Fonctions logarithmes

Niveau : Bac.Sciences Maths

Activités et présentation

Existe-t-il une fonction numérique f permettant de transformer les produits en sommes c.à.d. $f(x \times y) = f(x) + f(y)$?

1) Déterminer les nombres réels vérifiant :

$$10^a = 1000\,;\,10^b = 0{,}000001;\,10^c = 10^a \times 10^b\,;\,10^d = 1$$

$$2^x = 64 \quad ; \quad 2^y = \frac{1}{32} \quad ; \quad 2^z = 2^x \times 2^y \quad ; \quad 2^u = 1$$

Vérifier que $c = a + b$ et $z = x + y$

Le logarithme décimal (base 10) sera alors l'exposant x qu'il faut affecter à la base 10 pour obtenir le nombre 10^x.

Le nombre e est le nombre irrationnel limite de la suite numérique (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

Dont les 7 premiers termes sont :

$$u_o = 1\,,u_1 = 2\,;u_2 = 2{,}5\,,u_3 = \frac{8}{3} \approx 2{,}66\,,u_4 = \frac{65}{24} \approx 2{,}708\,,$$

$$u_5 = \frac{163}{60} \approx 2{,}716\,,u_6 = \frac{1957}{720} \approx 2{,}718\,....$$

La fonction logarithme népérienne (ou le logarithme naturel) est le logarithme de base e.

I- Fonction logarithme népérienne

1. Définition :

La fonction logarithme népérien (ou naturel) est l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.Elle est notée ln .C.à.d.

$$\begin{array}{llll} ln: &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(\mathrm{x}) \end{array}$$

$$\text{Avec } \ln(1) = 0 \ et \ \forall x \in]0,+\infty[: ln'(x) = \frac{1}{x}$$

2.*Propriétés :*

- ✓ La fonction $ln: x \longmapsto ln\,(x)$ est définie continue et dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et dérivée $ln': x \longmapsto ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$
- ✓ La fonction $ln: x \longmapsto ln\,(x)$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et par suite on a les propriétés suivantes :

$$\forall (a,b) \in]0,+\infty[^2: \ lna = lnb \ \Leftrightarrow a = b$$
$$lna < lnb \ \Leftrightarrow a < b$$

Exercice d'application :

f est une fonction numérique à variable réelle x.

Déterminer l'ensemble de définition de f dans les cas suivants :

1) $f(x) = \ln(2x^2 - x - 1)$

2) $f(x) = \ln(|1 - x^2|)$

3) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$

4) $f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$

3. Signe de $\ln(x)$

Comme La fonction $ln: x \longmapsto ln\,(x)$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et $ln1 = 0$ alors pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a :

$$lnx = 0 \Leftrightarrow x = 1$$
$$lnx > 0 \Leftrightarrow x > 1$$
$$lnx < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

D'où le tableau de signes :

x	0	1	$+\infty$
lnx	$+$	0	$-$

Exercices d'application :

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction numérique $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\ln(-x)}}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivantes :

a) $\ln(x^2 - x) = \ln(x+1)$

b) $\ln\left(\frac{3+x^2}{4x}\right) \geq 0$

4.Propriétés algébriques :

a. Propriété fondamentale de $\boldsymbol{ln}$

$$\forall (a,b) \in]0,+\infty[^2 : ln(a \times b) = ln(a) + ln(b)$$

Démonstration : à faire par les élèves

On pose $a = x$ et on considère la fonction $f: x \longmapsto \ln(bx) - \ln(x) - \ln(b)$

1) Vérifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée nulle.

2) En déduire que la fonction f est nulle puis conclure.

b. Autres propriétés (Conséquences) de $\boldsymbol{ln}$

Pour tous les nombres réels strictement positifs a , b , a_1 , a_2 , … , a_n et pour tout entier naturel non nul n et pour tout nombre rationnel r on a :

- $ln\left(\frac{1}{a}\right) = -ln(a)$
- $ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln(a) - ln(b)$
- $ln(a^n) = n.ln(a)$
- $ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\, ln(a)$
- $ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n}\, ln(a)$
- $ln(a^r) = r.ln(a)$
- $ln(\prod_{i=1}^{n} x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i$

***Preuve : à faire par les élèves*.**

- *Calculer* $ln\left(\frac{1}{a}\right) + ln(a)$ *et simplifier* $ln(a) - ln\ (b)$
- *Prouver par récurrence que* $\forall n \in \mathbb{N}^*: ln(a^n) = n.ln(a)$
- *Déduire que* $\forall n \in \mathbb{Z}^{-*}: ln(a^n) = n.ln(a)$
- *Simplifier* $n\ ln(\sqrt[n]{a})$
- *Ecrire* $r = \frac{p}{q}$ *avec* $p \in \mathbb{Z}^*$ *et* $q \in \mathbb{N}^*$*et prouver que :* $ln\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q}.ln(a)$

Remarques :

Pour tous les nombres réels non nuls a , b on a :

$$ln(|a \times b|) = ln(|a|) + ln\ (|b|)$$

En particulier si a et b sont strictement négatifs alors :

$$ln(a \times b) = ln(-a) + ln\ (-b)$$

Exercices d'application :

