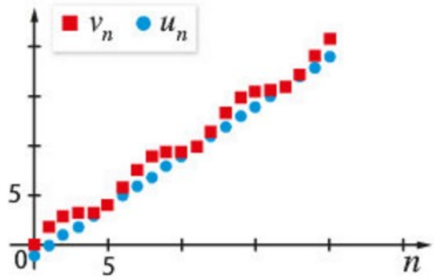
Suites Numériques	**SN3**	**Théorèmes de comparaison, limite d'une suite suite géométrique**

Compétences	*Exercices corrigés*
Déterminer une limite par comparaison. ROC : Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que : u_n est inférieur ou égal à v_n à partir d'un certain rang ; u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$; alors (v_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.	*Application 1* *6 p 19*
Savoir utiliser le théorème « des gendarmes » (admis)	*Application 2*
Limite d'une suite géométrique ROC : Démontrer que la suite (q_n), avec $q>1$,a pour limite $+\infty$.	*Application 3* *7 p 19 ; 76 p 26*

1. Limites et comparaison :



Théorème : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.

Preuve (ROC) : Soit $I=]A;+\infty[$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ donc il existe un entier p tel que pour tout $n\geqslant p$, $u_n \in I$

$u_n\leqslant v_n$ à partir d'un certain rang donc il existe un réel k tel que pour tout $n\geqslant k$ $u_n\leqslant v_n$

Soit N un entier supérieur ou égal à p et k ; pour tout $n\geqslant N$, $u_n> A$ et $u_n\leqslant v_n$

donc pour tout $n\geqslant N$, $v_n> A$ donc $v_n \in I$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$

Application 1 : Déterminer une limite par comparaison

Exemple : $u_n=n^2-3\sin(n)$ Conjecture : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

Preuve : $-1\leqslant\sin(n)\leqslant 1$ donc $n^2-3\leqslant n^2-3\sin(n)\leqslant n^2+3$

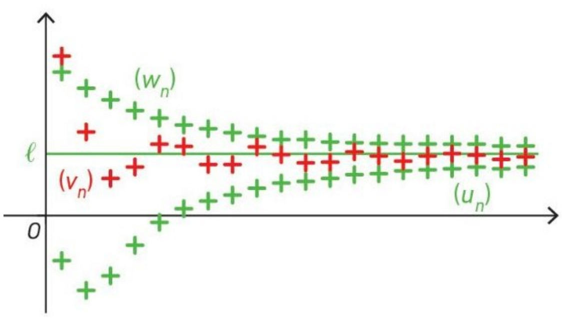
Soit $v_n=n^2-3$; $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$ et pour $n\geqslant 1$ $u_n\geqslant v_n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

ex 18 ; 20;21;24 page 22 ; sujet C p35

Un autre exemple en vidéo : Calculer la limite d'une suite à l'aide du théorème de comparaison
https://www.youtube.com/watch?v=iQhh46LupN4&index=11&list=PLVUDmbpupCarZdaGUMO7DV35pi1I8zIJZ

Théorème dit « des gendarmes » : (admis)
Soit u_n, v_n et w_n trois suites.
Si, à partir d'une certain rang, $u_n\leqslant v_n\leqslant w_n$ et si u_n, et w_n converge vers un réel L, alors v_n converge aussi vers L.

Illustration :



Application 2 : Déterminer une limite par encadrement

Exemple : $u_n = 1 + \frac{\sin(n)}{n}$ Conjecture : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$

Pour tout $n \geqslant 1$, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ donc $-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\sin(n)}{n} \leqslant \frac{1}{n}$ et $1 - \frac{1}{n} \leqslant \frac{\sin(n)}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{n}$

Soit $u_n = 1 - \frac{1}{n}$; $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$ Soit $v_n = 1 + \frac{1}{n}$; $\lim_{n \to +\infty} v_n = 1$

u_n et v_n ont les mêmes limites ; d'après le thm des gendarmes, $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$.

ex 19; 23 page 22 ; 71 – 72 page 26

Un autre exemple en vidéo : Calculer une limite à l'aide du théorème d'encadrement
https://www.youtube.com/watch?v=OdzYjz_vQbw&list=PLVUDmbpupCarZdaGUMO7DV35pi1I8zIJZ&index=12

Un autre cours : Mathrix : https://www.youtube.com/watch?v=NWUKjXTBA5w

2. Limite éventuelle d'une suite géométrique

a) Comportement à l'infini de q^n avec q réel

Propriété

q^n	$q \leqslant -1$	$-1 \leqslant q \leqslant 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \to +\infty} q^n$	n'existe pas	0	1	$+\infty$

ROC : preuve dans le cas $q > 1$

On démontre par récurrence que pour a réel strictement positif et tout entier naturel n : $(1+a)^n \geqslant 1 + an$

$q > 1$ donc on peut écrire q sous la forme $q = 1 + a$ avec $a > 0$

$q^n = (1+a)^n$ et on sait que $(1+a)^n \geqslant 1 + an$

or $\lim_{n \to +\infty} 1 + an = +\infty$ car $a > 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

<u>Application 3 :</u> Utiliser la limite de q^n :

1. $u_n = -3 \times 2^n$ 2. $u_n = \frac{2}{5^n}$ 3. $u_n = 5 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

ex 25 à 31 page 23 et 73 à 80 page 26/27
sujet E page 36

Un autre exemple en vidéo : Calculer la limite d'une suite géométrique
https://www.youtube.com/watch?v=XTftGHfnYMw&index=13&list=PLVUDmbpupCarZdaGUMO7DV35pi1I8zIJZ

Un autre cours en vidéo : Mathrix : https://www.youtube.com/watch?v=Ae1IjC2DewM