Cours d'Arithmétique

Niveau : 2ème Bac Sciences Mathématiques

Prérequis :

Voir cours d'Arithmétique, niveau 1ère sciences mathématiques.

Activités :

Soit $n \in \mathbb{Z}$

1) Déterminer le $pgcd$ des deux nombres $n^2 + n \; et \; 2n + 1$.
2) Déterminer les valeurs possibles du $pgcd$ des deux nombres :

$$2n + 4 \; et \; 3n - 8$$

3) Montrer que la fraction $\frac{7n+4}{5n+3}$ est irréductible.
4) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = 0$

I. Nombres premiers entre eux

1.Définition :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$**.**

$a \; et \; b$ sont premiers entre eux signifie que $a \wedge b = 1$

Exemples :

1) $18 \; et \; 35$ sont premiers entre eux en effet :

Les diviseurs positifs de 35 sont 1 ; 5 ; 7 ; 35 ; alors que 18 n'est divisible par aucun de ces nombres autres que 1. Donc le PGCD de 18 et 35 vaut 1.

2) $6 \; et \; 27$ ne sont pas premiers entre eux, car le $PGCD$ de $6 \; et \; 27$ est 3.

2.Théorème :

Soient $d \in \mathbb{N}^*$;$a, b \in \mathbb{Z}^*$. On a :

$$a \wedge b = d \Leftrightarrow [\, \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 : a = d\alpha \;\; ; \;\; b = d\beta \;\; et \;\; \alpha \wedge \beta = 1 \,]$$

Preuve :

($\Rightarrow$) Supposons $a \wedge b = d$ donc $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 : a = d\alpha ; b = d\beta$.

Donc : $d = a \wedge b = d\alpha \wedge d\beta = d(\alpha \wedge \beta)$

D'où $\alpha \wedge \beta = 1$

($\Leftarrow$) Si $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 : a = d\alpha ; b = d\beta et \alpha \wedge \beta = 1$ alors

$a \wedge b = d\alpha \wedge d\beta = d(\alpha \wedge \beta) = d$

Exercices d'application :

Résoudre dans $\mathbb{N}^{*2}$ l'équation et les systèmes suivants :

a) $(x \vee y) - 21(x \wedge y) = 0$

b) $\begin{cases} x \wedge y = x - y \\ x \vee y = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \wedge y = 60 \\ x \vee y = 3600 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 5664 \\ x \wedge y = 354 \end{cases}$

3. Théorème de Bézout :

$\forall a, b \in \mathbb{Z}^*$. On a : $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (\ \exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2 : au + bv = 1\ )$

Preuve :

($\Rightarrow$) *déjà montré en 1ère année Sc. Maths, d'après l'algorithme d'Euclide.*

($\Leftarrow$) Supposons $\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2 : au + bv = 1$ et posons $a \wedge b = d$ alors

comme $d|a\ et\ d|b$ alors $d|au + bv$ c.à.d. $d|1$ donc $d = 1$

Généralisation :

Dans $\mathbb{Z}$:

$a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n = 1 \Leftrightarrow \exists(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{Z}^2 : a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n = 1$

On dit que les entiers $a_1; a_2; \ldots; a_n$sont premiers entre eux dans leur ensemble

Preuve : *même méthode.*

Exercices d'application :

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ *ona :*

$$n \wedge (n+1) = 1\ ;\ (2n+3) \wedge (3n+5) = 1\ ;(n^2+1) \wedge n = 1$$

$$(2n^2+10n+13) \wedge (n+3) = 1$$

2) Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$ *tels que :* $(a^2+ab-b^2)^2 = 1.$

Montrer que a *et* b *sont premiers entre eux*

3) Soit l'équation dans $\mathbb{Z}$*:* $(E): x^{10} \equiv 1[11]$

a- Montrer que 2023*est une solution de* (E)

b- Démontrer que si x *est une solution de* (E) *alors* x *et* 11 *sont premiers entre eux*

4) En utilisant l'algorithme d'Euclide (1ère Sc.Maths) trouver deux entiers relatifs u *et* v *tels que :* $368u + 117v = 1$*. Conclure.*

4. Théorème de Gauss

Pour tous $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$. On a :

Si c divise ab *, et si* a *et* c *sont premiers entre eux alors c divise b :*

$$\begin{cases} c|ab \\ c \wedge a = 1 \end{cases} \Rightarrow c|b$$

Preuve :

$c \wedge a = 1 \Rightarrow \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2: cu + av = 1$*. Donc* $cbu + abv = b$

