrightarrow a=e^b$

Preuve : Si $\ln(a)=b$ alors $e^{\ln a}=e^b=a$.

Réciproquement, si $a=e^b$ alors $\ln(a)=\ln(e^b)=b$



Conséquences : les courbes représentatives des fonctions exponentielle et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$. On dit que les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.

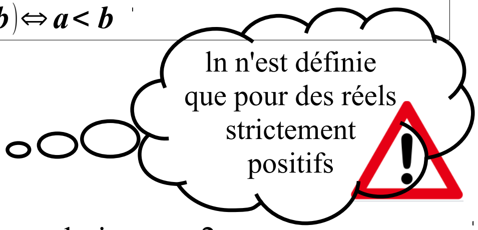
Théorème : La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur]0;+∞[.

Preuve : Soient u et v deux réels strictement positifs tels que $u<v$.

Or $u<v$ s'écrit $e^{\ln(u)}<e^{\ln(v)}$.

La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ donc nécessairement $\ln(u)<\ln(v)$.

Conséquences : Pour tous réels a et b strictement positifs : $\mathbf{\ln(a)=\ln(b) \Leftrightarrow a=b}$
et $\mathbf{\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b}$



Exemple 1 : Résoudre l'équation $\ln(x-1)=0$

Cette équation n'a de sens que pour $x-1>0$ c'est-à-dire pour $x>1$

$\ln(x-1)=0 \Leftrightarrow \ln(x-1)=\ln(1)$ car l'antécédent de 0 par ln est 1.

$\ln(x-1)=0 \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2$ L'équation admet une unique solution $x=2$.

<u>**Exercice 1 :**</u> **a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x-3)=\ln(9-x)$.

b) Résoudre l'inéquation $\ln(3-x) < \ln(x+1)$.

Ex 6 à 9 p 144 - 14 ; 15 p 144 - 39 à 47 p 146

II. Propriété de la fonction logarithme népérien

Introduction **:** extrait du manuel Transmaths (édition 2012)
Construction d'une table de logarithme, approche des propriétés de ln

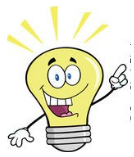
1. Relation fondamentale dite aussi relation fonctionnelle

Théorème : Pour tous réels a et b strictement positifs, on a : $\mathbf{\ln(a \times b)=\ln(a)+\ln(b)}$
Autrement dit, la fonction ln transforme les produits en somme. *Preuve*

Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+\ln(2+e^{-3x})$.

Montrer que $f(x)=\ln(2e^{x}+e^{-2x})$

2. Conséquences de la propriété fondamentale



Théorème : Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :
$$\mathbf{\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)} \text{ et } \mathbf{\ln\left(\frac{1}{b}\right)=-\ln(b)}$$ *Preuve*

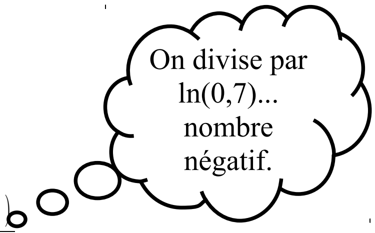
Théorème : Pour tous réels a et b strictement positif et tout entier relatif n, on a : $\mathbf{\ln(a^{n})=n \times \ln(a)}$

Preuve par récurrence (manuel page 138).

Théorème : Pour tout réel a strictement positif, $\mathbf{\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2} \times \ln(a)}$ *Preuve*

Exercice 3 : a) Exprimer $\ln(4^{-3})+5\ln(2)$ en fonction de $\ln(2)$.

b) Exprimer $\ln(\sqrt{3})+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right)$ en fonction de $\ln(5)$.



Exemple : Déterminer le plus petit entier n tel que $0,7^{n} \leqslant 10^{-2}$.