1) Simplifier le plus possible :

$A = \ln(\sqrt{2} + 1) + \ln(\sqrt{2} - 1)$; $B = ln4 - 2\ln\left(\frac{1}{32}\right) + 7ln\sqrt{2} - 6ln\sqrt[8]{8}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

a) $\ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = 2lnx - \ln\ (x + 2)$

b) $2\ln(2x - 3) - 3\ln\ (2 - x)$

c) $\ln(\sqrt{2x + 1}) \leq -\frac{1}{2}\ln\ (x)$

d) $ln^2x \geq lnx$

5. Limites de $\mathbf{ln}(x)$ aux bornes de $]0, +\infty[$

Activité :

Soit $A \in]0, +\infty[$.

1) Déterminer un entier naturel n_0 *vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \implies ln(2^n) > A$$

2) Montrer que :

$$x > 2^{n_0} \implies ln(x) > A$$

3) En déduire $\lim_{x\to+\infty} lnx$ et puis déterminer $\lim_{x\to 0^+} lnx$

Propriétés :

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} lnx = +\infty \text{ et } \lim_{x\to0^+} lnx = -\infty$$

Exercice d'application :

Etudier ls limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (ln^2x - lnx)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{1+ln}$

3) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{lnx}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to1} ln|x-1|$

6. Tableau de variation de ln

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x)$		$+$	
$\ln$	$-\infty$	0	$+\infty$

7. Le nombre e

La fonction $ln: x \longmapsto ln\,(x)$ est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$; donc il existe un unique élément x de $]0,+\infty[$ $\ln(x) = 1$.

Cet élément est noté e et vérifie alors :

$$e \in\,]0,+\infty[\quad et \quad ln\, e = 1$$

et on a :

$$\forall r \in \mathbb{Q} \;:\; r = ln\, e^r$$

Et

$$\forall x > 0, \forall r \in \mathbb{Q}: \qquad r = ln\, x \Leftrightarrow x = e^r$$

La bijection réciproque de la fonction $ln: x \longmapsto ln\ (x)$ est appelée fonction exponentielle népérienne et notée :

$$\begin{array}{cccc} exp: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,+\infty[\\ & x & \longmapsto & exp(x) = e^x \end{array}$$

N.B : Le nombre e n'est pas rationnel.

$e \approx$ 2,7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 …

Exercices d'application :

1) Calculer : $A = \ln\left(\frac{2}{e^2}\right) + 2ln\sqrt[3]{e} - \ln\ (2e^3)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

a) $2ln^2x - lnx - 3 = 0$

b) $lnx - 5\sqrt{lnx} + 4 = 0$

c) $ln^2x \geq lnx$

d) $(lnx)^3 - 8(lnx)^2 - 105lnx \geq 0$

3) Déterminer les ensembles de définition des fonctions numériques

a) $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-\ln\ (-x)}}$

b) $g: x \mapsto \frac{lnx}{\ln(lnx)}$

8. Limites usuelles de ln

Activité 1 :

Calculer $\lim\limits_{x \to 1} \frac{lnx}{x-1}$ *et* $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\ln\ (1+t)}{t}$

Activité 2 :

Soit la fonction $g: x \longmapsto \ln(x) - \sqrt{x}$

1) Etudier les variations de g *sur* $]0,+\infty[$

2) En déduire que $\forall x > 1:\ \ln(x) < \sqrt{x}$

3) En déduire la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x}$ *puis celle de* $\lim\limits_{x \to 0^+} xlnx$

Propriétés :

On a les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0^+} lnx = -\infty$	$\lim\limits_{x\to +\infty} lnx = +\infty$
$\lim\limits_{x\to 0^+} xlnx = 0^-$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{lnx}{x} = 0^+$
$\lim\limits_{x\to 0^+} x^r lnx = 0^-\ , r \in \mathbb{Q}^{*+}$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{lnx}{x^r} = 0, r \in \mathbb{Q}^{*+}$
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{lnx}{x-1} = 1$	$\lim\limits_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

Exercice d'application :

Etudier les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x - lnx)$
2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(2+x)}{\sqrt{x}}$
3) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x^2 - x)lnx$
4) $\lim\limits_{x\to 1} |x-1|ln|x-1|$
5) $\lim\limits_{x\to 0^+} xln^3x$
6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(lnx)^4}{x^3}$
7) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(2+3x)}{\ln(x-1)}$
8) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{lnx}{x^2-x}$
9) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\ln(1-2x)}{x}$
10) $\lim\limits_{x\to e} \frac{lnx-1}{x-e}$

9. Représentation graphique de la fonction $\boldsymbol{ln}: \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{ln}\ (\boldsymbol{x})$