Et puisque $c|ab$ et $c|cbu$ alors $c|b$

Exercices d'application :

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ *les équations :*

a) $15x = 20y$

b) $2(1-x) = 5(y+3)$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que : $(n+1) \wedge (2n+1) = 1$

b) Vérifier que : $C_{2n+1}^{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} C_{2n}^{n}$

c) En déduire que : $n+1$ *divise* C_{2n}^{n}*.*

3) Montrer par l'absurde que le nombre $log_3(2)$ *est un irrationnel.*

5. L'équation diophantienne linéaire : $ax + by = c$

Théorème :

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$.

i) (L'équation $ax + by = c$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow$ $(a \wedge b \ divise \ c)$

ii) Si $(x_0; y_0)$ est une solution dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E): $ax + by = c$ alors

l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}$ est : $S = \left\{\left(x_0 + \frac{kb}{a \wedge b}; y_0 - \frac{ka}{a \wedge b}\right) / k \in \mathbb{Z}\right\}$

Preuve :

i) ($\Rightarrow$) Si l'équation (E): $ax + by = c$ admet une solution $(x_0; y_0)$ dans $\mathbb{Z}$ alors

$ax_0 + by_0 = c$

Posons $a \wedge b = d$.

Donc d divise a et divise b d'où d divise $ax + by$. Donc d divise c

($\Leftarrow$) Si d divise c alors $\exists k \in \mathbb{Z} : c = kd$

Or $a \wedge b = d$ donc $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2$: $d = au + bv$ d'où $c = auk + bvk$ d'où (uk, vk) est une solution particulière de (E)

ii) Posons : $a \wedge b = d$ donc $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$: $a = d\alpha; b = d\beta et \alpha \wedge \beta = 1$

On a :

$$
\begin{aligned}
(E) \Leftrightarrow ax + by &= ax_0 + by_0 \\
&\Leftrightarrow a(x - x_0) = b(y_0 - y): (E') \\
&\Leftrightarrow \alpha(x - x_0) = \beta(y_0 - y) \\
&\Rightarrow \beta | \alpha(x - x_0); or \alpha \wedge \beta = 1 \\
&\overset{Th.Gauss}{\Rightarrow} \beta | (x - x_0)
\end{aligned}
$$

D'où $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x - x_0 = k\beta$.

En remplaçant dans l'équation (E') on obtient :

$k\alpha\beta = \beta(y_0 - y)$ c.à.d. $k\alpha = y_0 - y$

D'où $(x, y) = (x_0 + k\beta, y_0 - k\alpha)$

Réciproquement on vérifie aisément que les couples $(x_0 + k\beta, y_0 - k\alpha)$, sont des solutions de (E)

Exercices d'application :

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations :

1) $9x+4y=2$. (Remarquer que le couple $(2;-4)$ est une solution particulière)

2) $27x-56y=2$. (Chercher une solution particulière en utilisant l'algorithme d'Euclide)

6.Théorème :

Pour tous $a,b,c\in\mathbb{Z}^*$. On a : $\begin{cases} a|c \\ b|c \\ a\wedge b=1 \end{cases} \Rightarrow ab|c$

Preuve :

$a\wedge b=1\Rightarrow\exists(u,v)\in\mathbb{Z}^2: au+bv=1$ *donc* $auc+bvc=c$;

Or $a|c$ et $b|c$;

donc :$\exists(k;k')\in\mathbb{Z}^2: c=ka; c=k'b$

Donc :

$auk'b+bvka=c\Rightarrow ab(uk'+vk)=c$

d'où : $ab|c$

7**. *Propriétés :***

Pour tous $a,b,c\in\mathbb{Z}^*$. On a :

i. $\begin{cases} a\wedge b=1 \\ a\wedge c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a\wedge bc=1$

ii. $\forall n\in\mathbb{N}^*: a\wedge b=1\Leftrightarrow a\wedge b^n=1$

iii. $\forall(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}: a\wedge b=1\Leftrightarrow a^m\wedge b^n=1$

Preuve :

i.

($\Rightarrow$) Si $a\wedge b=1$ et $a\wedge c=1$

alors $\exists(u,u'v,v')\in\mathbb{Z}^2: au+bv=1$; $au'+cv'=1$

Donc en multipliant les deux égalités membre à membre on obtiendra :

$$au"+bcv"=1$$

avec :

$$u"=auu'+cuv'+bvu' \text{ et } v"=vv'.$$

Donc d'après le théorème de Bézout on a : $a \wedge bc = 1$.