$0,7^{n} \leqslant 10^{-2} \Leftrightarrow \ln(0,7^{n}) \leqslant \ln(0,01) \Leftrightarrow n \times \ln(0,7) \leqslant \ln(0,01) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,7)}$

$\Leftrightarrow n \geq 12,9$ donc $n=13$

Exercice 4 : Un enquêteur effectue un sondage par téléphone. La probabilité que le correspondant décroche et accepte de répondre à l'enquête est de 0,2. Combien d'appels l'enquêteur doit-il passer au minimum pour que la probabilité qu'au moins un correspondant réponde au sondage soit supérieure à 0,999 ?

Ex 20 à 27 p 145 - 65 et 66 p 147 - 69 à 74 p 148

III. Étude de la fonction logarithme népérien

1. Continuité et dérivabilité

Théorème (admis) : La fonction logarithme népérien est continue sur $]0;+\infty[$.

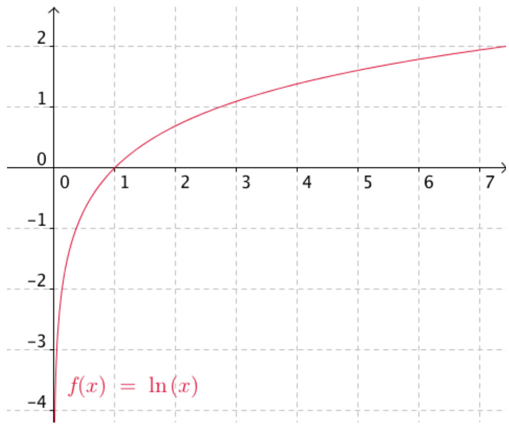
Théorème : La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

Preuve (manuel page 136)

Exercice 5 : Dériver la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}x^2 + 1$.

Exercice 6 : Dériver la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

Ex 16 à 19 p 145 ; 55 à 64 p 147



2. Limites aux bornes et courbe représentative de la fonction ln

Propriété : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

Preuves page 140

La fonction $x \to \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

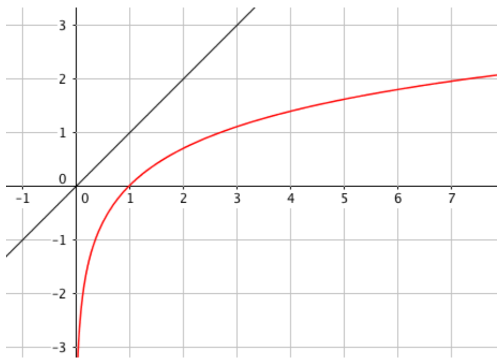
3. Limites à connaître

Théorème (*Preuves page 140)*

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$



***Exemples* :** Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln x)$ On a une forme indéterminée de la forme $+\infty - \infty$

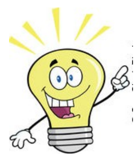
$x - \ln(x) = x\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = 1$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

Par « produit des limites », $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln(x)) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x-1}$ On a une forme indéterminée de la forme $\dfrac{+\infty}{+\infty}$

$\dfrac{\ln x}{x-1} = \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{x}{x-1}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ de plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$

Par « produit» des limites, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 0$.



c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$ On a une forme indéterminée de la forme $\dfrac{+\infty}{+\infty}$

$\dfrac{\ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x^2} = +\infty$.

***Exercice 7* :** Soit la fonction *f* définie sur]0 ; + ∞[par $f(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x$.

a. Déterminer les limites aux bornes de son intervalle de définition. Que peut on en déduire ?

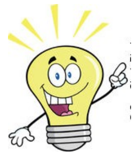
b. Montrer que $f'(x) = \dfrac{3(\ln x - 1)(\ln x + 1)}{x}$ puis dresser le tableau de variation de *f*.

c. Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse 1.

d. Résoudre $f(x) = 0$ puis construire C_f et T dans un repère.

Ex28 à 34 p 145 - 81 à 90 p 149

IV. Fonctions de la forme ln(u)



Théorème : Soit *u* une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $\boldsymbol{x} \to \mathbf{ln}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))$ est dérivable sur I. Sa dérivée est la fonction $x \to \dfrac{\boldsymbol{u'}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})}$.

