TS	Suites numériques CORRECTION	Rappel 1S

Exercice 1 : Dans tout l'exercice, on considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 3n^2 - 5n + 4 \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_{n+1} = 5v_n + 2n - 3 \\ v_0 = 6 \end{cases}.$$

1) Calculer u_0 ; u_1 puis u_{10}.

$u_0 = 4$; $u_1 = 2$ et $u_{10} = 3 \times 10^2 - 5 \times 10 + 4 = 254$

2) Calculer v_1 ; v_2 puis à l'aide de la calculatrice, donner la valeur de v_6.

$v_1 = 5 \times v_0 + 2 \times 0 - 3 = 5 \times 6 - 3 = 27$ $\qquad$ $v_2 = 5 \times v_1 + 2 \times 1 - 3 = 5 \times 27 + 2 - 3 = 134$

A la calculatrice $v_6 = 83\,982$

3) Compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche, à partir de l'entier *N* saisi, le terme v_N.

Entrée : Saisir N
Traitement : V ← 6
Pour K allant de 1 à N **faire** $\qquad$ **OU** **Pour** K allant de 0 à N-1 **faire**
V ← 5×V+2×(K -1) – 3 $\qquad$ V ← 5×V+2×K - 3
FinPour
Sortie : Afficher V

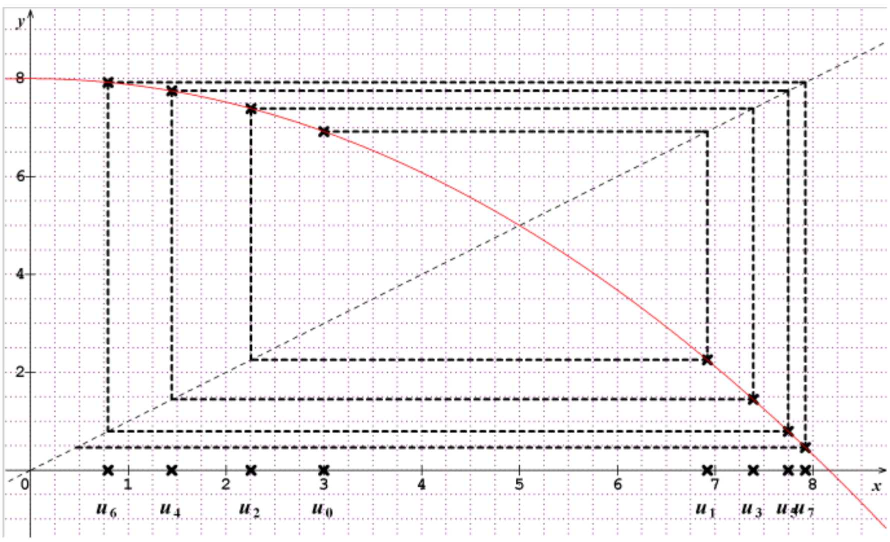
Exercice 2 : Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel *n*, par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 8 - 0{,}12 \times u_n^2 \end{cases}$.

1) Calculer u_1 et u_2.

$u_1 = 8 - 0{,}12 \times u_1^2 = 8 - 0{,}12 \times 3^2 = 6{,}92$

$u_2 = 8 - 0{,}12 \times u_2^2 = 2{,}253632$

2) On a tracé ci-dessous dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction *f* par $f(x) = 8 - 0{,}12x^2$ et la droite $y = x$.



3) On souhaite comparer les valeurs trouvées graphiquement avec celles obtenues avec un tableur :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	Un	3	6,92	2,25363	7,39054	1,4456	7,74923	0,79393	7,92436	0,46454	7,9741	0,36964	7,9836	0,35145	7,98518	0,34843	7,98543	0,34795

a) Quelle formule, recopiée vers la droite, a t-on saisi dans la cellule C2 ?
C2=8-0,12*C1*C1

b) De quelles valeurs semblent se rapprocher (u_n) lorsque *n* devient grand ? *On pourra discuter selon la parité de n.*

Lorsque *n* devient grand, les termes de rangs impairs se rapprochent de 8
et les termes de rangs pairs se rapprochent de 0.