($\Leftarrow$) Supposons $a \wedge bc = 1$;

alors $\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2 : au + bcv = 1$

donc :

$a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$ *(Th. Bézout)*

ii. Par récurrence…

iii. de (i) et (ii)

8.Théorème :

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.On pose :$d = c \wedge n$ On a :

$$(ac \equiv bc[n]) \Leftrightarrow \left(a \equiv b\left[\frac{n}{d}\right]\right)$$

Preuve :

$d = c \wedge n \Rightarrow \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 : c = d\alpha; n = d\beta et \alpha \wedge \beta = 1$

($\Rightarrow$) On alors :

$$\begin{aligned} ac \equiv bc[n] &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : ac - bc = kn \\ &\Rightarrow ad\alpha - bd\alpha = kd\beta \\ &\Rightarrow \alpha(a-b) = k\beta \\ &\Rightarrow \beta | \alpha(a-b) \ \text{; or } \alpha \wedge \beta = 1 \\ &\overset{Th.Gauss}{\Rightarrow} \beta | (a-b) \\ &\Rightarrow a \equiv b\left[\beta = \frac{n}{d}\right] \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) $\quad a \equiv b\left[\frac{n}{d}\right] \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a - b = k\frac{n}{d}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow ac - bc = \frac{knc}{d} \\ &\Rightarrow ac - bc = k\alpha n \\ &\Rightarrow ac \equiv bc[n] \end{aligned}$$

Conséquences :

$$i)\ \begin{cases} ac \equiv bc[n] \\ c \wedge n = 1 \end{cases} \Rightarrow a \equiv b[n]$$

$$ii)\ \begin{cases} ac \equiv bc[p] \\ p\ premier\ et\ p\ ne\ divise\ pas\ c \end{cases} \Rightarrow a \equiv b[p]$$

Exercices d'application :

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

a) $2x \equiv 3 \quad [13]$

b) $5x^2 \equiv 9\ [12]$

9.L'ensemble $\mathbb{Z}/_{\boldsymbol{p}\mathbb{Z}}$ avec p premier

Lemme :

Pour tous $a, b \in \mathbb{Z}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a :$a \wedge n = 1 \Leftrightarrow (\exists m \in \mathbb{Z}: am \equiv 1[n])$

Preuve :

$(\Rightarrow) \quad a \wedge n = 1 \ \Rightarrow\ \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2: au + nv = 1$

$\Rightarrow au - 1 = nv$

$\Rightarrow au \equiv 1 \ [n]$

$(\Leftarrow) \quad (\exists m \in \mathbb{Z}: am \equiv 1[n]) \ \Rightarrow\ \exists k \in \mathbb{Z} :\ am - 1 = kn$

$\Rightarrow \ am + (-k)n = 1$

$\overset{\boldsymbol{Th.B\acute{e}zout}}{\Rightarrow} \quad a \wedge n = 1$

Théorème :

Soit p un nombre entier naturel premier. On a ***:***

$$\forall \overline{x} \in \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}} - \{\overline{0}\}; \exists \overline{y} \in \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}} - \{\overline{0}\}: \overline{xy} = 1$$

C.à.d. $\quad \forall x \in \mathbb{Z} : p \wedge x = 1 \Rightarrow \ (\ \exists y \in \mathbb{Z} : p \wedge y = 1\ et\ xy \equiv 1 \ [p])$

Preuve :

Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que $\overline{x} \in \mathbb{Z}/_{\boldsymbol{p}\mathbb{Z}} - \{\overline{0}\}$ c.à.d. p ne divise pas x , comme p est premier

alors $x \wedge p = 1$

Donc d'après le lemme précédent on a :

$\exists y \in \mathbb{Z}: xy \equiv 1[p]$ *donc* $\overline{y} \in \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}} - \{\overline{0}\}$ *et* $\overline{xy} = 1$

Exercices d'application :

1) Déterminer les éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}}$ *et préciser leurs inverses, en déduire les solutions de l'équation modulaire :*

$$11x \equiv 8 \quad [12]$$

2) Déterminer les inverses de tous les éléments de $\mathbb{Z}/_{11\mathbb{Z}} - \{\overline{0}\}$

II. Théorème de Fermat :

Énoncé 1 :

« si p est un nombre premier positif et si a est un entier *relatif*, alors $a^p - a$ est un multiple de p » : $a^p \equiv a[p]$

Énoncé 2 :

« si p est un entier naturel premier et si a est un entier relatif *non divisible par* p, alors $a^{p-1} - 1$ est un multiple de p »

Autrement dit (sous les mêmes conditions sur $a \; et \; p$), a^{p-1} est congru à 1 modulo p : $a^{p-1} \equiv 1 \; [\, p\,]$

Preuve 1:

- *Montrons par récurrence que :* $\forall a \in \mathbb{N}: a^p \equiv a[p]$

. *La propriété est vraie pour* $a = 0$, $a = 1$ *en effet :* $0^p \equiv 0[p]$; $1^p \equiv 1[p]$

. *Hérédité :*

Soit $a \in \mathbb{N}$.

