Suites Numériques	**SN4**	**Suites majorée, minorée, théorème de convergence monotone**

Compétences	*Exercices corrigés*
Savoir montrer qu'une suite est minorée, majorée	*8 p 21 ; 93 p28*
Savoir utiliser le théorème de convergence des suites croissantes majorées	*Application 1* *9 p 21 ; 93 p28*

1. Suites majorées, minorées, bornées

Définition :
La suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M supérieur à tous les termes de la suite ; $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$
La suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m supérieur à tous les termes de la suite ; $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$
La suite (u_n) est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

Exemples :
soit (u_n) définie par $u_n = \sin(n)$; c'est une suite minorée par -1 et majorée par 1 ; elle est donc bornée.
soit (u_n) définie par $u_n = n^2$; c'est une suite minorée par 0 mais non majorée
soit (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}$; elle est bornée car $0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$

Propriété : Si une suite est croissante et admet pour limite L alors elle est majorée par L.

Voir preuve par l'absurde dans le manuel page 20.

exercices 32 à 38 page 23 et 81 à 90 page 27

2. Théorème de convergence monotone :

Théorème (admis) : convergence d'une suite monotone
Si une suite croissante est majorée alors elle est convergente ; sa limite L vérifie $L \leqslant M$.
Si une suite décroissante est minorée alors elle est convergente ; sa limite vérifie $L \geqslant m$.

Application 1 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} u_n$.

a) Montrer par récurrence que la suite est croissante et majorée par 2.

b) En déduire que (u_n) converge vers un réel L.

Solution :

a) On veut montrer que pour tout entier n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$
*Initialisation $u_0 = -2$; $u_1 = 0$ donc $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$; la propriété est vraie pour $n = 0$
*Hypothèse de récurrence : il existe un entier $p \geqslant 0$ pour lequel $u_p \leqslant u_{p+1} \leqslant 2$
La fonction $f : x \rightarrow 1 + \frac{1}{2} x$ est une fonction affine croissante sur $\mathbb{R}$ donc $f(u_p) \leqslant f(u_{p+1}) < f(2)$
$f(2) = 2$, on a donc $f(u_p) \leqslant f(u_{p+1}) < 2$ donc $u_{p+1} \leqslant u_{p+2} \leqslant 2$; la pté est vraie au rang $p+1$
*Conclusion : pour tout entier n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$
La propriété est donc héréditaire à partir du rang 1 donc la suite est croissante et majorée par 2.

b) La suite étant croissante et majorée, elle converge vers une limite L telle que $L \leqslant 2$
Pour tout entier n, $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} u_n$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{2} u_n = 1 + \frac{1}{2} L$

Corollaire : une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Preuve (ROC) : soit A un réel
La suite n'est pas majorée donc il existe un entier p tel que pour tout $n \geqslant p$, $u_n > A$
La suite est croissante donc pour tout $n \geqslant p$, $u_n > u_p$
On en déduite que : $u_n > u_p > A$ donc qu'à partir d'un rang p tous le stermes de la suite sont dans l'intervalle $]A ;+\infty[$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Exemple : la suite de terme général $u_n = n^2$ est croissante, non majorée …

ex 39 à 41 page 23 et 91 à 95 page 28

3. Théorème du point fixe :

Théorème du point fixe (admis) :

- Si la suite (u_n) converge vers une limite finie *l* et si la fonction *f* est continue en *l* alors :
$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l)$$
- Autrement dit : si (u_n) converge vers *l* alors l est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Idée de démonstration : On sait que $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$
De plus, on sait que f est continue, donc, en appliquant f dans l'égalité précédente,
on obtient $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l)$ c'est à dire $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = f(l)$.
On admet que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1}$. On a donc $f(l) = l$

Application à la détermination d'une limite :
$\mathrm{S}oit (u_n)$ une suite définie par la relation de récurrence $: u_{n+1} = f(u_n)$.

Si on montre que (u_n) converge (soit parce qu'elle est décroissante et minorée ou croissante et majorée)

et si *f* est continue, alors la limite *l* vérifie la relation suivante : $f(l) = l$.

En pratique, on cherche à résoudre l'équation $x = f(x)$ (autrement dit, l'intersection entre la courbe représentative de la fonction avec la droite $d' équation\, y = x$) pour trouver les éventuelles limites. Si deux limites existent, un raisonnement simple permet d'en éliminer une.

exercices 124 ; 125 page 37

Exercices pour réviser l'ensemble du chapitre sur les suites : http://homeomath2.imingo.net/qcmsuites.htm

Pour vous entraîner : exercices corrigés 9 ; 17 ; 22 et 23 du site « jaicompris.com)
http://jaicompris.com/lycee/math/suite/suite-limiteTS.php