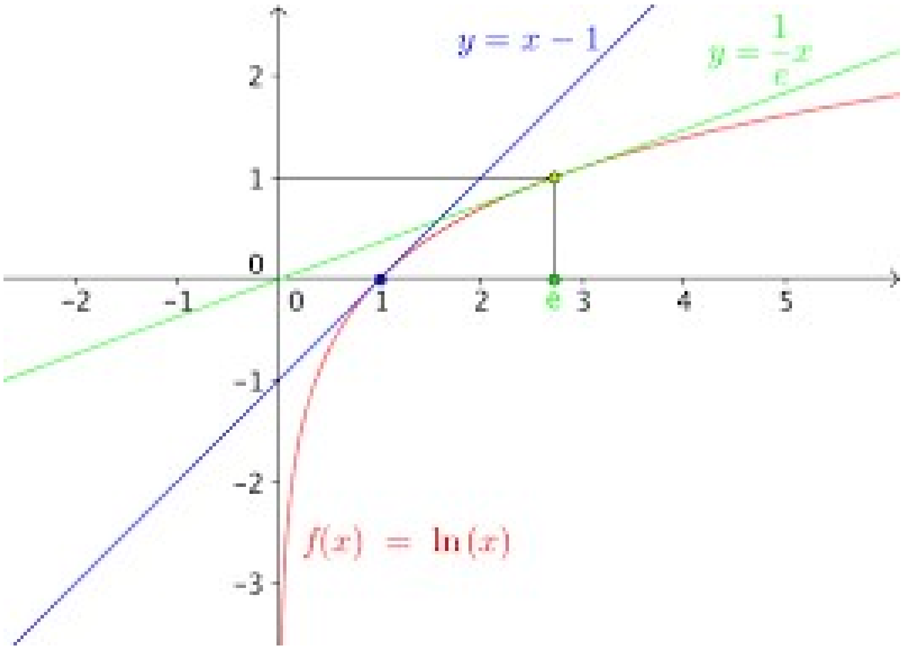
La courbe (C_{ln}) de la fonction $ln: x \longmapsto ln\ (x)$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

De plus elle est concave en effet : $\forall x \in]0, +\infty[: ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

Equations des tangentes à (C_{ln}) *:*

Au point $A(1;0)$ *:* $y = x - 1$

Au point $B(e;1)$ *:* $y = \frac{1}{e}(x - e) + 1 = \frac{1}{e}x$



10. Dérivée logarithmique :

Propriétés et définition :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , et ne s'annulant pas sur I , alors :

- La fonction $f: x \mapsto ln|u(x)|$ est dérivable sur I et sa dérivée est la dérivée logarithmique de u , c.à.d. :$f' = \frac{u'}{u}$
- Les primitives de la fonction $\frac{\boldsymbol{u'}}{\boldsymbol{u}}$ sont les fonctions $x \mapsto ln|u(x)| + \lambda$ où λ est une constante réelle.

Exercices d'application :

1) Montrer que la fonction $f: x \longmapsto ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|$ est dérivable sur les intervalles $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée et montrer qu'elle est monotone sur ces deux intervalles.

2) Donner une primitive de la fonction numérique f sur l'intervalle I :

a) $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2x+1}-1 \quad , I=]1,+\infty[$

b) $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2x+1}-1 \quad , I=]-\infty,-1[$

c) $f(x)=\frac{lnx}{x} \quad , \ I=]0,+\infty[$

d) $f(x)=\frac{x}{1+x^2} \quad , I=\mathbb{R}$

II. fonction logarithme de base a

Soit $a \in]0;+\infty[-\{1\}$

1.Définition :

- La fonction logarithme de base a est définie par :

$$\forall x \in]0;+\infty[: log_a(x)=\frac{ln\, x}{ln\, a}$$

- Si $a=10$ la fonction log_{10} est appelée fonction logarithme décimal et notée simplement log :

$$\forall x \in]0;+\infty[: log(x)=\frac{ln\, x}{ln\, 10}$$

Remarques :

$log_a(1)=0 \ ; \quad log1=0$

$log_a(a)=1 \ ; \quad log10=1$

Pour tout $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in]0;+\infty[$ on a :

$$log_a(a^r)=r \quad ; \quad log10^r=r$$

$$log_a(x)=r \Leftrightarrow x=a^r$$

$$log(x)=r \Leftrightarrow x=10^r$$

3.Limites de $log_a(x)$

- Si $a>1$, alors $\ln(a)>0$ et on a :

$$\lim_{x\to 0^+} log_a(x)=-\infty \text{ et } \lim_{x\to +\infty} log_a(x)=+\infty$$

- Et si $0<a<1$ alors $\ln(a)<0$ et on a :

$$\lim_{x\to 0^+} log_a(x)=+\infty \text{ et } \lim_{x\to +\infty} log_a(x)=-\infty$$

4. Dérivée et monotonie du logarithme de base a

Propriétés :

La fonction $log_a : x \mapsto log_a(x)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0;+\infty[: log'_a(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

- Si $a > 1$, alors $\ln(a) > 0$ donc la fonction log_a est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
- Et si $0 < a < 1$ alors $\ln(a) < 0$ donc la fonction log_a est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

Exercices d'application :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $log_3^2(x^2 - 1) = 1$
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $log^2 x - log x > 2$
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $log_{\frac{1}{2}}(2x - 1) > log_{\frac{1}{2}}(x + 1)$