Supposons $a^p \equiv a[p]$ *et montrons que* $(a+1)^p \equiv a + 1[p]$

D'après la formule du binôme de Newton on a :

$$(a+1)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k a^k = 1 + a^p + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k a^k$$

De plus on a : $\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k a^k \equiv 0[p]$ *en effet :*

En remarquant que : $\forall k \in \{1;2;\ldots;p-1\}\; C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p}{k}\frac{(p-1)!}{(k-1)!(p-k)!} = \frac{p}{k} C_{p-1}^{k-1}$

On a : $kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}$ *donc p divise* kC_p^k

or $k \wedge p = 1$ *car : p est premier et* $k < p$

Donc d'après le théorème de Gauss on a p *divise* C_p^k

D'où : $(a+1)^p \equiv 1 + a^p \equiv 1 + a[p]$

Donc : $\forall a \in \mathbb{N}: a^p \equiv a[p]$

- Si $a \in \mathbb{Z}^{*-}$ *alors* $-a \in \mathbb{N}^*$ *donc :* $(-a)^p \equiv -a[p]$

. Si p > 2 alors p est impair donc $-a^p \equiv -a[p]$ *d'où* $a^p \equiv a[p]$

. Si p = 2 : alors $a^2 \equiv a[2]$ *est vraie car 2 divise* $a^2 - a = a\,(a-1)$

(Produit de 2 entiers consécutifs)

- On a :

p *divise* $a^p - a = a(a^{p-1} - 1)$ *donc si* $a \wedge p = 1$*, alors d'après le théorème de Gauss on a :*

p *divise* $(a^{p-1} - 1)$ *donc* $a^{\,p-1} \equiv 1 \; [\,p\,]$

Preuve 2 : En exercice :

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et p est un <u>nombre premier</u> positif ne divisant pas a.

1) Montrer que :

$$\forall (k,k') \in \mathbb{N}^2 : ka \equiv k'a\;[p] \Leftrightarrow k \equiv k'[p]$$

2) En déduire que chaque élément de l'ensemble $\{a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a\}$ est congrus modulo p à un seul élément de l'ensemble $\{1; 2; 3; \dots; (p-1)\}$.

3) En déduire que :

$$a.\,2a.\,3a \dots (p-1)a \equiv (p-1)! \;\; [p]$$

4) Montrer que :

$$(p-1)!\,(1 - a^{p-1}) \equiv 0 \;\; [p]$$

5) En déduire que si p est un <u>nombre premier</u> positif ne divisant pas a, alors $a^{\,p-1} \equiv 1 \; [\,p\,]$

6) Montrer que si p est un nombre premier positif et si *a* est un entier relatif *quelconque*, alors $a^p \equiv a\;[p]$

Contre-exemple :

On vérifie que $25 \; divise 7^{24} - 1$ *malgré que 25 n'est pas premier.*

Exercices d'application :

1) Quel est le reste dans la division euclidienne du nombre 2025^{2024} *par 7 ?*

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}: 12^{12n+1} + 1 \equiv 0[13]$

3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}$ *:* $n^7 - n$ *est un multiple de 42.*

(Remarquer que : $42 = 2 \times 3 \times 7$)

III. Systèmes de numération

Activités :

1) Le système sexagésimal : Base 60

Combien y a-t-il de secondes dans 4 heures 25 minutes et 10 secondes ?

2) Retrouver les chiffres du nombre 56078 en effectuant les divisions successives par 10.

3) On considère les cinq cartes suivantes :

$$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{4}\boxed{8}\boxed{16}$$

À l'aide de ces 5 cartes trouver la ou les combinaison(s) de 2 cartes qui permettent d'obtenir en les additionnant uniquement les valeurs suivantes : 3 ; 7 ; 14 ; 27

1-Notion de base :

Propriété et définition :

Soit N un nombre entier naturel non nul.