Exercice 3 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0=\frac{3}{2}$ et pour tout entier n, $u_{n+1}=\frac{u_n+1}{2u_n+1}$.

1. Calculer, à la main, u_1 et u_2 .

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme :

Il a oublié de compléter deux lignes.

2. a) Compléter les deux lignes manquantes de l'algorithme.

```
n ← 0
u ← 1,5
Tant que n < 9 faire
        u ← (u+1)/(2u+1)
        n ← n+1
Fin Tant que
Afficher u
```

3. b) Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_1 à u_9 ?

Il faut mettre la commande « Afficher u » dans la boucle.

4. A l'aide de la calculatrice, conjecturer la monotonie de cette suite ainsi que sa limite.

La suite (u_n) semble non monotone et elle semble converger vers 0,707.

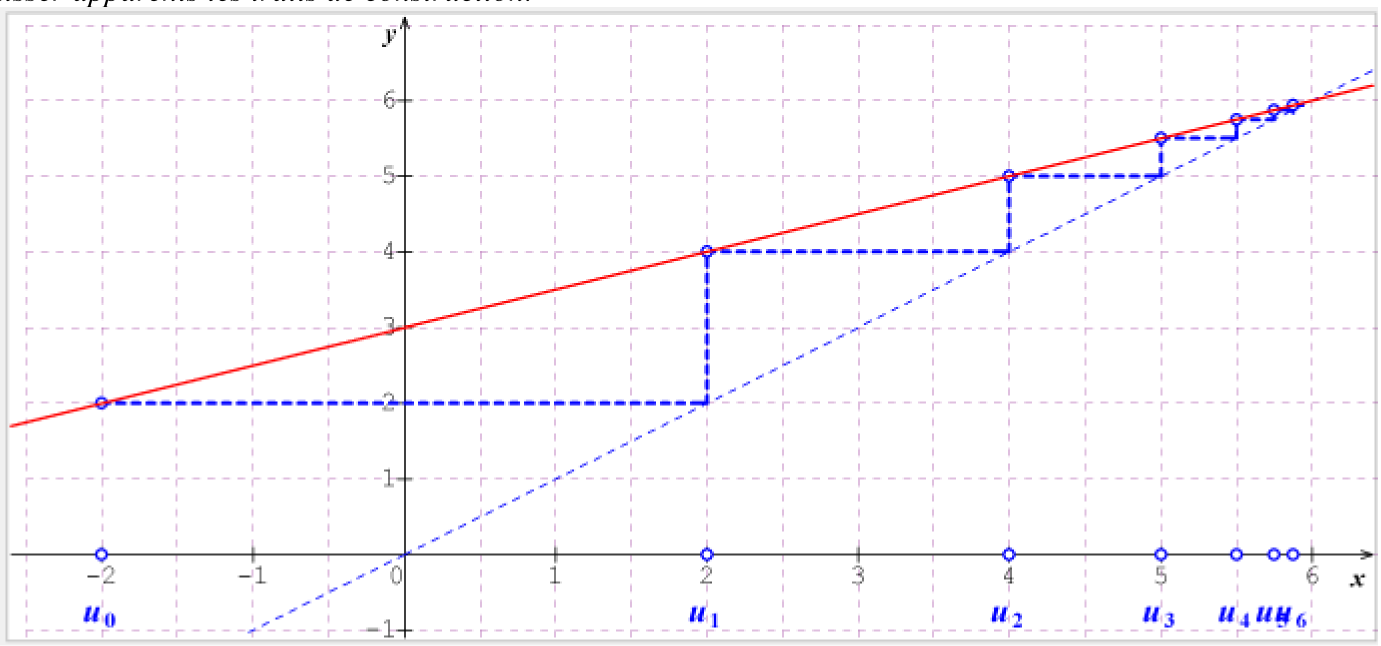
Exercice 4: On considère la suite (u_n) définie par $u_0=-2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0{,}5u_n+3$.