Exemple : Soit la fonction *f* définie sur $]0;2[$ par $f(x) = \ln(2x - x^2)$. Déterminer $f'(x)$.

$u(x) = 2x - x^2$ et $u'(x) = 2 - 2x$ d'où $f'(x) = \dfrac{2 - 2x}{2x - x^2}$.

Théorème : Soit *u* une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
Les fonctions $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{x} \to \mathbf{ln}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))$ ont le même sens de variation. *Preuve*

Exercice 8 : On considère la fonction *f* définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{1-x}\right)$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f .

b) Calculer les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition.

c) Déterminer le sens de variation de la fonction *f*.

Ex 35 à 38 p 145 - 91 à 95 p 149 - 97 p 150

V. Logarithme décimal

Merveilleux logarithmes de Mickaël Launay : https://www.youtube.com/watch?v=rWfl7Pw8YVE

Définition : on appelle fonction logarithme décimal la fonction notée **log** définie sur $]0;+\infty[$ par

$$\log(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$$

Propriétés : $\log(10)=1$ $\log(1)=0$ $\log(10^n)=n$

Pour tous réels *a* et *b* strictement positifs, on a :

$\log(a\times b)=\log(a)+\log(b)$; $\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$ et $\log(a^n)=n\times\log(a)$

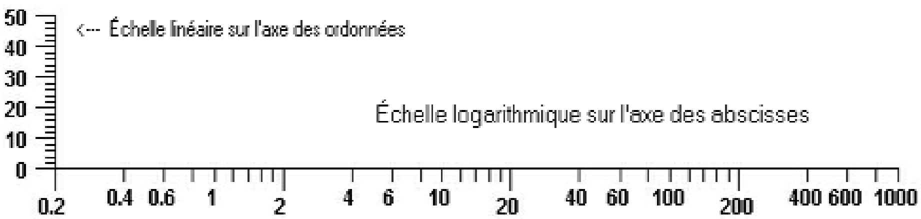
Application : échelle logarithmique

Échelle linéaire : la même distance sépare les divisions 2 et 3, ou encore 8 et 9. L'écart en distance entre deux graduations dépend de leur différence.

Échelle logarithmique : la même distance sépare les divisions 1 et 10, ou encore 30 et 300. L'écart en distance entre deux graduations dépend de leur rapport.

Repère semi-logarithmique : c'est un repère dans lequel l'un des axes, par exemple celui des ordonnées, est gradué selon une échelle linéaire alors que l'autre axe, est gradué selon une échelle logarithmique .
Le repère semi-logarithmique permet de représenter des phénomènes exponentiels ou, plus généralement, des mesures qui peuvent prendre des valeurs très éloignées l'une de l'autre.

Exemple :



Activité 5 page 135 à réaliser sur le papier semi-logarithmique qui vous est fourni

Application 4 : Savoir-faire 8 page 143 ; 98 p 150

Le logarithme népérien, également dit naturel, voire hyperbolique depuis Euler, autrefois noté Log, est noté aujourd'hui ln.

Il vérifie pour tout $x>0$, $\ln(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ L'aire sous la courbe de l'hyperbole de 1 à *e* vaut... 1 !

Il aurait pu être introduit ainsi, comme primitive de $1/x$, mais les programmes actuels demandent de l'introduire à partir de la fonction exponentielle,
le logarithme de *x* étant l'unique solution de l'équation $\mathrm{e}^x=m$
Le nombre *e* dit nombre d'Euler est un nombre réel tel que *e* =2, 7182818284 5904523536....

e est irrationnel, transcendent et $\mathrm{e}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

…

m@ths et tiques de Yvan Monka : http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths/nombres/le-nombre-e
Site québécois : http://www.math.uqam.ca/~boileau/Explorations2010/Nombre_e/siteHistoire.html
pour découvrir les applications de *e* dans divers domaines.