Il existe une seule et unique décomposition de N sous la forme :

$$N = \sum_{i=0}^{n} a_i b^i = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0$$

Avec $a_n; a_{n-1}; \ldots; a_0$ des nombres entiers naturels strictement inférieur à b appelés chiffres et $a_n \neq 0$; c.à.d. $a_n; a_{n-1}; \ldots; a_0 \in \{0; 1; \ldots; b-1\}$

On dit alors que l'on a effectué la décomposition de l'entier n en base b et on note :

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}^{b} \text{ ou encore } N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}_{(b)}$$

Algorithme :

Pour déterminer l'écriture d'un nombre dans notre système de numération dans un système en base b, on effectue des divisions successives de ce nombre par b. On obtient le nombre en base b, on prenant le dernier quotient et en remontant tous les restes de ces divisions.

Méthode pratique de décomposition :

$$\begin{array}{ccc} & Divisions successives par b & \\ Quotients & Re\,s\,tes & \\ N & a_0 & \\ q_1 & a_1 & \\ q_2 & a_2 & \uparrow lecture \\ \cdots & \cdots & \\ q_{n-1} & a_{n-1} & \\ q_n < b & a_n = q_n \neq 0 & \\ 0 & Arrêt & \end{array}$$

Applications :

- Système décimal : base 10 : 10 chiffres : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9
- Système binaire :base 2 : 2 $bits$: 0 ; 1 ($binary\ digit$) utilisé pour représenter le fonctionnement de l'électronique numérique utilisée dans les ordinateurs :

  $N = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + a_1 2 + a_0 = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}^2$

  Avec $a_n; a_{n-1}; \ldots; a_0 \in \{0; 1\}$
- Système octal : 8 chiffres : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7
- Système duodécimal : base 12 : 12 chiffres : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; A ; B
- Système hexadécimal : base 16

  16 chiffres : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; A ; B ; $C.D$; E ; F

Exercices d'application :

1. Convertir en décimal les nombres suivants :

   $$\overline{11001011}_2 \quad ; \quad \overline{512}_8 \quad ; \quad \overline{A10F}_{16}$$

2. Convertir le nombre :

   a. $\overline{44}_{10}$ en système binaire

   b. $\overline{2024}_{10}$ en hexadécimal

c. $\overline{FC7}_{16}$ en base octal

3. Comparer les 2 nombres : $\overline{4310}_5$ et $\overline{652}_7$
4. Poser et effectuer l'opération suivante dans la base 3 : $\overline{2110}_3$ et $\overline{2212}_3$
5. Refaire l'opération précédente en passant par la base 10.

***4. Application**: Critères de divisibilité par 5 ;25 ;3 ;9 ;4 ;11dans le système décimal.*

Propriétés :

Soit $x \in \mathbb{N}^*$écrit dans le système décimal : $x = \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}^{10}$;

$a_n; a_{n-1}; \dots ; a_0$ sont les chiffres de x. On a :

i) $x \equiv 0[5]$ $\Leftrightarrow$ ($a_0 = 0$ ou $a_0 = 5$)

ii) $x \equiv 0[25]$ $\Leftrightarrow$ ($\overline{a_1 a_0} \in \{0; 25; 50; 75\}$)

iii) $x \equiv 0[3]$ $\Leftrightarrow$ ($\sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0[3]$)

iv) $x \equiv 0[9]$ $\Leftrightarrow$ ($\sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0[9]$)

v) $x \equiv 0[4]$ $\Leftrightarrow$ ($\overline{a_1 a_0} \equiv 0[4]$)

vi) $x \equiv 0[11]$ $\Leftrightarrow$ ($\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i \equiv 0[11]$)

Démonstrations :

i) Comme $10 \equiv 0[5]$, alors $x \equiv a_0$ $[5]$

Donc 5 $divise$ x $\Leftrightarrow$ le $chiffre$ des $unités$ de x est 0 ou 5.

ii) $10^2 \equiv 0[25] \Rightarrow x \equiv \overline{a_1 a_0}$ $[25]$ …

iii) $10 \equiv 1[3] \Rightarrow x \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i$ $[3]$ …

iv) $10 \equiv 1[9] \Rightarrow x \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i$ $[9]$ …

v) $10^2 \equiv 0[4] \Rightarrow x \equiv \overline{a_1 a_0}$ $[4]$ …

iv) $10 \equiv -1[11] \Rightarrow x \equiv \sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i$ $[11]$ …

Exercices d'application :

1) Déterminer les chiffres x et y du nombre $\overline{5x07y}_{10}$ pour que ce nombre soit divisible par 99.
2) Déterminer les chiffres x et y du nombre $\overline{3x3y0}_{10}$ pour que ce nombre soit divisible par 60.