Partie I graphique :

Dans le repère orthonormé ci-dessous, on a tracé la fonction $f: x \rightarrow 0{,}5x+3$ et la droite $\boldsymbol{d}$ d'équation $y=x$.

1. a) En utilisant ces droites, construire les termes u_0 ; u_1 ; u_2; u_3 et u_4 sur l'axe des abscisses.

Laisser apparents les traits de construction.



b) Émettre des conjectures quand au comportement des termes de la suite (u_n) lorsque n devient grand.

(u_n) semble croissante et converger vers 6.

Partie II : Calculs

2. a) Calculer u_1 ; u_2 et u_3 .

$u_1=0{,}5\times u_0+3=0{,}5\times-2+3=2$ $\qquad u_2=0{,}5\times u_1+3=4$ et $u_3=0{,}5\times u_2+3=5$

b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de u_{10} à l'aide de votre calculatrice.

$u_{10}\approx 5{,}992$

3. On définit la suite (S_n) comme la somme des termes de la suite (u_n) c'est à dire $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$.

Déterminer S_0 ; S_1 et S_2 .

$S_0=u_0=-2$ $S_1=u_0+u_1=S_1+u_2=-2+2=0$ $S_2=u_0+u_1+u_2=S_1+u_2=4$

4. On souhaite calculer les termes des suites (u_n) et (S_n) à l'aide d'un tableur.

	A	B	C
1	**n**	**Un**	**Sn**
2	0	-2	-2
3	1		

a) Quelle formule, destinée à être recopiée vers le bas, doit-on saisir dans la cellule **B3** ? **B3=0,5×B2+3**

b) Quelle formule, destinée à être recopiée vers le bas, doit-on saisir dans la cellule **C3** ? **C3=C2+B3**

5. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite (S_n) , du rang 1 au rang n. Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient.
Préciser lequel en justifiant la réponse et en explicitant les erreurs commises dans les deux autres.

Algorithme 1

```
VARIABLES
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  U PREND_LA_VALEUR -2
  S PREND_LA_VALEUR -2
  POUR k ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    U PREND_LA_VALEUR 0.5*U+3
    S PREND_LA_VALEUR S+U
    FIN_POUR
  AFFICHER S
FIN_ALGORITHME
```

Algorithme 2

```
VARIABLES
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  U PREND_LA_VALEUR -2
  S PREND_LA_VALEUR -2
  POUR k ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    U PREND_LA_VALEUR 0.5*U+3
    S PREND_LA_VALEUR S+U
    AFFICHER S
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

Algorithme 3

```
VARIABLES
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  POUR k ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    U PREND_LA_VALEUR -2
    S PREND_LA_VALEUR -2
    U PREND_LA_VALEUR 0.5*U+3
    S PREND_LA_VALEUR S+U
    AFFICHER S
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

Algorithme 1 est faux : Cet algorithme n'affichera que le dernier terme par la commande « afficher S » est à l'extérieur de la boucle.

Algorithme correct

Algorithme 3 est faux : Les variables U et S s'initialisent dans la boucle, on aura toujours la même valeur qui s'affiche pour S ($0=S_0$)

Exercice 5 : Soit (u_n) définie par son premier terme $u_0=1$ et par la relation $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+4$.

1. a) Déterminer, à la main, u_1 et u_2 .

$u_1=\frac{1}{3}\times u_0+4=\frac{1}{3}\times 1+4=\frac{13}{3}$ $\qquad u_2=\frac{1}{3}\times u_1+4=\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}+4=\frac{40}{9}$

b) A l'aide de la calculatrice, déterminer u_{50} puis conjecturer la limite de la suite (u_n) .

