

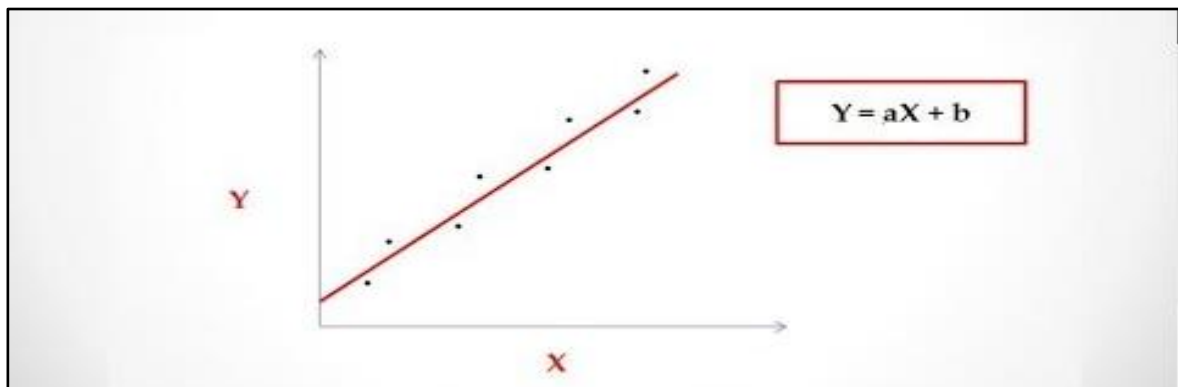
B- L'ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés

1- Principe

Nous disposons de deux variables dont l'une est dépendante de l'autre. Cette variable dépendante, Y, est linéairement liée à X.

L'objectif de l'ajustement linéaire est de travailler avec les données dont nous disposons. Dans une distribution à deux variables, dont l'une est liée linéairement à l'autre, la représentation graphique est un nuage de points plus ou moins dispersés dans un plan ordonné avec la variable X en abscisse et la variable Y en ordonnée.

Il s'agira donc d'ajuster ce nuage de points à une droite, la plus proche possible de tous les points.



L'objectif est de trouver les inconnues de l'équation de la droite : $Y = aX + b$. c'est-à-dire le coefficient directeur (ou la pente de la droite) : a et l'ordonnée à l'origine ou la constante : b .

La détermination de a et b , de manière à minimiser les écarts verticaux des points du nuage à la droite, permettra d'obtenir une droite d'ajustement la plus proche possible à tous les points du nuage.

Le paramètre a est obtenu à l'aide des moindres carrés ordinaires, c'est-à-dire lorsqu'on minimise la somme des carrés des écarts des points à la droite.

$$\text{Min} \sum (y - y')^2 = \text{Min} \sum (y - (ax + b))^2$$

Avec, y : la valeur observée (les points du nuage) et y' : la valeur ajustée (la droite), $y' = ax + b$

$$\text{Cela nous donne : } a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Avec, n : nombre d'observations

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \longrightarrow \text{La moyenne de X}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \longrightarrow \text{La moyenne de Y}$$

En développant la formule de a, on obtient : $a = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}$

NB : C'est cette dernière formule qu'on utilise souvent dans les examens. Il s'agit de la méthode développée.

Remarque :

- Si $a > 0$: la droite est croissante ;
- Si $a < 0$: la droite est décroissante.

Pour déterminer b, on se sert du résultat de a. On peut donc déterminer b comme suit :

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

En remplaçant a et b par les valeurs que nous avons trouvées, nous pouvons écrire l'équation de la droite d'ajustement, ce qui nous permettra de faire des prévisions à court terme.

2- Application

Soit la série statistique suivante :

L'évolution du stock des IDE dans l'industrie au Maroc (en milliards de dirhams)

Année	2014	2015	2016	2017	Total (Σ)
Rang de l'année (x_i)	1	2	3	4	?
Stock des IDE (y_i)	119	110	115	138	?
$x_i \cdot y_i$?
x_i^2	?

Travail à faire :

- 1) Complétez le tableau ci-dessus.
- 2) Calculez les deux moyennes : \bar{x} et \bar{y} .
- 3) Déterminez l'équation de la droite d'ajustement linéaire $y = ax + b$ selon la méthode des moindres carrés (méthode développée), sachant que : x_i : les années, y_i : stock des IDE.
- 4) Faites une prévision du stock des IDE dans l'industrie pour l'année 2020.

Bon courage