$u_{50}\approx 5{,}99999999$ et on conjecture que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=6$

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout n par $v_n=u_n-6$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

Il faut montrer que : $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$

1ere méthode : par quotient : **la suite (v_n) a ses termes strictement positif** donc :

$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-6}{u_n-6}=\frac{\frac{1}{3}u_n+4-6}{u_n-6}=\frac{\frac{1}{3}u_n-2}{u_n-6}=\frac{\frac{1}{3}(u_n-6)}{u_n-6}=\frac{1}{3}$ donc (v_n) est bien une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$

2e méthode : par factorisation :

$v_{n+1}=u_{n+1}-6=\frac{1}{3}u_n+4-6=\frac{1}{3}u_n-2=\frac{1}{3}(u_n-6)=\frac{1}{3}v_n$ donc (v_n) est bien une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$

b) En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Comme (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ alors $v_n=v_0\times q^n=1\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$

Comme $v_n=u_n-6$ alors $u_n=v_n+6=\left(\frac{1}{3}\right)^n+6$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$

3. a) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

Pour étudier les variations d'une suite, on étudie le signe de la différence $u_{n+1}-u_n$.

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}u_n+4-u_n=-\frac{2}{3}u_n+4=-\frac{2}{3}\times\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n+6\right)+4=-\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n-4+4=\frac{-2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n<0$

b) Écrire un algorithme permettant de déterminer la plus petite valeur de n telle que u_n > 5,999.

Comme on ne sait pas combien d'étapes il faut faire, on va utiliser une boucle tant que.

Le contraire de $u_n>5{,}999$ étant $u_n\leq 5{,}999$.

```
u ← 1
n ← 0
Tantque u ≤ 5,99 faire
        n ← n + 1
        u ← 1/3 u +4          OU u ← (1/3)^n +6
Fin Tant Que
Afficher n
```

c) Déterminer cette valeur n. **On obtient $n = 8$**

<u>Exercice 6 :</u> Un apiculteur souhaite étendre son activité de production de miel à une nouvelle région. En juillet 2014, il achète 300 colonies d'abeilles qu'il installe dans cette région. Après renseignements pris auprès des services spécialisés, il s'attend à perdre 8 % des colonies durant l'hiver. Pour maintenir son activité et la développer, il a prévu d'installer 50 nouvelles colonies chaque printemps.

1) On considère l'algorithme suivant :

Variables : n est un nombre entier naturel
C est un nombre réel
Traitement : Affecter à C la valeur 300
Affecter à n la valeur 0
Tant que C < 400 faire
C prend la valeur C × 0,92 + 50
n prend la valeur n +1
Fin Tant que
Sortie : Afficher n

a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaire.
Les résultats seront arrondis à l'entier le plus proche.

Test C < 400		vrai	vrai	vrai	vrai	
Valeur de C	300	326	350	372	392	411
Valeur de n	1	1	2	3	4	5

b) Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ? Interpréter cette valeur dans le contexte de ce problème.

Cet A-π-culteur devra attendre 5 années avant de dépasser les 400 colonies d'abeilles

2) On modélise l'évolution du nombre de colonies par une suite (C_n), le terme C_n donnant une estimation du nombre de colonies pendant l'année 2014+n.
a) Exprimer pour tout entier *n* le terme C_{n+1} en fonction de C_n.
$c_0=300$ et $c_{n+1}=0{,}92\times c_n+50$

b) Combien de colonies l'apiculteur peut-il espérer posséder en juillet 2024 ?

Il faut déterminer $c_{10}=484$.

Exercice 7 :

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.

La société met en place le dispositif industriel suivant :

- Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries.
- Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.

L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.
On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante : $u_0=1\,000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=1,2u_n-100$.

1. a) Expliquer pourquoi cette suite (u_n) correspond à la situation de l'énoncé.

b) Déterminer u_1 et u_2 puis, à l'aide de la calculatrice, déterminer la limite de la suite (u_n) .

c) La suite (u_n) est -elle arithmétique ? Géométrique ?

2. a) L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.
À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

b) On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente.
Compléter cet algorithme.

```
u ← 1 000
n ← 0
Tant que ………………….. faire
    u ← ……………..
    n ← ……………..
fin Tant que
Afficher …….
```

3. a) Justifier que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=u_n-500$ est une suite géométrique de raison 1,2.

b) En déduire la forme explicite de (v_n) puis celle de (u_n) .

c) Déterminer le sens de variation de (u_n) .